Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch
Příspěvěk k theorii kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 3, 160--177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122766

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1881

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Příspěvek k theorii kuželoseček.

Podává

Matyáš Lerch, technik v Praze.

V následujícím chci vyvinouti některé z nejdůležitějších pouček o prométných řadách a svazcích na základě principu Chaslesova a po té ukázati tři spůsoby konstrukce kuželosečky dané pěti prvky.

I. Mějmež na zřeteli dvě přímky P_1 a P_2, považujíce je za osy dvou řad bodů, jež sestrojiti lze na základě určité konstrukce, jež toho budiž způsobu, aby každému bodu řady jedné jediný příslušel v řadě druhé a naopak. Řady takové nazýváme *prométnými*. Znamenáme-li u (v) algebraické vzdálenosti bodu m_1 (m_2) řady P_1 (P_2) od libovolného, avšak stálého bodu o_1 (w_2), bude patrně prométnost obou řad vyznačena rovnicí

$$auv + bu + cv + d = o \ldots \qquad (1)$$

Neboť tu patrně každou hodnotu u (v) stanovena jediná, určitá hodnota v (u) a těmi (jakožto funkcemi jednoznačnými) také vždy jediný bod.

Poněvadž volba bodů počátečních o_1, w_2 na polohách příslušných si bodů nezávisí, změní se s nimi toliko hodnoty součinitelů rovnice (1). Dány-li jsou tedy tři páry příslušných si bodů a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2: zvolme si libovolně body o_1, w_2 na přímkách P_1, P_2, ustanovme délky

$$\begin{aligned} o_1 a_1 &= u_1, & w_2 a_2 &= v_1 \\ o_1 b_1 &= u_2, & w_2 b_2 &= v_2 \\ o_1 c_1 &= u_3, & w_2 c_2 &= v_3, \end{aligned}$$

dosaďme tyto hodnoty do vzorce (1) a vylučme z této a takto vzniklých tří rovnic součinitele *a, b, c, d,* čímž obdržíme rovnici závislosti

$$\begin{vmatrix} u\,v, & u_1, & v, & 1 \\ u_1 v_1, & u_1, & v_1, & 1 \\ u_2 v_2, & u_2, & v_2, & 1 \\ u_3 v_3, & u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix} = o,$$

kteráž jest úplně určita, z čehož posléz vyplývá:

„Prométnost dvou řad stanovena jest třemi páry příslušných si bodů.“

Obdobně nazýváme dva svazky paprsků $\overline{s_1}$, $\overline{s_2}$ prométnými, přísluší-li každému paprsku jednoho jediný paprsek svazku druhého a naopak. Značí-li pak u, v jakékoli funkce toho spůsobu, že každou jich hodnotou dána jediná poloha paprsku a naopak, vyznačena jest promětnost obou svazků rovnicí (1). Značtež tedy u, v trigonometrické tangenty úhlů, které svírají paprsky M_1, M_2 s libovolnými, avšak stálými přímkami O_1, W_2 svazků s_1, s_2.

Obdobně s předešlým vyvineme:

„Promětnost dvou svazků paprskových určena jest třemi páry příslušných si paprsků."

II. Nalezají-li se dvě promětné řady bodů P_1, P_2 na téže přímce P, můžeme tu zvoliti opět libovolný bod o za počátek souřadnic, oběma řadám společný. Promětnost udána bude opět rovnicí tvaru (1). Hledejme takový bod řady P_1, jenž se sjednocuje s příslušným si bodem v řadě P_2; pro ten patrně platí $u = v$; kteroužto podmínku sluší s (1) spojiti, abychom bod stanoviti mohli. Takovýto bod oběma řadám společný nazývá se bodem *dvojným* či *samodružným*. Pro ten platí tudíž rovnice

$$au^2 + (b + c)\,u + d = o, \ldots \qquad (2)$$

kteráž, jsouc stupně druhého, nanejvýš dvé kořenů míti může, kterýmž odpovídají dvě polohy bodů. Kořeny rovnice té jsou buď oba realné, neb oba pomyslné,*), aneb se sjednocují v jedinou realnou hodnotu, pročež: „Dvě promětné řady bodů souosé mají dvé bodů samodružných či dvojných, jež jsou buď oba realné, buď se sjednocují, aneb jsou oba pomyslné."

Zcela obdobně nalezneme:

„Dva promětné soustředné svazky mají dvé samodružných či dvojných paprsků (realných, v jedno spadajících aneb pomyslných)."

Má-li rovnice (2) tři kořeny, má jich nekonečné množství a každá hodnota pak jí vyhovuje. V tom případě se promětné řady a svazky sjednocují, t. j. mají-li dvě promětné soumístné řady neb svazky 3 prvky dvojné, jsou totožny.

Z pojmu promětnosti patrně vyplývá: Dva promětné svazky stanoví na dvou libovolně vytčených přímkách promětné řady

---

*) t. j. soujemné spřežité.

bodů. Neboť libovolnému bodu m_1 řady P určím příslušný, vedu-li si jím paprsek M_1 svazku $\overline{s_1}$ a určím-li jemu příslušný M_2 svazku $\overline{s_2}$, jenž protíná pak přímku P_2 v hledaném bodě m_2; i jest patrno, že každému bodu m_1 (m_2) odpovídá jediný bod m_2 (m_1).

Obdobně platí: Dvě promětné řady promítají se ze dvou libovolných bodů promětnými svazky.

III. Pohybuje-li se paprsek M_1 svazku s_1 nepřetržitě, mění se poloha paprsku M_2 s ním sdruženého rovněž spojitě; následovně vytvořuje průsek m těchto paprsků, jenž nutně polohu svou spojitě měniti musí, určitou čáru, jejíž stupeň nám vyšetřiti jest.

Protněme ji za tou příčinou libovolnou přímkou P. Tato protíná oba svazky promětné s_1 $(A_1, B_1, C_1 \ldots)$, s_2 $(A_2, B_2, C_2 \ldots)$ ve dvou soumístných řadách bodových $(a_1\, b_1\, c_1 \ldots)$, $a_2\, b_2\, c_2 \ldots)$ (viz obr. 3.). Poněvadž paprsky svazků $\overline{s_1}$, $\overline{s_2}$ jdoucí týmž bodem čáry sobě přísluší, děje se rovněž tak ve všech průsecích přímky P s čárou Γ, kteréžto následovně jsou dvojnými body promětných řad $(a_1\, b_1\, c_1 \ldots)$, $(a_2\, b_2\, c_2 \ldots)$, kterýchž nanejvýše dvé stávati může, t. j. ona čára jest *stupně druhého.*

Paprsku $\overline{s_1\, s_2}$ odpovídá co prvku U_1 svazku $\overline{s_1}$ obecně od něho rozdílný paprsek U_2 svazku $\overline{s_2}$, a témuž co prvku V_2 svazku $\overline{s_2}$ paprsek V_1 svazku s_1. I následuje z toho, že body s_1, s_2 náležejí čáře této. Blíží-li se paprsek M k U_1, blíží se bod m k s_2, a proto blíží se paprsek M_2 tečné bodu s_2, t. j. přímka U_2 dotýká se čáry Γ v bodě s_2. Podobně jest V_1 tečnou v bodě s_1.

„Každá čára druhého stupně dá se vytvořiti promětnými svazky.“ Je-li (obr. 3.) Γ čárou druhého stupně, zvolme si na ní zcela libovolně dva body s_1, s_2 a považujme je za středy dvou svazků, jichž paprsky se na čáře protínají. I náleží patrně každému paprsku M_1 svazku $\overline{s_1}$ jediný paprsek M_2 svazku $\overline{s_2}$, kterýž prochází druhým průsekem jeho m s čárou Γ a naopak. Následovně jsou oba svazky promětnými.

Dosavad uvažovali jsme případ všeobecný, kde paprsku spojujícímu středy obou svazků odpovídají paprsky od něho rozdílné. Vyšetřme nyní případ zvláštní, kde dané svazky mají paprsek, jenž sám sobě odpovídá, t. j. *samodružný* paprsek $\overline{s_1 s_2}$.

Protneme-li oba svazky libovolnou přímkou P, obdržíme na ní dvě řady bodů promětné $(a_1 b_1 \ldots)$, $(a_2 b_2 \ldots)$; průsek $\underline{e}$ přímek P a $\overline{s_1 s_2}$ jest jedním dvojným bodem těchto řad, neboť paprsek $\overline{s_1 s_2}$ spadá se svým příslušným v jedno, a proto také průsek jeho $\underline{e}$ s přímkou P; následovně mají řady $(a_1 b_1 \ldots)$, $(a_2 b_2 \ldots)$ jediný jen ještě dvojný bod f, jenž se nalezá nutně mimo přímku $\overline{s_1 s_2}$ a jest průsekem příslušných si paprsků $\overline{s_1 f}$, $\overline{s_2 f}$.

Má tedy výtvar těchto dvou svazků tu vlastnost, že jej každá přímka protíná v jediném bodě, t. j. výtvar ten jest přímkou.

To vyplývá též z následující úvahy: Přímka $\overline{ab}$ protíná oba svazky ve dvou promětných řadách, kteréž mají jeden dvojný bod v průseku $\underline{z}$ s přímkou $\overline{s_1 s_2}$; při tom však jsou též body a, b dvojnými, takže řady ty, majíce tré bodův dvojných, jsou totožnými, čili jinak řečeno, průsek m příslušných si paprsků M_1, M_2 probíhá přímku ab. (Obr. 4.).

„Dva svazky promětné mající samodružný paprsek slovou *prvopromětné* či *perspektivické*, a protínají se na přímce.“

Dva svazky perspektivické udány jsou dvěma páry příslušných si paprsků; neboť třetí zastoupen jest samodružným paprskem $\overline{s_1 s_2}$. Příslušnými páry A_1, A_2; B_1, B_2 dány jsou dva body a, b, jimiž stanovena je přímka Γ, výtvar to obou svazků. Paprsku M_1 najdu příslušný M_2, spojím-li průsek (ΓM_1) s bodem s_2 a naopak.

Libovolná přímka protíná oba svazky ve dvou soumístných promětných řadách, jichžto dvojné body nalezají se na paprsku samodružném a na přímce Γ.

Této vlastnosti užíti lze k řešení následující úlohy:

Úkol. Promětnost dvou soumístných bodových řad jest dána jedním bodem dvojným $\underline{e}$ a dvěma páry příslušných si bodů a_1, a_2; b_1, b_2: má se určiti druhý bod dvojný a libovolnému bodu m_1 určiti příslušný bod m_2.

Bodem e veďme si libovolnou přímku, a na té opět libovolně zvolíme body s_1, s_2, z nichž promítáme řady $(a_1\, b_1 \ldots)$, $(a_2\, b_2 \ldots)$; tím obdržíme dle vět na konci II. uvedených dva prométné svazky. Poněvadž bod e sám sobě náleží, činí tak patrně též paprsek $\overline{s_1\, s_2}$, a proto jsou svazky tyto perspektivické a protínají se na přímce Γ, kteráž seče danou řadu v hledaném bodě dvojném f. Dán-li bod m_1, veďme paprsek $\overline{s_1\, m_1}$, ustanovme průsek jeho m s přímkou Γ, načež nám paprsek $s_2\, m$ stanoví na P bod m_2. (Obr. 5.)

IV. Posledně uvedené konstrukce lze však ještě mnohem dále užívati. Onať tvoří základ k řešení úlohy: Dána jest čára 2. stupně 5ti body; i mají se ostatní body její sestrojiti.

Buďtež body ty $a\, 1b\, 2e$ (obr. 4.). Body 1, 2 považujme za středy dvou svazků promítajících body kuželosečky, a tedy prométných. Promětnost jejich stanovena jest třemi páry přidružených paprsků $1a$, $2a$; $1b$, $2b$; $1e$, $2e$. Bodem e veďme si libovolnou přímku P; ta protíná oba svazky v promětných řadách soumístných $(a_1\, b_2 \ldots)$ $(a_2\, b_2 \ldots)$, jež mají dvé bodův dvojných, z nichž jeden jest e, pročež jest též druhý z nich f bodem skutečným; dle III. jest tento bod druhým průsekem přímky P s čarou 2. stupně.

Abychom ustanovili tedy bod f, veďme si bodem e libovolnou přímku, na níž zvolme libovolné dva body s_1, s_2 a promítejme z nich prométné řady $(a_1\, b_1 \ldots)$, $(a_2\, b_2 \ldots)$; průsekem takto vzniklých svazků perspektivických jest přímka $\alpha\beta$, kteráž protíná přímku P v hledaném bodě f. Nyní možno zvoliti jinou přímku P' a nalézti na ní bod f' atd. (Obr. 6.).

Konstrukce tato dá se též následující větou formulovati:

„Úhlopříčky čtyřúhelníka $(\alpha\, s_1\, \beta\, s_2)$, jehož protější strany procházejí průseky protějších stran čtyřúhelníka $(a\, 1\, b\, 2)$ čáře 2. stupně vepsaného s libovolně vytčenou přímkou (P), současně procházejí aneb neprocházejí průseky této přímky s onou čarou.“ (Obr. 6.) *)

Chceme-li sestrojiti tečny v bodech 1 a 2, považujme průsek přímky $\overline{12}$ s přímkou P jednou za bod q_2, určujíce příslušný

*) Poněkud v jiné formě vyslovil tuto větu poprvé Désargues.

mu bod q_1, a podruhé za p_1, a nalezněme p_2 dle udání na konci III.; $1q_1$, $2p_2$ jsou hledané přímky a nezávisí patrně na poloze přímky P.

Zvláštní případ nastane, spadají-li body e, f v jedno; pak jest P tečnou čáry 2. stupně.

„Úhlopříčky čtyřúhelníka, jehož protější strany procházejí průseky protějších stran čtyřúhelníka čáře 2. stupně vepsaného s libovolnou její tečnou, současně buď procházejí neb neprocházejí bodem tečným oné přímky.“

Jakkoli jsme již uvedli konstrukci tečen v bodech (1, 2) libovolných čáry Γ, nicméně uvedeme ještě jiný způsob na větě právě uvedené se zakládající.

Učiňme (viz obr. 7.) $s_1 \equiv 1$, načež s_2 nalezá se na přímce $\overline{1e}$; zvolme jej tak, aby náležel též přímce $\overline{a2}$, proto sjednocuje se bod α s bodem a, bod β jest průsek přímek $\overline{ae}$, $\overline{1b}$; bod b_2 nalezati se musí na $\overline{s_2\beta}$ a na $\overline{2b}$, takže jej snadno sestrojiti možno; $\overline{b_2e} \equiv P$.

Vůbec lze z naší věty velmi mnoho různých konstrukcí odvoditi, položí-li se body s_1, s_2 do zvláštních bodův jiných. Učiníme-li (obr. 8.), jako předešle, $s_1 \equiv 1$, a zvolíme-li s_2 na $\overline{a2}$, bude $\alpha \equiv a$, načež druhá úhlopříčka $\overline{a\beta}$ prochází bodem f, dle kteréžto podmínky stanoví $\overline{af}$ bod β na $\overline{1b}$; průsek b_2 přímek $\overline{s_2\beta}$, $\overline{2b}$ nalezá se na přímce ef.

Konstrukce tato vyjadřuje však toliko, že se průseky přímek $\overline{a2}$, $\overline{1e}$; $\overline{2b}$, $\overline{ef}$; $\overline{b1}$, $\overline{fa}$ čili body s_2, b_2, β nalezají na jediné přímce; ony přímky jsou však protější strany šestiúhelníka $a2b1ef$ čáře 2. stupně vepsaného, takže máme větu:

„Průseky protějších stran šestiúhelníka čáře 2. stupně vepsaného nalezají se na jediné přímce.“ Tuto větu poprvé objevil Pascal, pročež se také jeho větou nazývá, a jest jen zvláštním případem věty Désarguesovy v obr. 6. naznačené. Konstrukce tečny P v bodě e (viz obr. 7.) jest zvláštní případ konstrukce Pascalovy.

V. Jednoduchá a poněkud obecnější konstrukce tečny v určitém bodě čáry druhého stupně, nežli v obr. 7., plyne z obecnější, uvedené v IV. po větě Désarguesově.

Učiníme-li $P \equiv \overline{eb}$ (obr. 9.), $s_1 \equiv 1$, bude se s_2 nalezati na přímce $\overline{1e}$, kdež jej libovolně zvolme; určeme známým spůsobem a_2, α ($b \equiv \beta$); průsek přímek $Pa\,\overline{12}$ nazveme q_2 a hledejme příslušný bod q_1; přímka $\overline{1q_1}$ dotýká se pak čáry v bodě 1. Bod q_1 určí se následovně:

Průsek q přímek $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{s_2 q_2}$ spojí se s bodem 1, a obdržená přímka prochází bodem hledaným. Jest tedy ona sama tečnou v bodě čáry 1. — Zvolíme-li s_2 na $2a$, bude se konstrukce shodovati s onou v obr. 7.

Nyní bychom mohli řešiti úlohu konstrukce čáry druhého stupně při daných 5. bodech; 3 bodech, tečné a bodu tečném; jednom bodě a dvou tečnách s body tečnými. První byla již řešena v obr. 4. Druhé řešení podává nám věta Pascalova. Jsou-li 1, 2, 3, 4, 5 dané body, veďme si jedním z nich, na př. 5, libovolnou přímku; ta musí ještě protínati čáru v jednom bodě 6; ten nalezne se dle věty Pascalovy.

Protější strany šestiúhelníka 123456 jsou totiž

$\overline{12}$ a $\overline{45}$ se společným bodem α
$\overline{23}$ „ $\overline{56}$ „ „ „ β
$\overline{34}$ „ $\overline{61}$ „ „ „ γ

První dva páry přímek známe, pročež také body α, β a jimi určenou přímku Pascalovu P; přímka $\overline{34}$ protíná ji nutně v bodě γ, jenž musí se nalezati na přímce $\overline{61}$, t. j. přímka $\overline{\gamma 1}$ protíná přímku $\overline{56}$ v bodě 6.

Konstrukce tečen provésti možno různými spůsoby již uvedenými.

Druhá úloha, dány-li jsou 4 body a tečna v jednom z nich, řeší se jako předešlá, jenom s tím rozdílem, že body 1, 2 sjednocují se v bodě tečném, je-li $\overline{12}$ ona tečná přímka.

A podobně i ostatní úkoly. Patrno, že všecky tyto úlohy dají se řešiti methodou naší v obr. 4. uvedené, jenže tu nutno jisté prvky považovati za splývající, což provésti ponecháno budiž píli laskavého čtenáře.

VI. Každá čára 2. stupně stanovena jest 5 body, jakž z průběhu dosavadního pojednání patrno. Mají-li dvě čáry 2. stupně 5 bodů společných, sjednocují se. Neboť konstrukce čáry také provádí se tak, že se jedním z daných pěti bodů vede nesčíslný počet přímek a na každé z nich určí jediný bod její na základě známých konstrukcí.

Kdyby dáno bylo méně bodů, nežli 5, byla by úloha neurčitou, a kdyby více, obecně nemožnou. Nalezené body nalezaly by se na obou čarách, které by se následkem toho sjednocovaly. Toho nutný následek pak jest, že dvě čáry 2. stupně mohou míti nanejvýš čtyři body společné.

Mají-li čáry 2. stupně Γ_1, Γ_2 (obr. 10.) dva body s, σ společné, můžeme určiti další dva a tak dokázati, že obě čáry musí míti čtyři body společné.

Vedeme-li si bodem σ všecky možné paprsky M, a vyhledáme-li jich průsečné body s čárami, obdržíme, spojujíce tyto s bodem s dva svazky soumístné s_1, s_2 promětné se svazkem σ, a tedy také spolu promětné. I mají tudíž dva paprsky dvojné, buď skutečné, různé, neb sjednocující se, aneb pomyslné, kteréž jak patrno, procházejí průseky e, f obou čar.

Kdyby těchto průseků bylo více, měly by oba svazky více než dva paprsky samodružné, což by vyžadovalo jednostejnost svazků s_1, s_2' a následovně i jednostejnostobou čar atd.

VII. Budiž (obr. 11.) Γ libovolná čára 2. stupně, s a s' pak středy dvou promětných svazků $s\,(abc\ldots)$, $s'\,(a'b'c'\ldots)$, ježto se tedy protínají opět v čáře 2. stupně Γ', dané body s, s', α, β, γ, kdež poslední tři značí průseky přímek sa, $s'a'$ atd.

Oba tyto svazky protínají čáru Γ ve dvou řadách bodů a, b, $c\ldots$ a a', b', $c'\ldots$, jež jsou v také souvislosti, že každému bodu jedné náleží jediný bod řady druhé; neb dán-li nám libovolný m, vedeme tímto paprsek $\overline{sm}$ svazku $\overline{s}$, a určíme mu ve svazku $\overline{s'}$ příslušný paprsek $\overline{s'm'}$, jenž protne čáru Γ v jediném bodě $\overline{m'}$, přidruženému bodu $\underline{m}$. Proto nazýváme řady $abc\ldots$, *$a'b'c'$ promětnými řadami na čáře 2. stupně.*

Jest nám nyní vyšetřiti, stává-li tu bodů, které se svými sdruženými v jedno spadají, t. j. mají-li dvě promětné řady na čáře 2. stupně *samodružné* či *dvojné* body. — Předpokládejme, že se čáry Γ a Γ' nedotýkají (což by se v bodech s a s' státi musilo), takže se protínají v bodech s a s'. V tom pádě nemohou s a s' býti body samodružnými, paprsku $\overline{ss'}$ svazku s odpovídá tečna čáry Γ' v bodě s', která není tečnou čáry Γ; podobně o bodu s. Bod dvojný obou řad patrně náleží oběma čarám Γ a Γ'; tyto však mají čtvero bodů společných, z nichž dva jsou s, s', o kterých jsme právě dokázali, že nejsou body dvojnými, takže zbývají pouze dva body oběma čarám společné, které jsou zároveň samodružné prvky promětných řad $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$

„Dvě promětné řady bodů na čáře 2. stupně mají dva body dvojné buď oba realné neb sjednocující se, aneb oba pomyslné."

Dotýkají-li se pak čáry Γ a Γ' v bodech s, s', sjednocují se body dvojné s těmito a věta zůstane tatáž.

Zvolíme-li si na Γ libovolné dva body σ, σ' a promítáme-li z nich řady $abc\ldots$, $a'b'c'$, obdržíme dva svazky promětné se svazky s, s' a tedy také vespolek.

„Promětné řady bodů na čáře druhého stupně promítají se ze všech bodů této čáry promětnými svazky."

Tuto větu mohli jsme uvésti před vyšetřováním bodů dvojných, a pak bychom byli obdrželi promítáním z libovolného bodu čáry obou řad dva promětné svazky soumístné, jež mají dvé paprsků samodružných, které čáru Γ v bodech dvojných protíti musí, čímž věta podruhé dokázána.

Z toho patrno, že:

„Promětnost dvou řad bodů na čáře 2. stupně stanovena jest třemi páry příslušných si bodů."

Abychom sestrojili snáze příslušné si body, učiňme (obr. 12.) $s \equiv a'$, $s' \equiv a$, načež mají oba svazky s, s' samodružný paprsek aa', a protínají se tedy na přímce P, jež slove *osou promětnosti*, a jež patrně dle předešlých úvah prochází body dvojnými e, f. Na přímce P leží tedy průseky přímek $\overline{ab'}$, $\overline{a'b}$; $\overline{ac'}$, $\overline{a'c}$. Přímka P zůstane tatáž, učiníme-li $s \equiv b'$, $s' \equiv b$, načež přímka obsahuje též průsek přímek $\overline{bc'}$, $\overline{b'c}$; odtud máme větu:

„Jsou-li a, b, c, a', b', c' body na čáře 2. stupně, nalezají se průseky

přímek	$\overline{ab'}$, $\overline{a'b}$	to jest bod	3
„	$\overline{b'c}$, $\overline{bc'}$	„ „ „	1
„	$\overline{ca'}$, $\overline{a'c}$	„ „ „	2

na téže přímce.

Tyto přímky jsou však protější strany šestiúhelníka $ab'ca'bc'$ čáře vepsaného, čímž věta Pascalova znova dokázána.

Je-li prométnost řad na čáře 2. stupně dána dvojinami aa', bb', cc', sestrojíme si nejprv osu promětnosti P. Libovolnému bodu m obdržíme příslušný bod m', vedeme-li si paprsek $\overline{a'm}$, určíme průsek jeho μ s přímkou P, a vedeme-li paprsek $a\mu$, jenž nám seče čáru v bodě hledané m'.

VIII. Protneme-li dva promětné svazky soumístné libovolnou čarou 2. stupně jdoucí společným jich vrcholem, obdržíme na této dvě promětné řady bodů.

Dána-li promětnost oněch svazků $\overline{s}$, $\overline{s'}$ třemi dvojinami paprsků (obr. 13.) A, A'; B, B'; C, C'; můžeme sestrojiti na čáře 2. stupně Γ průsečné body těchto paprsků a, a'; b, b; c, c', jimiž pak dána jest promětnost řad na čáře Γ, takže lze nám sestrojiti osu promětnosti P, kteráž protíná čáru Γ v bodech (e, f) samodružných.

Paprsky $\overline{se} \equiv E$, $\overline{sf} \equiv F$ jsou dvojnými paprsky promětných svazků. — Této vlastnosti užívá se ke konstrukci samodružných paprsků dvou svazků promětných a soumístných, při čemž za Γ volívá se obyčejně kruh, poněvadž se nejsnáze konstruovati dá.

Libovolnému paprsku M svazku $\overline{s}$ nalezneme příslušný paprsek M' svazku $\overline{s'}$, sestrojíce jeho průsečnému bodu m s čarou Γ příslušný bod m', a vedeme-li jím paprsek svazku $\overline{s'}$.

Poněvadž tu jednáno o promětných řadách bodů na čáře 2. stupně vůbec, bylo by na řadě přihlédnouti k případu, kdy se ona čára rozpadá ve dvě přímky, čímž bychom vyvinouti mohli theorii promětných řad přímých. Poněvadž však výsledky jsou reciproké větám dosud uváděným o promětných svazcích, vyviňme je ze vět základních.

IX. Mějmež na zřeteli dvě promětné přímé řady bodů P_1, P_2; bodu m_1 řady P_1 odpovídejž m_2 řady P_2.

Pohybuje-li se bod m_1 nepřetržitě, mění bod m_2 rovněž polohu svou spojitě, takže spojivá jich přímka $M (\equiv \overline{m_1 m_2})$ nepřetržitě se pohybujíc určitou čáru zahaluje či obaluje, kterouž nazveme Γ; všecky polohy přímky M dotýkají se čáry Γ; vyšetřme tedy *třídu* čáry Γ, t. j. zodpovězme otázku, kolikráte při svém pohybu projde přímka M libovolně vytčeným bodem p.

Za tím účelem promítejme obě řady P_1, P_2 z bodu p, čímž vzniknou dva prometné soumístné svazky, mající tedy dva body samodružné, které protínají tedy řady P_1, P_2 v příslušných si bodech, a které jsou tedy zvláštními polohami přímky tvořící M.

„Obálka všech poloh přímky spojující příslušné si body dvou promětných řad přímých jest druhé třídy.“

Přiblíží-li se bod $m_1(m_2)$ průseku $P_1 P_2$ nekonečně, přiblíží se též přímka M přímce $P_2(P_1)$ (ač neprochází-li stálým bodem), takže i tato přímka jest tečnou čáry Γ.

„Čára Γ dotýká se pak os daných řad v bodech odpovídajících společnému bodu těchto přímek.“

Naopak se dá každá čára 2. třídy vytvořiti dvěma promětnýma řadama.

Jsou-li totiž P_1, P_2 tečny čáry Γ druhé třídy, protíná je souhrn ostatních tečen jejich ve dvou promětných řadách; neboť z každého bodu m_1 řady P_1 mohu vésti na Γ jednu jen tečnu, která se různí od P_1 a která na P_2 stanoví jediný bod příslušný atd.

Prochází-li přímka M pevným bodem s (obr. 14.), slovou řady *prvopromětné* či *perspektivické* a mají samodružný bod $(P_1 P_2)$.

A naopak, mají-li dvě promětné řady P_1, P_2 samodružný bod, jsou perspektivické, t. j. přímka $\overline{m_1 m_2}$ prochází pevným bodem.

Budiž tedy (obr. 14.) $(P_1 P_2)$ samodružný bod dvou promětných řad P_1, P_2. Z libovolného bodu p promítají se řady tyto v promětných svazcích soumístných, jež mají dvé dvojných paprskův; jeden z nich nutně prochází bodem samodružným $(P_1 P_2)$ obou řad.

Položme si p do průseku s přímek $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$. Promítáme-li z bodu s obě řady, obdržím patrně dva promětné svazky, kteréž mají dvojný paprsek $Z \equiv \overline{s\,(P_1 P_2)}$; kromě toho jsou však též přímky $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$ paprsky dvojnými, takže mají oba svazky tři dvojné prvky, a tudíž se sjednocují, z čehož patrně vyplývá hořejší věta.

Prvopromětnost dvou řad stanovena jest dvěma páry bodů sobě náležejících, jelikož bod společný oběma řadám tvoří co samodružný třetí pár. Stálý bod, jímž přímka $\overline{m_1 m_2}$ prochází, slove *středem* obou řad.

Úloha. Promětnost dvou svazků jest dána dvěma páry sdružených prvků A_1, A_2; B_1, B_2 a paprskem dvojným E; má se určiti druhý paprsek dvojný F a k libovolnému paprsku M_1 stanoviti paprsek M_2.

Na paprsku E vytkněme si libovolný bod a veďme jím zcela dovolně dvě přímky P_1, P_2; ty protnou dané svazky v promětných řadách $(a_1\, b_1 \ldots)$, $(a_2\, b_2 \ldots)$, jež mají samodružný bod, poněvadž se na dvojném paprsku E sekou; následovně jsou perspektivické a mají střed perspektivický s, jímž patrně prochází druhý paprsek dvojný F.

Dán-li paprsek M_1, stanovme průsek jeho m_1 s P_1, veďme $\overline{m_1 s}$ až protne P_2 v m_2, kterýmž prochází pak paprsek M_2.

X. Kdybychom této konstrukce užili k řešení úlohy: Dána jest čára 2. třídy 5 tečnami I, II, A, B, E, a má vésti daným bodem p na E zvoleným tečna druhá, přišli bychom k větě.

Diagonalní body (q, r) čtyrstranu $(P_1, P_2, \alpha, \beta)$, jehož protější rohy $[(P_1 B_1)$ a $(P_2 A_2)$, $(P_1 A_1)$ a $(P_2 B_2)]$ leží na přímkách spojujících protější rohy čtyřúhelníka (I II A B) čáře 2. třídy opsaného s bodem p libovolně vytčeným, současně leží neb neleží na tečnách E, F tímto bodem k čáře oné vedených (obr. 16.).

Učiníme-li tu $P_1 \equiv \mathrm{I}$ (obr. 15.), a vedeme-li P_2 body (A II), (E I), jest $\alpha \equiv A$, $\beta \equiv \overline{(P_1 B_{\mathrm{I}})\,(P_2 B_2)} \equiv \overline{(\mathrm{I}\, B)\,(P_2 B_{\mathrm{II}})}$; $\bar{\alpha}$ a $\bar{\beta}$ musí se protínati na přímce F, která jest tečnou čáry a prochází bodem p. Výsledek konstrukce dá se vyjádřit tím, že přímky $\overline{(A F)\,(B\,\mathrm{I})}$, $\overline{(B\,\mathrm{II})\,(E F)}$, $\overline{(A\,\mathrm{II})\,(E\,\mathrm{I})}$ procházejí bodem b_2. Avšak body $(A F)$, $(\mathrm{I}\, B)$; $(F E)$, $(B\,\mathrm{II})$; $(E\,\mathrm{I})$, $(\mathrm{II}\, A)$ jsou protější rohy šestiúhelníka $A\,F\,E\,\mathrm{I}\,B\,\mathrm{II}$ opsaného čáře Γ, takže máme větu:

„Přímky spojující protější rohy šestiúhelníka opsaného čáře druhé třídy procházejí týmž bodem.“ Věta právě uvedená slove po svém vynálezci větou Brianchonovou a slouží právě tak jako předešlá ke konstrukci čáry 2. třídy dané pěti podmínkami, při čemž dlužno tečnu čáry považovati za jednu podmínku, tečnu s bodem styku (jakožto dvě nekonečně blízké tečny) za podmínky dvě.

XI. Buďtež P_1, P_2 (obr. 17 a) dvě promětné řady bodů; abychom ze tří daných párů a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 určovati mohli ostatní, promítejme řady tyto z dvou bodů s_1, s_2 na přímce jdoucí dvěma body sobě příslušnýma, na př. $\overline{a_1 a_2}$; tím vzniknou dva promětné svazky paprsků $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, které, majíce paprsek samodružný, protínají se na přímce P_0; chceme-li pak libovolnému bodu m_1 sestrojiti příslušný, veďme přímku $\overline{s_1 m_1}$ až nám protne přímku P v bodě μ, načež nám paprsek μs_2 protíná P_2 v bodě hledaném m_2. V obrazci vyznačeny jsou body p_2, q_1 odpovídající průseku obou řad, jak jej buď první či druhé řadě přičítáme. Stlumočena jsouc ve smyslu geometrickém zní tato úvaha následovně:

„Průseky paprsků, promítajících společné body libovolné tečny čáry druhé třídy s dvěma stálýma tečnama téže čáry ze dvou stálých bodů čtvrté tečny této čáry, leží na pevné přímce“.

Této věty patrně lze užiti ke konstrukci čáry 2. třídy dané pěti tečnami a pod.

Zvolíme-li za středy svazků $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ body a_2, a_1, bude patrně přímka P procházeti body p_2, q_1. Poněvadž jsou tyto body stálé, jest přímka jimi stanovená rovněž taková, a my obdržíme, přeložíme-li s_1, s_2 do b_2, b_1 tuže přímku za osu perspektivnosti obou svazků. Z toho patrno již, že se nalezají (obr. 17 b) průseky přímek $\overline{a_1 b_2}$, $\overline{a_2 b_1}$; $\overline{a_1 c_2}$, $\overline{a_2 c_1}$; $\overline{b_1 c_2}$, $\overline{b_2 c_1}$ na téže přímce P, která slove *osou promětnosti* daných řad.

K libovolnému bodu m_1 nalezneme příslušný, vedeme-li si na př. $a_2 m_1$, určíme její průsek μ s P, načež nám $a_1 \mu$ protíná řadu P_2 v hledaném bodě m_2.

Tento případ zvláštní po geometricku vyjádříme takto.

„Úhlopříčky čtyrúhelníka opsaného čáře druhé třídy, jehož tři strany jsou stálé, protínají se na stálé přímce.“ Na této leží tečné body protějších dvou stálých tečen.

XII. Buďtež v obr. 18 a) body s_1, s_2 středy dvou promětných svazků, daných třemi páry paprsků A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Jedním z průseků příslušných si paprsků; na př. $(A_1 A_2)$ veďme přímky P_1, P_2, které protnou dané svazky v řadách promětných, které mají samodružný bod, a tedy také perspektivický střed s. K libovolnému paprsku M_1 určím příslušný, vedu-li si bodem $(M_1 P_1) \equiv m_1$ a bodem s přímku, která protne pak řadu P_2 v bodě m_2, jímž hledaný paprsek M_2 prochází. Odtud plyne věta:

„Přímky spojující průseky dvou pevných přímek jdoucích bodem čáry druhého stupně s tětivami stanovenými bodem hybným a dvěma stálýma, procházejí bodem stálým."

Stane-li se $P_2 \equiv A_1$, $P_1 \equiv A_2$, bude patrně (obr. 16 b) bod s průsekem paprsků sdružených s $\overline{s_1 s_2}$ a tedy bodem stálým; totéž platí stane-li se $P_2 \equiv B_1$, $P_1 \equiv B_2$. Z toho však již patrno, že přímky $\overline{(A_1 B_2)(A_2 B_1)}$, $\overline{(A_1 C_2)(A_2 C_1)}$, $\overline{(B_1 C_2)(B_2 C_1)}$ procházejí bodem s, jenž slove *středem promětnosti* daných svazků. Abychom k danému paprsku M_1 určili příslušný, veďme spojku bodů $(A_2 M_1)$ a s, kteráž nám protne paprsek A_1 v bodě, kterým prochází paprsek M_2. Odtud plyne věta:

„Diagonální body čtyrúhelníka čáře 2. stupně vepsaného, jehož tři body jsou stálé, určují přímku procházející bodem stálým."

Tímto bodem procházejí tečny bodů protějších stálých bodův.

Máme-li na zřeteli určitou polohu bodu hybného, můžeme vysloviti větu.

„V čtyrúhelníku čáře druhého stupně vepsaném nalézají se průseky protějších stran s průsekem tečen v protějších vrcholech na téže přímce."

Věta na konci oddílu XI. uvedená dá se též takto formulovati:

„V čtyrúhelníku čáře druhé třídy opsaném procházejí úhlopříčky a přímky spojující tečné body protějších stran bodem jediným."

Tyto věty jsou zvláštní případy věty Pascalovy a Brianchonovy. Odvození jich ponecháno čtenáři.

XIII. Z dosavadních vět patrno, že dvě čáry druhé třídy mající pět tečen společných jsou totožny, následkem čehož mohou míti toliko čtyři tečny společné. Mají-li čáry Γ_1, Γ_2 (obr. 19) druhé třídy dvě tečny P, Π společné, můžeme pomocí bodů na Π vytvořiti na P dvě promětné řady bodův, vedeme-li totiž z každého bodu μ řady π tečny k Γ_1, Γ_2, kteréž pak protínají přímku P v bodech m_1, m_2 promětně si příslušných. Neboť patrně tu každému bodu m_1 odpovídá jediný m_2 a naopak, pročež atd.

Dvě promětné řady soumístné mají dva prvky samodružné, pročež stává ještě dvé tečen společných oběma čarám.

Jsou-li dvě čáry 2. třídy dány dvěma společnýma a třemi různými tečnami, můžeme stanoviti ještě druhé dvě tečny společné tím, že v jedné z těchto volíme si tři body (třeba průseky daných tří tečen jedné čáry) a vedeme jimi tečny k oběma čarám; tak obdržíme na druhé společné tečně tři páry bodů promětně si příslušících, z nichž možno spůsobem, jejž později udáme, dvojné body obou řad stanoviti atd.

XIV. Předpokládejme na čáře 2. třídy dva soujmy tečen, $(A, B, C \ldots)$, $(A', B', C' \ldots)$, které na jistých dvou tečnách oné čáry určují promětné řady přímé, a nazývejme je *svazky druhé třídy*. Každému paprsku jednoho náleží jediný paprsek svazku druhého, a proto nazýváme je *promětnými svazky paprsků druhé třídy*. I jest patrno, že tvoří na všech tečnách čáry promětné řady bodův. Na jediné takové tvoří dvě souosé řady promětné, ježto pak mají dva body dvojné, kterýmž odpovídají dvojné paprsky obou svazků druhé třídy jimi procházející. Tyto protínají všechny tečny čáry v dvojných bodech souosých řad promětných na nich vzniklých. Z toho plyne, že:

„Dva promětné svazky paprskové druhé třídy mají nanejvýš dva samodružné paprsky.“

Abychom sestrojiti mohli libovolné dvojiny paprsků si příslušných, považme, že svazek $(A' B' C' \ldots)$ protíná paprsek A v řadě bodů, která je promětná s řadou vzniklou průsekem svazku $(A B C \ldots)$ s libovolnou tečnou, tedy na př. s A'; tyto řady mají však samodružný bod (AA') a tedy také perspektivický střed s. Chceme-li sestrojiti paprsku M jeho příslušný, stanovme průsek (MA'), kterýž spojíme s bodem s přímkou, která na A stanoví bod, kterým prochází paprsek M' (obr. 20).

Tečny vedené s bodu s k čáře 2 třídy, patrně jsou dvojné paprsky obou svazků druhé třídy (v obrazci našem jsou pomyslné). Provedeme-li s B, B' totéž, co učinili jsme s A, A', shledáme, že:

„Jsou-li A, A' B, B', C, C' tečny libovolné čáry 2. třídy, procházejí přímky spojující body (AB'), $(A'B)$; (AC'), $(A'C)$; (BC'), $(B'C)$ jediným bodem.“ A poněvadž tyto body jsou protější rohy šestiúhelníka $AB'CA'BC'$, dokázána tím znova věta Brianchonova.

Odtud snadno si odvodíme konstrukci bodů dvojných promětných řad soumístných daných třemi páry bodů sobě příslušných. Jsou-li tyto dvojiny a, a'; b, b'; c, c' (obr. 21.), zvolme si libovolnou čáru druhé třídy (nejlépe kruh), která by se dotýkala osy P obou řad. Na to můžeme pak řady $(ab\,c\ldots)$, $(a'b'c'\ldots)$ promítati tečnami čáry Γ, které tvoří pak tudíž dva promětné svazky paprskové druhé třídy; promětnost jich stanovena jest třemi dvojinami tečen A, A'; B, B'; C, C', které procházejí body stejnozvučně označenými obou daných řad. Sestrojme si střed promětnosti s obou svazků, a veďme jím tečny E, F čáry Γ; tyto jsou dvojné paprsky obou svazků, a protínají řady na P ve dvojných jejich bodech e, f.

XV. Nyní zjednali jsme si prostředky, abychom sestrojili společné body (tečny) dvou čar druhého stupně (2. třídy), dány-li jsou již dva takové prvky. Provedení toho ponecháváme čtenáři.

Jsou-li tři společné prvky těchto čar známy, sestrojíme čtvrtý na základě těchže úvah, užívajíce vět uvedených ve IV. a X.; čtenář proveď zejména tuto úlohu: Dána jest čára 2 stupně (třídy) pěti body (tečnami); má se stanoviti společný prvek čáry této s kružnicí, která jest trojúhelníku danému třemi prvky z daných opsána (vepsána).

XVI. O algebraických vlastnostech promětných útvarů prvořadých.

Určujeme-li každý paprsek svazku $\bar{s}_1$ a $\bar{s}_2$ trigonometrickou tangentou úhlu, jejž svírá s přímkou s_1, s_2, dána jest patrně promětnost obou těchto svazků relací

$$auv + bu + cv + d = 0, \tag{1}$$

kdež u, v jsou tangenty úhlů sevřených paprsky M_1, M_2 sobě příslušnýma s přímkou $\overline{s_1 s_2}$.

Pro $M_1 \equiv s_1 s_2$ platí $u = 0$; má-li tomuto paprsku odpovídati $M_2 \equiv s_1 s_2$, což jest podmínkou perspektivnosti, musí zároveň býti $v = 0$, čemuž se vyhoví jen podmínkou

$$d = 0,$$

takže rovnice

$$auv + bu + cv = 0\ ^{*)} \qquad (2)$$

udává dva svazky prvopromětné a můžeme ji považovati za rovnici přímky jimi vytvořené.

O bodu pravíme, že se nalezá v nekonečné vzdálenosti, jsou-li jím vedené přímky rovnoběžné; i jest tedy podmínkou, aby se bod u nalezal v nekonečnu, rovnice $u = v$. Poněvadž této podmínce vyhovují všecky body nekonečně vzdálené, a poněvadž tvar

$$u - v = 0.$$

jest zvláštním případem rovnice (2), soudíme, že „všecky body v nekonečnu leží na přímce, která se zove *úběžnou přímkou roviny*" a že dva svazky, v nichž přidružíme k sobě paprsky rovnoběžné, jsou perspektivické."

Je-li promětnost dvou svazků dána třemi páry vzájemně rovnoběžných paprsků $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$, položme do (1) $u = v$, čímž nabudeme rovnice

$$au^2 + (b + c)\,u + d = 0,$$

kteráž má dle podmínky tři různé kořeny, a tedy jest identickou, vyhovujíc všem hodnotám u, čili jinak:

„Jsou-li ve dvou promětných svazcích paprsků tři páry příslušných prvků rovnoběžných, jsou všecky přidružené si paprsky rovnoběžné."

Nestává-li této podmínky, dává rovnice (1) za $u = v$ dva kořeny, takže platí věta:

„Dva promětné svazky mají dva páry příslušných si paprsků, které jsou rovnoběžné," čili jinak řečeno: „Čára druhého stupně má dva (skutečné, sjednocené, pomyslné) body v nekonečnu, body to *úběžné*."

Polohu každého bodu kterékoli ze dvou promětných řad bodových P_1, P_2 udáme algebraickou vzdáleností jeho od průsečíku přímek P_1, P_2. Jsou-li tyto na řadě P_1 značeny u, na

---

*) Kdybychom psali $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, nalezli bychom rovnici přímky v souřadnicích *cotangentových*

$$cx + by + a = 0.$$

Poněvadž jest v těchto souřadnicích rovnice přímky stupně prvního, značí tu rovnice stupně n-tého čáru stupně n.

$P_2\ v$, udává rovnice (1) prométnost obou řad, a (2) perspektivnost jejich, takže jest (2) rovnicí bodu.*)

Rovnice (1), vztahuje-li se k svazkům, nazývejme rovnicí v *souřadnicích bodových,* a vztahuje-li se k řadám, rovnicí v *souřadnicích přímkových.*

V souřadnicích bodových platí o paprscích na sobě kolmých $u = -\frac{1}{v}$, což dosadíme-li do (1), nalezneme rovnici

$$bu^2 - au - c = o,$$

kteráž udává, že dva prométné svazky mají dvě pravoúhlé dvojiny.

Těmito souřadnicemi velmi zřetelně se dá dovoditi, že v případu perspektivnosti dvou svazků rozpadá se čára druhého stupně ve dvě přímky, a sice osu perspektivní a paprsek samodružný. Neboť rovnice (2) dává pro $u = v$ dva kořeny, z nichž jeden jest 0, kdežto druhý má hodnotu konečnou.

Odporučujeme čtenáři, aby vyvinul si vzorce pro tečnu a bod tečný v souřadnicích bodových a přímkových, jakož i aby tak učinil pro poláru a pól, a tak dokázal jednostejnost čar druhého stupně a druhé třídy, kteréž pak zahrnujeme společným názvem kuželoseček. Čtenář proveď konstrukci bodů úběžných kuželosečky dané pěti body, a sestroj z daných čtyř bodů v konečné a jednoho v nekonečné vzdálenosti kuželosečky druhý bod úběžný, uživ konstrukce uvedené v IV.; vyšetři, kdy úběžné body prométných řad si odpovídají a z toho odvoď konstrukci paraboly, jejíž dvě tečny s body styku dány jsou. Známy-li jsou čtyři tečny paraboly, urči směr osy (přímky jdoucí bodem styku přímky úběžné), uživ k tomu věty zobrazené v 17. *b*, při čemž položme P_2 do nekonečna.

---

*) Obdobnými úsudky jako v předešlé poznámce shledáme, že rovnice *n*tého stupně o $x = \frac{1}{u}$, $y = \frac{1}{v}$ značí čáru *n*té třídy.