Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Langr

O součtu čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů daného mnohoúhelníka. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 2, 196--199

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122710

9. Jest nalézti differenciálný kvocient výrazu

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x).$$

Počítáme:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x) + \ldots + f_n(x+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$\frac{-[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]}{\Delta x},$$

t. j.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \ldots$$

čili

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx} + \ldots + \frac{df_n(x)}{dx},$$

t. j.: differenciálný kvocient součtu funkcí je roven součtu differenciálných kvocientů jednotlivých funkcí. (Dokončení.)

O součtu čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů daného mnohoúhelníka.

Píše ing. **Jos. Langr.**

(Dokončení.)

III.

Volme nyní zvláštní případ obou mnohoúhelníků. Prvý z nich budiž dán a druhý odvoďme následujícím způsobem. Strany daného mnohoúhelníka rozdělme pořadem v poměru λ (smysl rotace zachován), a v dělících bodech vztyčme kolmice ke stranám a nanesme na ně úsečky jsoucí s příslušnými stranami v poměru $\varkappa$. Tímto způsobem obdržíme nové vrcholy, jež *určují mnohoúhelník, mající s původním arithmetický střed společný.*

Důkaz této věty byl podán v našem článku „Příspěvek k mnohoúhelníkům“ v XXVII. roč. tohoto časopisu.

Součet čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů prvého mnohoúhelníka jest

$$V = \frac{K}{n} + nr^2$$

a od vrcholů odvozeného mnohoúhelníka

$$V_1 = \frac{K_1}{n} + nr^2.$$

Rozdíl obnáší

$$V_1 - V = \frac{1}{n}(K_1 - K). \tag{7}$$

Vidno tedy, že rozdíl $V_1 - V$ při témže daném i odvozeném mnohoúhelníku pro jakýkoliv bod je konstantní.

Mění-li se odvozený mnohoúhelník tak, že K_1 při tom zůstává totéž, zůstává i $V_1 - V$ beze změny.

Studujme okolnosti, za jakých odvozený mnohoúhelník při různých x, λ podržuje totéž K_1.

Za tím účelem dosaďme na pravé straně rovnice (7) hodnoty plynoucí z formule (2). Tím nabýváme tvaru

$$V_1 - V = \sum_{k=1}^{k=n}(x_{1k}^2 + y_{1k}^2) - \sum_{k=1}^{k=n}(x_k^2 + y_k^2). \tag{8}$$

Souřadnice obou mnohoúhelníků souvisí pak, jak v prve citovaném článku bylo ukázáno, následovně:

$$x_{1k} = \frac{x_{k+1}\lambda - x_k}{\lambda - 1} + (y_{k+1} - y_k)\,x,$$

$$y_{1k} = \frac{y_{k+1}\lambda - y_k}{\lambda - 1} - (x_{k+1} - x_k)\,x.$$

Dosazením jich do rov. (8) a náležitou úpravou dosáhneme rovnice

$$V_1 - V = \left(\frac{\lambda}{(\lambda - 1)^2} + x^2\right)A + 4xP = \frac{1}{n}(K_1 - K), \tag{9}$$

kdež značí A součet čtverečných stran a P plošný obsah původního mnohoúhelníka.

Vidno tedy, že vrcholy odvozeného mnohoúhelníka o určitém K_1 musí býti odvozeny dle poměrů λ, x hovících podmínce (9). Z této podmínky vyplývá zároveň, že odvozených mnohoúhelníků o určitém K_1 je nekonečně mnoho a že jich vrcholy nad jednotlivými stranami daného mnohoúhelníka sestrojované vyplňují nad každou ze zmíněných stran jakési místo geometrické. Toto místo geometrické chceme určiti.

Za tím účelem mysleme si libovolnou stranu a daného mnohoúhelníka jako osu X a počátek os souřadných ve středu strany. Nad touto stranou sestrojme dle poměrů λ, $\varkappa$ libovolný bod jakožto vrchol odvozeného mnohoúhelníka. Jeho souřadnice jsou

$$x = \frac{a}{2}\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \quad y = \varkappa a,$$

a obráceně

$$\lambda = \frac{2x + a}{2x - a} \text{ a } \varkappa = \frac{y}{a}.$$

Dosazením těchto hodnot do rov. (9) a náležitou úpravou podává se nám rovnice kruhové čáry

$$x^2 + \left(y + 2a\frac{P}{A}\right)^2 = a^2\left[4\frac{P^2}{A^2} + \frac{K_1 - K}{nA} + \frac{1}{4}\right]. \tag{10}$$

Pohybují se tedy vrcholy odvozeného mnohoúhelníka o určitém K_1 po kružnicích sestrojených nad jednotlivými stranami daného mnohoúhelníka. Středy těchto kružnic nalézají se na přímkách kolmo půlících dotyčné strany, ve vzdálenostech $a \,.\, \frac{2P}{A}$ od stran (na vnitřní stranu mnohohelníka). Poloměr jich jest

$$\varrho_1 = a\sqrt{4\frac{P^2}{A^2} + \frac{K_1 - K}{nA} + \frac{1}{4}}.$$

Kdežto střed kružnic má polohu od K_1 úplného nezávislou, mění se poloměr ϱ_1 s veličinou K_1. Tímto způsobem vzniká při různých K_1 nad každou stranou původního mnohoúhelníka soustava soustředných kružnic.

Ve zvláštním případě, kdy $K_1 = K$, jest

$$\varrho = a\sqrt{4\frac{P^2}{A^2} + \frac{1}{4}},$$

t. j. kružnice sestrojená nad stranou a prochází oběma jejími koncovými body (vrcholy).

V tomto případě jsou tedy součty čtverečných vzdáleností libovolného bodu od původního i odvozeného mnohoúhelníka stejné neboť $K_1 = K$.

V případě, kdy $\varrho = 0$, jest

$$K_1 = K - \frac{n(A^2 + 16P^2)}{4A}.$$

Případ takový jest pouze jeden, neboť kružnice smrskují se na své středy. Pro součet čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů tohoto zvláštního odvozeného mnohoúhelníka obdržíme

$$V_1 = \frac{K}{n} - \frac{A^2 + 16P^2}{4A} + nr^2,$$

a tedy

$$V - V_1 = \frac{A^2 + 16P^2}{4A}.$$

Poněvadž všecky, zde uvedeným způsobem odvozované mnohoúhelníky mají s původním arithmetický střed společný, jest $\varrho = 0$ a formule (6) nabývá tvaru

$$K' = K + K_1.$$

Věty, v tomto článku obecně pro mnohoúhelník vyvozené, byvše applikovány na trojúhelník, podávají velmi zajímavé výsledky, jež si interesující se čtenář snadno vyvoditi může.

Příspěvek ke stanovení vrženého stínu plochy kulové na průmětny při osvětlení geometrálním.

Podává **Václav Hübner**, professor na Král. Vinohradech.

Jak známo, jest vržený stín plochy kulové na průmětnu ellipsa — vržený to stín hlavní kružnice, jejíž rovina stojí na směru paprsku S kolmo. Poloosy ellipsy jsou: hlavní $a = \dfrac{r}{\sin\alpha\,(\beta)}$ a vedlejší $b = r$, značí-li r poloměr plochy kulové a úhel $\alpha\,(\beta)$ odchylku paprsku od příslušné průmětny. Je-li směr paprsků S: $\sphericalangle\, S_1X_1 = \gamma$, $\sphericalangle\, S_2X_2 = \delta$, jest (obr. 1.)

$$z = d_1\, tg\,\alpha, \quad y = d_1 \sin\gamma \quad \text{a}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{tg\,\alpha}{\sin\gamma}.$$