Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 2, 121--134

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122714`

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Pole vektorové.

Část prostoru, v níž jakýsi vektor se mění nepřetržitě, mění-li se spojitě poloha bodu, z něhož vektor vychází, nazýváme *polem vektorovým.*

Příklady takových polí jsou: souhrn rychlostí při nejvšeobecnějším pohybu hmotného útvaru (proměnného), pole gravitační, magnetické, elektrické atd. Ve stati o poli skalárním poznali jsme již jedno zvláštní pole vektorové, totiž *pole gradientů.*

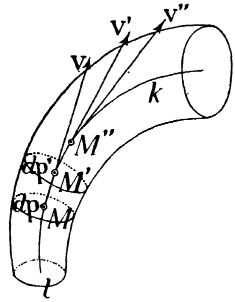
V poli vektorovém každému bodu M přísluší jediný vektor $\mathbf{v}$; vektor ten jest tedy funkcí průvodiče $\mathbf{r}$, jimž poloha bodu M v prostoru jest stanovena. Můžeme tedy psáti

$$\mathbf{v} = f(\mathbf{r}).$$

Budiž opětně připomenuto, že změna vektoru v poli děje se nepřetržitě (s vyjmutím jednotlivých bodů, čar a ploch).

Názorného obrazu geometrického o poli vektorovém nabýváme touto úvahou: Zvolme libovolný bod M (obr. 12.) v prostoru; jemu příslušející vektor buď $\mathbf{v}$. Na tomto vektoru postupme od M k neskonale blízkému bodu M', kterému přísluší vektor $\mathbf{v}'$. Podobně buď M'' bod tohoto vektoru, položený velmi blízko ku M', a vektor vedený bodem M'' budiž $\mathbf{v}''$. Neskonale krátké úsečky MM', $M'M''$ atd. jsou prvky prostorové křivky k, jejíž tečny mají v každém bodě běh vektoru vycházejícího z bodu dotyčného. Křivky ty nazývejme *křivkami vektorovými.* Sekou-li se dvě takové křivky, musí velikost vektoru v průsečíku rovnati se nulle, neboť žádným bodem pole neprocházejí dva různé vektory.

Mysleme si nyní v poli vektorovém uzavřenou čáru l; všemi body jejími procházejí vektorové křivky. Těmito křivkami utvořen jest rourovitý útvar (solenoid), který zoveme *trubicí vektorovou*. Často předpokládáme, že trubice ty jsou nekonečně tenké.



Obr. 12.

Soustavou křivek vektorových určeny jsou úplně běhy všech vektorů pole; abychom znázornili také jejich velikost, vedeme v bodě M vektorové křivky k elementární plošku $d\mathbf{p}$ kolmo ku k a volíme na ní tolik bodů, kolik jednotek délkových má vektor $\mathbf{v}$ příslušející bodu M. Každým bodem této plošky sestrojíme pak křivku vektorovou; počtem těchto křivek jest tudíž velikost vektoru $\mathbf{v}$ stanovena.

Poněvadž v bodě M' vektor $\mathbf{v}'$ má jinou velikost, vychází z příslušné plošky $d\mathbf{p}'$ jiný počet vektorových křivek; musíme si tedy mysliti, že křivky vektorové mohou zanikati a vznikati. Přechodem od bodu M k M' jistý počet křivek $\left\{\begin{matrix}\text{zaniká}\\ \text{vzniká}\end{matrix}\right\}$, jestliže vektor $\mathbf{v}'$ má $\left\{\begin{matrix}\text{menší}\\ \text{větší}\end{matrix}\right\}$ velikost než $\mathbf{v}$.

Takovým způsobem představeno jest pole vektorové křivkami, jež svým tvarem a hustším nebo řidším seskupením stanoví běh a velikost vektoru v každém bodě pole.

Často znázorňujeme pole vektorové ještě jinak, užijeme-li totiž obdoby hydrodynamické. Mysleme si pole vyplněné jakousi fiktivní tekutinou, jež nemusí míti nutně vlastnosti kapalin a plynů, jak je známe z mechaniky. Tato tekutina pohybuje se tak, že rychlost každé částice její určena jest vektorem bodu pole, v němž se částice právě nalézá.

Rychlostí proudící kapaliny jest však stanoveno množství kapaliny, jež protéká v jednotce času jednotkou průřezu. Abychom tedy mohli znázorniti obecné pole vektorové, musí toto množství pro jednotkový průřez v každém bodě býti různé. Toho lze docíliti dvojím způsobem. Buď předpokládáme, že fiktivní tekutina jest libovolně stlačitelná nebo roztažitelná, čímž můžeme docíliti, že hustota její jest od bodu k bodu (nepřetržitě) proměnlivá. I lze si představiti, že stupeň tohoto zhuštění nebo zředění jest takový, aby jednotkou průřezu v každém bodě pole protékalo množství tekutiny, jež jest dáno velikostí příslušného vektoru.

Anebo můžeme míti za to, že zavedená fiktivní tekutina jest nestlačitelná; pak si představujeme, že jsou v poli vektorovém místa, v nichž myšlená tekutina vzniká, a opět jiná místa, v nichž zaniká. Ona místa jmenujeme *zdroji*, tato *zániky*. Ve zdrojích se tekutina jaksi stále znova tvoří, v zánicích se ustavičně zničuje.

Pro proud kapaliny jest význačnou veličinou intensita proudění; obdobně definujeme *tok vektorový* jakoukoli nekonečně malou plochou jako skalární součin z vektoru $d\mathbf{p}$, který představuje tuto plochu, a z vektoru $\mathbf{v}$, který středem jejím prochází. Je-li dána libovolná omezená plocha P (konečné velikosti), nazýváme vektorovým tokem touto plochou skalární integrál

$$\int_{\mathrm{P}} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p}.$$

Plocha P může ve zvláštním případě úplně uzavírati část prostoru (jednoduše souvisícího); pak tento skalární integrál stanoví *výtok vektorový* povrchem P.

Dáme-li zavedené myšlené tekutině prouditi velmi tenkou trubicí vektorovou, jejíž neskonale krátkou část můžeme míti za válec, mluvíme o vektorovém toku libovolným šikmým průřezem $d\mathbf{p}$ trubice; dle definice skalárního součinu (vzorec (2)) jest tento tok dán algebraickým součinem z plochy dq *kolmého* průřezu trubice, učiněného středem průřezu dp, a z velikosti v vektoru **v**, týmž středem procházejícího.

Vektorový tok trubicí jest obecně veličina, která se mění od průřezu k průřezu, ve zvláštním případě může však veličina ta býti stálou v celé trubici. Pak pravíme, že proud tekutiny jest ustálený; takový proud nastane, jestliže velikost v vektoru **v** jest nepřímo úměrna ploše příslušného kolmého průřezu trubice.

Vektorová trubice stává se v případě tom *vláknem proudovým*, pro něž součin $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}$ jest číslem stálým, nechť jest $d\mathbf{p}$ kterýkoli šikmý průřez trubice.

Pole vektorové, v němž probíhají vesměs vlákna proudová, zove se *polem solenoidálním*, někdy také *polem beze zdrojů*. Může také jen část pole býti solenoidální; ostatní část jeho mohou pak vyplňovati obecné trubice vektorové.

V poli, jež jest zcela solenoidální, vlákna proudová nemohou býti ukončena; neboť má-li tok vektorový v takové trubici míti hodnotu stálou (od nully rozdílnou), nemůže býti $d\mathbf{p}$ rovno nulle. Tudíž vlákna ta musí býti buď uzavřené trubice tvaru prstencovitého anebo musí probíhati ve všech směrech do nekonečna.

Ještě jiný zvláštní druh polí vektorových budiž na tomto místě uveden; jest to *pole lineární.*

Pojednávajíce o skalárním součinu dyadického trojčlenu $\mathbf{il} + \mathbf{jm} + \mathbf{kn}$ a vektoru **r**, vytkli jsme, že dle vzorce (21^a), totiž

$$(\mathbf{il} + \mathbf{jm} + \mathbf{kn}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{i}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{j}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{k}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}),$$

dyadický trojčlen proměňuje libovolný vektor **r** v jiný vektor **v** v prostoru, pro který nalezneme snadno analytický výraz. Kladouce totiž

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

dále

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k}, \\ \mathbf{m} &= a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k}, \\ \mathbf{n} &= a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}, \end{aligned}$$

obdržíme dle rovnice (6)

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

pročež

$$\mathbf{v} = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\,\mathbf{i} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\,\mathbf{j} + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)\,\mathbf{k}.$$

Píšeme-li kratčeji

$$\mathbf{v} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}, \qquad (56^a)$$

jest

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \qquad (56^b)$$

Souvisí-li skalární části x', y', z' tří složek vektoru $\mathbf{v}$ se skalárními částmi x, y, z složek vektoru $\mathbf{r}$ lineárními rovnicemi (56^b), pravíme, že vektor $\mathbf{v}$ jest *lineární funkcí vektoru* $\mathbf{r}$. V geometrii jest tato souvislost známa pode jménem lineární homogenní transformace; v mechanice určují rovnice ty *stejnorodou deformaci* útvaru hmotného. Lze totiž snadno dokázati, že po změně naznačené rovnicemi (56^b) přímky útvaru původního zůstávají přímkami, roviny rovinami, každý rovnoběžník zůstane rovnoběžníkem, což jsou známky deformace stejnorodé.

Souhrn vektorů $\mathbf{v}$, odvozených z proměnného vektoru $\mathbf{r}$ rovnicemi (56), v nichž a_{11}, a_{12}, a_{13} atd. jsou stálé veličiny, tvoří pak lineární pole vektorové.

V případě uvedeném užito bylo dyadického trojčlenu jako praefaktoru; klademe-li dyadický trojčlen jako postfaktor, obdržíme z každého vektoru $\mathbf{r}$ jiný vektor $\mathbf{v}_c = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k}$, kde

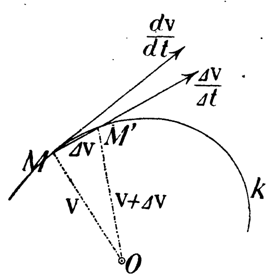
$$\begin{aligned} x'' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ y'' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ z'' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Souhrn všech těchto vektorů tvoří lineární pole, jež jest *sdruženým* s polem uvedených vektorů $\mathbf{v}$.

Mezi lineárními poli vektorovými má zvláštní důležitost pole *homogenní*; v něm rozdíl hodnot $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}_0$ vektorů v koncovém a v počátečním bodu libovolné úsečky $\mathbf{r}$ nezávisí na poloze jejího počátku, nýbrž jenom na její délce a na jejím běhu.

Přecházejíce nyní k **počtu differenciálnímu**, vztahujícímu se k poli vektorovému, vysvětlíme nejprve základní pojmy differenciálního poměru vektoru dle skaláru a differenciálního poměru vektoru dle vektoru.

První z těchto pojmů znázorníme takto: Budiž vektor **v** funkcí skaláru t; mění-li se nepřetržitě nezávisle proměnná t, mění se také nepřetržitě vektor **v**. Abychom měli náležitý přehled těchto změn, umístíme všechny polohy vektorů **v** tak, aby měly společný počátek O (obr. 13.); pak bude místem kon-



Obr. 13.

cových bodů jejich $M, M' \ldots$ jakási křivka prostorová k. Změní-li se t o velmi malé $\triangle t$, změní se příslušný vektor **v** o velmi malý vektor MM', který můžeme nazvati $\triangle$ **v**; vektor ten jest tětivou křivky k. Poměr $\frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle t}$ jest pak vektor téhož běhu jako $\triangle$ **v**, ale $\frac{1}{\triangle t}$ kráte větší.

Přejdeme-li nyní k mezím, učiníme-li totiž $\lim \triangle t = 0$, přibližuje se bod M' neskonale k bodu M; sečna MM' stane se tečnou křivky k, jíž určen jest běh differenciálního poměru $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, který jest mezí poměru $\frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle t}$.

Differenciální poměr vektoru **v** *dle skaláru* t jest tedy vektor, jenž má běh tečny ku křivce k v bodě M a jehož velikost rovná se $\frac{dv}{dt}$, značí-li v velikost vektoru **v**. Směr tečny souhlasí se směrem, jímž se pohybuje koncový bod vektoru, vytvořuje-li křivku k.

Píšeme-li

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z,$$

obdržíme

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{v}_x}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_y}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_z}{dt}. \qquad (57)$$

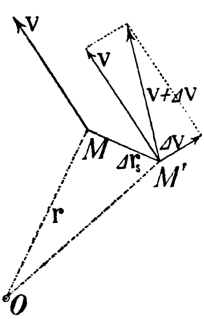
Poněvadž $\mathbf{v}$ jest funkcí souřadnic x, y, z bodu M v soustavě, jejímž počátkem jest O, platí též vzorec

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (58)$$

Differencujíce výrazy vektorové dle skaláru užíváme týchž pravidel jako pro differenciaci skalárních výrazů dle skaláru; jenom při differenciaci vektoriálních součinů jest třeba dbáti náležitého pořádku činitelů. Tedy na pravé straně rovnice

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

nelze psáti v druhém součinu $\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{a}$, leda bychom proměnili znaménko tohoto součinu v protivné.



Obr. 14.

Složitější jest pojem differenciálního poměru vektoru dle jiného vektoru. Přejdeme-li v poli vektorovém od bodu M (obr. 14.), daného průvodičem $OM = \mathbf{r}$, ve směru vektoru $\mathbf{s}$ k bodu M', vzdáleném od M o $\Delta\mathbf{r}_s$, změní se vektor $\mathbf{v}$ v jiný $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$. Utvořme dyadický podíl $\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta\mathbf{r}_s}$; přejdeme-li k mezím kladouce *lim* $\triangle \mathbf{r}_s = 0$, *lim* $\triangle \mathbf{v} = 0$, bude *lim* poměru $\frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle \mathbf{r}_s}$ *differenciálním poměrem vektoru* **v** *dle vektoru* **r** *ve směru* **s**. Označujeme jej podobně jako differenciální poměr skaláru dle vektoru **r** ve směru **s** znaménkem částečných differenciálních poměrů, píšíce

$$lim \frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle \mathbf{r}_s} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s}.$$

Je-li $\triangle s$ skalární částí velmi malého vektoru $\triangle \mathbf{r}_s$, můžeme psáti $\triangle \mathbf{r}_s = (\triangle s)\, \mathbf{s}_1$, tudíž

$$\frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle \mathbf{r}_s} = \frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle s} \frac{1}{\mathbf{s}_1} = \frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle s} \mathbf{s}_1$$

vzhledem k (23^b); přejdeme-li k limitám, obdržíme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s} = \frac{d\mathbf{v}}{ds} \mathbf{s}_1, \qquad (59^a)$$

obdobnou to rovnici ku (27^a) v poli skalárním.

Poznáváme tudíž, že differenciální poměr vektoru **v** dle jiného vektoru **r** ve směru **s** jest dyadou, jejímž prvním činitelem jest differenciální poměr vektoru **v** dle skalární části s daného vektoru **s** a druhým činitelem jednotkový vektor $\mathbf{s}_1$.

Postupujeme-li od bodu M vektorového pole ve směru průvodiče **r**, označíme příslušný differenciální poměr vektoru **v** kratčeji $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}$; pro tento poměr obdržíme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}}{dr} \mathbf{r}_1. \qquad (59^b)$$

Konečně differenciální poměry vektoru **v** ve směrech os souřadných mají hodnoty

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \mathbf{i}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \mathbf{k}. \qquad (59^c)$$

Položme

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k};$$

poněvadž dle (57)

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{dv_x}{ds} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{ds} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{ds} \mathbf{k},$$

obdržíme ze vzorce (59[a])

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r_s}} = \left(\frac{dv_x}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dv_y}{ds}\,\mathbf{j} + \frac{dv_z}{ds}\,\mathbf{k}\right)\mathbf{s}_1. \tag{ϑ}$$

Roznásobíce na pravé straně obdržíme trojčlen, jehož první člen jest $\frac{dv_x}{ds}\mathbf{i}\mathbf{s}_1$, místo čehož lze psáti $\mathbf{i}\,\frac{dv_x}{ds}\,\mathbf{s}_1$; avšak dle (27[a])

$$\frac{dv_x}{ds}\,\mathbf{s}_1 = \frac{\partial v_x}{\partial \mathbf{r_s}},$$

pročež

$$\frac{dv_x}{ds}\,\mathbf{i}\,\mathbf{s}_1 = \mathbf{i}\,\frac{\partial v_x}{\partial \mathbf{r_s}}$$

a podobně vyjádříme oba ostatní členy pravé strany rovnice (ϑ). I obdržíme pro differenciální poměr vektoru $\mathbf{v}$ dle vektoru $\mathbf{r}$ ve směru $\mathbf{s}$ výraz

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r_s}} = \mathbf{i}\,\frac{\partial v_x}{\partial \mathbf{r_s}} + \mathbf{j}\,\frac{\partial v_y}{\partial \mathbf{r_s}} + \mathbf{k}\,\frac{\partial v_z}{\partial \mathbf{r_s}}. \tag{60}$$

Poznamenati sluší, že ani v této formě není ovšem $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r_s}}$ trojčlenem dyadickým, nýbrž jednoduchou dyadou; majíť sčítanci na pravé straně této rovnice stejný jmenovatel.

Vzorec (60) lze ještě takto přetvořiti: Dle (33) jest

$$\frac{\partial v_x}{\partial \mathbf{r_s}} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r_s}} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mathbf{r_s}} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{r_s}}$$

a podobné rovnice lze psáti pro $\frac{\partial v_y}{\partial \mathbf{r_s}}$, $\frac{\partial v_z}{\partial \mathbf{r_s}}$. Vložíce tyto hodnoty do (60) obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r_s}} = {} & \mathbf{i}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r_s}} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mathbf{r_s}} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{r_s}}\right)\\ & + \mathbf{j}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r_s}} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mathbf{r_s}} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{r_s}}\right)\\ & + \mathbf{k}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r_s}} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mathbf{r_s}} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{r_s}}\right).\end{aligned}$$

Sečteme-li na pravé straně členy v sloupcích stojící, dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s}=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathbf{j}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathbf{k}\right)\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}_s}$$
$$+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathbf{i}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\mathbf{k}\right)\frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}_s}$$
$$+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathbf{i}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\mathbf{j}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\mathbf{k}\right)\frac{\partial z}{\partial \mathbf{r}_s}.$$

Výrazy v závorkách jsou však

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathbf{j}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathbf{k}=\frac{\partial(v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k})}{\partial x}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}$$

atd.; pročež

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}_s}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}_s}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{r}_s}; \tag{61}$$

obdobný vzorec v poli skalárním jest vzorec (33).

Jelikož dle (27^a) a (4)

$$\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}_s}=\frac{dx}{ds}\mathbf{s}_1=(\mathbf{i}\,.\,\mathbf{s}_1)\mathbf{s}_1,\quad \frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}_s}=(\mathbf{j}\,.\,\mathbf{s}_1)\mathbf{s}_1,\quad \frac{\partial z}{\partial \mathbf{r}_s}=(\mathbf{k}\,.\,\mathbf{s}_1)\mathbf{s}_1,$$

jest dále

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s}=\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(\mathbf{i}\,.\,\mathbf{s}_1)+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(\mathbf{j}\,.\,\mathbf{s}_1)+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}(\mathbf{k}\,.\,\mathbf{s}_1)\right)\mathbf{s}_1$$
$$=\left(\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\mathbf{i}\right)\cdot\mathbf{s}_1+\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\mathbf{j}\right)\cdot\mathbf{s}_1+\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{s}_1\right)\mathbf{s}_1$$
$$=\left(\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{s}_1\right)\mathbf{s}_1; \tag{62^a}$$

výraz ve větších závorkách jest dle (21^a) vektorem, tudíž pravá strana opět dyadou.

Jako jsme ve stati o poli skalárním zavedli za součet tří vektorů $\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}$ Hamiltonův symbol ∇v, tak i nyní v poli vektorovém za trojčlen dyadický (úplnou dyadu, dyadic), vyskytující se v menších závorkách poslední rovnice, můžeme psáti $\nabla\,\mathbf{v}$. Klademe tedy

$$\nabla\,\mathbf{v}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial \mathbf{v}}{dy}\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{63^a}$$

Lze však tento trojčlen míti také (dle Fischera) za *úplný* differenciální poměr vektoru $\mathbf{v}$ dle $\mathbf{r}$, tudíž užíváme též označení

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\mathbf{k}=\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}; \qquad (63^b)$$

k tomu jsme oprávněni tím spíše, že $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ jest differenciálním poměrem analogickým k poměru $\frac{dv}{d\mathbf{r}}$, který jsme zavedli v poli skalárním. Jest tedy

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}=d\mathbf{v}\frac{1}{d\mathbf{r}}=\nabla\,\mathbf{v}. \qquad (64)$$

Kladouce $\mathbf{r}=\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$, kde $\mathbf{x}=x\mathbf{i}$ atd., píšeme též

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}}; \qquad (63^c)$$

obdobná rovnice v poli skalárním jest

$$\frac{dv}{d\mathbf{r}}=\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}}+\frac{\partial r}{\partial \mathbf{z}}. \qquad (36)$$

Tím jest jednak formálně odůvodněno označení částečných differenciálních poměrů ve smyslu vyloženém, jednak zřejmě vytčena jest shoda mezi úplným differenciálním poměrem pro pole skalární a týmž poměrem pro pole vektorové.

K differenciálnímu poměru $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ náleží hodnota sdružená $\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_C=\frac{1}{d\mathbf{r}}\,d\mathbf{v}$, pro niž obdržíme výraz

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_C=\nabla_C\,\mathbf{v}=\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}.\text{*)} \qquad (65)$$

---

*) Ve mnohých spisech jednajících o vektorové analysi, jako jsou Wilson-Gibbs: »Vector Analysis«, Föppl: »Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität«, I. i II. vyd., Bucherer: »Elemente der Vektor-Analysis« definováno jest $\nabla\,\mathbf{v}$ výrazem

$$\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z};$$

pročež autorům těchto spisů jest $\nabla\,\mathbf{v}$ totéž, co nám $\nabla_C\,\mathbf{v}$. Odtud pochodí, že některé formule u nich nesrovnávají se úplně s příslušnými vzorci tohoto pojednání, což tuto výslovně budiž připomenuto.

Násobíce druhou a třetí stranu rovnice (64) skalárně $d\mathbf{r}$, nabudeme

$$\left(d\mathbf{v}\frac{1}{d\mathbf{r}}\right) . d\mathbf{r} = \nabla \mathbf{v} . d\mathbf{r};$$

ale dle (20[a])

$$\left(d\mathbf{v}\frac{1}{d\mathbf{r}}\right) . d\mathbf{r} = d\mathbf{v}\left(\frac{1}{d\mathbf{r}} . d\mathbf{r}\right) = d\mathbf{v},$$

poněvadž $\frac{1}{d\mathbf{r}} . d\mathbf{r} = 1$. Tudíž

$$d\mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} . d\mathbf{r}; \tag{66}$$

obdobná rovnice v poli skalárním byla

$$dv = \nabla v . d\mathbf{r}. \tag{35}$$

Zavedše takto nové výrazy $\nabla \mathbf{v}$ anebo $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, můžeme rovnici (62[a]) psáti buď

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s} = (\nabla \mathbf{v} . \mathbf{s}_1)\, \mathbf{s}_1 \tag{62^b}$$

anebo

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} . \mathbf{s}_1\right)\mathbf{s}_1 \tag{62^c}$$

Úplný differenciální poměr vektoru $\mathbf{v}$ dle $\mathbf{r}$, který jest jak praveno trojčlenem dyadickým, lze ještě jinak vyjádřiti; vložíme-li totiž do rovnice (63[b]) za $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$ hodnoty plynoucí ze vzorce (57), totiž

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathbf{k} \text{ atd.},$$

obdržíme

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\mathbf{k}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathbf{k}\right)\mathbf{j}$$
$$+ \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathbf{k}\right)\mathbf{k}. \tag{ι}$$

Urovnáme-li jinak členy na pravé straně této rovnice, vyjde

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$
$$+ \mathbf{k}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathbf{k}\right);$$

jelikož dle rovnice (36)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{d v_x}{d\mathbf{r}} \text{ atd.},$$

jest

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \mathbf{i}\frac{d v_x}{d\mathbf{r}} + \mathbf{j}\frac{d v_y}{d\mathbf{r}} + \mathbf{k}\frac{d v_z}{d\mathbf{r}}. \tag{67a}$$

Rovnici tu lze také psáti ve tvaru

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{i}\,\nabla v_x + \mathbf{j}\,\nabla v_y + \mathbf{k}\,\nabla v_z. \tag{67b}$$

Pro sdruženou hodnotu úplného differenciálního poměru vektoru $\mathbf{v}$ dle $\mathbf{r}$ dostaneme podobně

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_C = \frac{d v_x}{d\mathbf{r}}\mathbf{i} + \frac{d v_y}{d\mathbf{r}}\mathbf{j} + \frac{d v_z}{d\mathbf{r}}\mathbf{k}. \tag{67c}$$

Označíme-li jako výše složky vektoru $\mathbf{v}$ ve směrech os souřadných po řadě $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_y$, $\mathbf{v}_z$, bude $\mathbf{v}_x = v_x\mathbf{i}$, $\mathbf{v}_y = v_y\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_z = v_z\mathbf{k}$; tudíž $\mathbf{i}\frac{d v_x}{d\mathbf{r}} = d(v_x\mathbf{i})\frac{1}{d\mathbf{r}} = d\mathbf{v}_x\frac{1}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}_x}{d\mathbf{r}}$ atd. Z toho plyne dle (67^a^)

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}_x}{d\mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{v}_y}{d\mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{v}_z}{d\mathbf{r}}; \tag{68a}$$

kdežto dle (67^c^)

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_C = \left(\frac{d\mathbf{v}_x}{d\mathbf{r}}\right)_C + \left(\frac{d\mathbf{v}_y}{d\mathbf{r}}\right)_C + \left(\frac{d\mathbf{v}_z}{d\mathbf{r}}\right)_C. \tag{68b}$$

Roznásobíce na pravé straně rovnice (ι) nabudeme pro úplný differenciální poměr vektoru nonion (viz vz. (13^a^) a (13^b^))

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = {} & \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{ii} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathbf{ij} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathbf{ik} \\ & + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathbf{ji} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathbf{jj} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathbf{jk} \\ & + \frac{\partial v_z}{\partial x}\mathbf{ki} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathbf{kj} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathbf{kk}\end{aligned} \tag{69a}$$

anebo kratčeji

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \begin{matrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \frac{\partial v_x}{\partial y}, & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}, & \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{dx}, & \frac{\partial v_z}{\partial y}, & \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{matrix} \tag{69b}$$

v podobném tvaru napíšeme také snadno sdruženou hodnotu tohoto úplného differenciálního poměru. (Pokrač.)

Poznámka ku sestrojování racionálních čar.

Dr. Ant. Pleskot, professor v Plzni.

Budiž dána racionální čára n-tého stupně

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

s $(n-1)$ násobným bodem o; každá přímka l bodem tímto vedena protne čáru tu jen v dálším jediném bodě a, jehož odlehlost od bodu o budiž r.

Označíme-li souřadnice bodu o, x_0, y_0, kosinusy směrné přímky l s osami X a Y, α a β, pak k určení vzdálenosti r máme rovnici:

$$\begin{aligned} 0 = f(x_0 + \alpha r, y_0 + \beta r) &= f(x_0, y_0) + r\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_{x_0, y_0} \\ &+ \frac{r^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^2_{x_0, y_0} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^{n-1}_{x_0, y_0} \\ &+ \frac{r^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^n_{x_0, y_0}. \end{aligned}$$

Poněvadž bod x_0, y_0 jest bodem $(n-1)$ násobným, platí podmínky:

$$f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_{x_0, y_0} = \ldots = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)^{n-2}_{x_0, y_0} = 0,$$