Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Nové poučky o determinantech

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 4, 203--206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122698

Sestrojíme-li v trojúhelníku ABC*), v němž slují strany a, b, c, úhly α, β, γ, přímku $CE \perp AB$ a je-li $AE = m$, $EB = n$, tedy $c = m + n$, platí

$$b : (m + n) = \sin\beta : \sin\gamma,$$

z čehož jde, jelikož tu

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta),$$

$$b \sin(\alpha + \beta) = (m + n) \sin\beta$$

$$= (a \cos\beta + b \cos\alpha) \sin\beta$$

neb

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta,$$

jelikož

$$a \sin\beta = b \sin\alpha.$$

Je-li β úhel tupý, vede se důkaz podobně.

Použijeme-li pak vzorců

$$\cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \sin^2(\alpha + \beta)$$

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha,$$

obdržíme, sečteme-li na obou stranách a odmocníme-li, použivše předešlého vzorce,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

co druhý vzorec základní. **)

Nové poučky o determinantech.

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

Jak známo, nemění se hodnota determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

odečteme-li prvky některé řady od příslušných prvků řady souběžné.

Odečteme-li tedy od prvků druhého, třetího, . . ., $n$tého sloupce prvky sloupce prvního, druhého, . . ., $(n-1)$ho, obdržíme, značí-li všeobecně

---

*) Výkres nechť si laskavý čtenář sám sestrojí.

**) Srovnej *Grunerts Archiv für Math. u. Physik.* XXI. Theil, pag. 237,

$$\Delta a_{p,q} = a_{p,q+1} - a_{p,q},$$

místo determinantu (1).

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \Delta a_{1,1}, \ldots, \Delta a_{1,n-1} \\ a_{2,1}, \Delta a_{2,1}, \ldots, \Delta a_{2,n-1} \\ \vdots \\ a_{n,1}, \Delta a_{n,1}, \ldots, \Delta a_{n,n-1} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Odečteme-li i tu od prvků třetího, čtvrtého, . . . , $n$tého sloupce prvky sloupce druhého, třetího, . . . , $(n-1)$ho, obdržíme podobně, značí-li

$$\Delta^2 a_{p,q} = \Delta a_{p,q+1} - \Delta a_{p,q},$$

místo determinantu (2)

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \Delta a_{1,1}, \Delta^2 a_{1,1}, \ldots, \Delta^2 a_{1,n-2} \\ a_{2,1}, \Delta a_{2,1}, \Delta^2 a_{2,1}, \ldots, \Delta^2 a_{2,n-2} \\ \vdots \\ a_{n,1}, \Delta a_{n,1}, \Delta^2 a_{n,1}, \ldots, \Delta^2 a_{n,n-2} \end{vmatrix}.$$

Pokračujeme-li takto dále, vždy pozdějšími sloupci počínajíce, obdržíme konečně

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \Delta a_{1,1}, \ldots, \Delta^{n-1} a_{1,1} \\ a_{2,1}, \Delta a_{2,1}, \ldots, \Delta^{n-1} a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1}, \Delta a_{n,1}, \ldots, \Delta^{n-1} a_{n,1} \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

kdež platí všeobecně

$$\Delta^{k+1} a_{p,q} = \Delta^k a_{p,q+1} - \Delta^k a_{p,q}.$$

Provedeme-li pak tutéž řadu proměn s prvky jednotlivých řádků determinantu (3) a zavedeme-li podobné označení

$$\delta a_{p,q} = a_{p+1,q} - a_{p,q}$$

a všeobecně

$$\delta^{k+1} = \delta^k a_{p+1,q} - \delta^k a_{p,q},$$

zjednáme si nový vzorec

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \Delta a_{1,1}, \ldots\ldots\ldots, \Delta^{n-1} a_{1,1} \\ \delta a_{1,1}, \delta\Delta a_{1,1}, \ldots\ldots, \delta\Delta^{n-1} a_{1,1} \\ \vdots \\ \delta^{n-1} a_{1,1}, \delta^{n-1}\Delta a_{1,1}, \ldots, \delta^{n-1}\Delta^{n-1} a_{1,1} \end{vmatrix},$$

kterýž vyjadřuje velmi důležitou vlastnost determinantů, jelikož z ní možná vyvésti některé zajímavé poučky.

Jest-li determinant (1) *přesouměrný* *), platí-li tedy o jeho prvcích

$$a_{p,q} = a_{q,p} = a_{r,r} \text{ pro } 2r = p + q,$$

promění se symbol δ v Δ aneb naopak a ze vzorce (4) povstane jednodušší

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \Delta a_{1,1}, \ldots\ldots\ldots, \Delta^{n-1} a_{1,1} \\ \Delta a_{1,1}, \Delta^2 a_{1,1}, \ldots\ldots\ldots, \Delta^n a_{1,1} \\ \vdots \\ \Delta^{n-1} a_{1,1}, \Delta^n a_{1,1}, \ldots, \Delta^{2n-2} a_{1,1} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

jejž *Hankel* ponejprv uveřejnil. **)

Ze vzorce (4) možná velmi snadno vyvésti tuto poučku:

Představují-li prvky jednotlivých řádků neb sloupců arithmetické řady nanejvýš stupně (n—2)ho, jest $D = 0$; neb v prvním případě jest

$$\Delta^{n-1} a_{1,1} = 0,$$

v druhém pak za toutéž příčinou

$$\delta^{n-1} a_{1,1} = 0,$$

v obou případech jsou tedy prvky celé řady 0 a tudíž i hodnota determinantu 0.

Při řešení lineárních rovnic možná si často uspořiti mnoho počítání, má-li se k této poučce patřičný zřetel. Soustava rovnic na př.

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z \quad &= 2 \\ 3x + y + z + u &= 5 \\ 5x + 4y + z + 4u &= 7 \\ 8x + 8y + 2z + 9u &= 3 \end{aligned}$$

má determinant hodnoty 0, za kteroužto příčinou není třeba s řešením se dále zanášeti.

---

*) *Sylvester* nazývá jej *persymmetrický*, *Hankel orthosymmetrický*; jelikož tu jest více souměrnosti, nežli třeba, obdržel jmeno *přesouměrný*.

**) „Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten." Inaug. Diss. pag. 5.

Podobně obdržíme ze vzorce (5) poučku:

Představují-li prvky přesouměrného determinantu arithmetickou řadu stupně $(n-1)$*ho, jest* $D = \pm (\Delta^{n-1} a_{1,1})^n$; neb jelikož všecky vyšší v pravo od příčky stejných rozdílů stojící rozdíly jsou hodnoty 0, redukuje se hodnota determinantu na součin prvků této příčky. Podlé toho jest na př.

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & 6 \\ 3, & 6, & 11 \\ 6, & 11, & 18 \end{vmatrix} = -2^3.$$
