

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Emanuel Čubr

O měření země. [IV.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 4, 167--175

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122649>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1875

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O měření země.

Napsal

Emanuel Čubr.

(Pokračování.)

§. 29.

O triangulaci.

Na počátku 17. století udělil nizozemský učenec *Snellius* veškerému měřictví velikým svým vynálezem, *triangulací*, novou tvářnost. Kdežto dosud vzdálenosti měřeny vždy přímo, — práce to velmi namáhavá, zdoluhavá a nespolehlivá — spojeno nyní měření délek s měřením úhlů. Spojíme-li totiž body, jichž relativní poloha se má určití, přímkami, obdržíme síť trojúhelníků; měříme-li v této síti jedinou stranu a všechny úhly, možná pak pomocí trigonometrie vzdálenosti všech ostatních bodů mezi sebou počtem určití. Měřená vzdálenost sluje *základnou* celé triangulace. Poněvadž chyba v délce její na všechny počítané vzdálenosti se přenáší, jest při měření jejím veliké důkladnosti zapotřebí.

Vynález tento působil velmi blahodárně na vývin trigonometrie.

Pokud nepřesahuje rozsáhlost triangulace neb vzdálenost jednotlivých bodů jisté meze, mohou považovati se jednotlivé vzdálenosti co přímký; trojúhelníky jsou tu tedy rovinné a řešení jich přináležejí trigonometrii rovinné. Jakmile však jest rozsáhlost poněkud větší, musí se ohled brátí na křivý tvar země a dle toho, považujeme-li zemi co kouli aneb co sferoid, připadá úloha trigonometrii sférické aneb vyžaduje zcela zvláštní theorii, totiž trigonometrii sferoidickou, která teprv touto úlohou povstala.

Chceme-li řadu bodů na povrchu země k určení relativní jejich polohy spojití triangulační sítí a béréme-li při tom ohled na křivost země, bude jednou z nejprvnějších otázek, jak máme body mezi sebou spojití. Kdyby měl povrch země podobu koule, byla by otázka ihned rozhodnuta; spojili bychom totiž dvě bodů

vždy obloukem největšího kruhu jimi procházejícího. Tím obdrželi bychom síť trojúhelníků sférických. Běřeme-li však zřetel k tomu, že se blíží povrch země rotačnímu sferoidu, jehož výtvornou křivkou jest ellipsa osu otáčení za malou osu mající, pak není věc již tak jednoduchá. Ze stanoviska matematického musíme položití mezi body takovou čáru, která jest úplně určitou, jakmile známe polohy oněch bodů na ellipsoidu, tedy na povrchu země. Jedna z takových čar jest *čára nejkratší délky* mezi oběma body, a tato nazývána *čarou geodetickou*.

Chybnou definici o čáře geodetické podal *Tralles* ve svém pojednání ve spisech berlínské akademie; definuje ji totiž co průsečnici oné roviny s povrchem země, která proložena jest kolmicí jednoho z obou bodů a bodem druhým. Avšak poněvadž normály dvou bodů ellipsoidu neleží v tétož rovině, patrně, že definice tato k dvěma různým čarám vede, dle toho, položíme-li průsečnou rovinu normálou jednoho neb druhého bodu. Dvojsmyslnost taková však nesmí se zde připustiti.

Čára geodetická má tu vlastnost do sebe, že dva sousední prvky její se nalézají v rovině normálné; poněvadž pak normály dvou bodů ellipsoidu neleží — leda výminečně — v tétož rovině, jest čára geodetická křivkou dvojité křivosti.

Jsou-li A, B , obraz 12., dva body na povrchu země, Sx osa otáčení, SA a SB meridiány jmenovaných bodů; AA' jest normála bodu A , BB' normála bodu B ; body A' a B' jen tenkrát splynou dohromady, nalézají-li se body A a B na kruhu, jehož rovina kolmo stojí na Sx ; jinak liší se tím více od sebe, čím větší jest rozdíl mezi SA a SB . Budiž A a B řez roviny normálou bodu A a bodem B procházející, BbA pak řez roviny, kteráž proložena jest normálou bodu B a bodem A ; i dá se snadno dokázati, že geodetická čára AsB mezi oběma jest uzavřena.

Bessel určil rozdíl azimutů α a β řezu kolmého a čáry geodetické; z výpočtů jeho plyne, že pro nepříznivý případ $\beta = 45^\circ$ a $\sphericalangle SA'A = 45^\circ$, a kdyby se rovnala délka čáry geodetické jednomu stupni, obnášel by onen rozdíl $0\cdot017''$; ve skutečnosti jen málokdy dostoupí AB takové délky, obyčejně jen asi $\frac{1}{2}^\circ$, pak obnáší ona oprava azimutu $0\cdot004''$, pročež se k ní nikdy nepřihlíží. Ještě nepatrnější jest rozdíl délky geodetické

křivky vzhledem k délce jednoho z obou normálních řezů; obnášíť, když odpovídá AB 10° , při ostatně stejných podmínkách 0·00003 metrů; zanedbává se tedy ve všech případech.*)

Ještě promluveno budiž o poloze bodů triangulačních a jejich vzdálenosti. Se stanoviska theoretického bylo by ovšem nejvhodnější, kdyby měly body polohu takovou, že by trojúhelníky jimi určené byly pravidelné. Avšak podmínce této nikdy není možno zúplna vyhověti; neboť rozumí se samo sebou, že má podoba terénu veliký vliv. K triangulaci hodí se jen body, které vysokou svou polohou poskytují co možná velký rozhled; není však vždy snadno dostatečný počet takových bodů vyhledati. Úhly trojúhelníků triangulačních nesmí býti příliš malé, nemá-li vliv chyb při jich měření učiněných na vypočítané strany jisté meze přesahovati. V zásadách, jimiž se řídil *Baeyer* při velké triangulaci podél pobřeží moře *Baltického*, nalezá se mezi jinými také ta, že nemá úhel trojúhelníků hlavních nikdy méně než 30 stupňů obnáseti.**)

Vzdálenost bodů triangulačních měnila se dle prostředků, jakýmiž se označovaly. Právě v této věci učiněn vynálezem heliotropu značný pokrok. Při nynějších prostředcích obnáší vzdálenost 4 až i 15 mil.

§. 30.

O měření základny.

Měření základny náleží bez odporu k nejobtížnějším pracím při provedení velké triangulace, ať již slouží tato k účeli jakémukoli. Slouží-li měření stupňů, pak zajisté vyžaduje největší zevrubnosti; neboť má-li nové měření míti cenu, má-li chyby předešlých měření odhaliti a k poznání odchylek tvaru země od rotačního sferoidu vésti, musí provedeno býti s větší přesností než všechna předešlá měření; že pak přesnost triangulace hlavně na důkladnosti, s jakouž základna měřena, závisí, bylo již dříve naznačeno.

*) *Jordan* „Taschenbuch.“

***) *Baeyer* „Küstenvermessung.“

Především chci vytknouti obtíže, s jakými se setkáváme při měření nějaké vzdálenosti pomocí měřítek.

1. Základna bude tím zevrubněji měřena, s čím větší určitostí známa jest délka použitých měřítek. Měřítka porovnati se musí s původní mírou, ku které se celé měření vztahovati má; v tom však vězí dvě obtíže: předně není žádná původní míra úplně, totiž mathematicky určitá, za druhé pak nedá se zmíněné porovnání bez chyby provésti.

2. Měřítka nezůstane po celý čas měření stejné. Nejen že poškozením, kterému zúplna se vyhnouti není možná, délka jeho se mění, mají také změny teploty nepřetržitě měnění se délky za následek. První okolnost dá se opatrným zacházením aspoň v mezích velmi úzkých učiniti neškodnou; o velikosti vlivu jejího můžeme se přesvědčiti tím, že po vykonaném měření porovnáme měřítka opět s mírou původní, o které předpokládati můžeme či musíme, že v čase tom žádné škodlivé změny ne-utrpěla. Okolnost druhá však vyžaduje velmi svědomitého povšimnutí.

3. Měření základny děje se na povrchu země, kterýž jest vždy více méně nepravidelný. Měřítka v každé poloze bude míti jiný sklon k horizontu, pročež i tento musí se s velikou přesností určití.

4. Dle povahy měřítek, jsou-li totiž měřítka s koncovými čárkami (*etalon à trait*) aneb s koncovými plochami (*etalon à bout*), nutno, aby vždy začáteční čárka nové polohy měřítka na totéž místo přišla, kde se konečná čárka předešlé nalezala aneb aby se odchylka přesně změřila; v druhém případě pak, kdež jest měřítek více zapotřebí, musí se měřítka k předešlému vždy přiložiti tak, aby se konce obou dotýkaly, aniž by tím měřítka předešlé z polohy své přivedeno bylo, aneb nedotýkají-li se, nutno vzdálenost konců co nejzevrubněji určití.

Co se porovnávání měr mezi sebou tkne, dostoupily prostředky k tomu účeli sloužící dokonalosti úžasné. Komparátory, jichž *Bessel* při regulování pruské míry a měření délky berlínského kyvadla použil,*⁾ dále přístroje akademie pařížské, zvláště

^{*)} Darstellung der Untersuchungen, welche durch die Einheit des preuss. Längemasses veranlasst worden sind“ (1839)—a „Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels“ (1828). F. W. Bessel.

ale komparátory hvězdárny *Pulkavské*, dle návrhů *Struveových* pořízené, jsou přístroje druhu nejdokonalejšího. Co se pak míry základní tkne, hodí se nejlépe, ano jedině *toisa*. Jest to míra, která skoro při všech geodetických operacích doby novější (od r. 1736) základ tvořila a kteréž i dosud při pracích rázu čistě vědeckého jedině se užívá. Na ní spočívají dále míry základní skoro všech států evropských. Není jiné délky, která by s takovou určitostí a tak trvanlivě definována byla, jako právě *toisa*. Především jsou to dvě kopie *toisy* peruánské, totiž kopie *Besselova* (dosud ještě hvězdárně královské náležející), kterou *Fortin* shotovil a *Arago* a *Zahrtmann* s *toisou* peruánskou porovnali, — jest o 0.00008 pař. č. kratší než tato —, a kopie *Derpská*, taktéž *Fortinem* shotovená a dle certifikátu *Aragova* s peruánskou úplně stejná.*) S těmito *toisami* porovnána velká řada jiných kopií nejen *toisy*, nýbrž i základních měr rozličných států (yardu, sáhu rakouského a j.), dále měřítka, kterýmiž mnohá z nových měření konána. Kdyby tedy nešťastnou náhodou obě jmenované *toisy*, jakož i všechna měřítka, jichž poměr k jedné z nich s velikou zevrubností zjištěn jest, ve zkázu měla přijíti — což jest pravdě velmi nepodobno —, pak máme tu velikou řadu na staletí trvale označených základnic, jejichž délky *toisou* vyjadřeny jsou; bylo by tedy jen zapotřebí, je opět libovolným měřítkem změřiti, a pak dala by se délka *tois* s dostatečnou zevrubností odvoditi.

Vliv tepla na míru kovovou může považovati se co proporcionální se změnou teploty a dá se vypočítati, je-li tato známa a zároveň změna délky pro 1° tepla. Tato určiti se dá pomocí komparátorů; jedná se tedy ještě o to, měřiti změny teploty kovových měr. Z počátku měřena teplota pomocí obyčejných teploměrů, které se nalezaly v téže skříni, v kteréž uzavřeno bylo měřítko při svém použití. Teploměry tyto udávaly však jen teplotu vzduchu uvnitř skříně a nikoli teplotu kovové míry. Později zapuštěny teploměry částečně do měřítka; ale i tu ukázalo se, že neudávají pravou jeho teplotu.

*) Obě tyto *toisy*, které považovati se mohou za nejlepší základní míry, liší se od sebe dle porovnání *Struve-ova* o 0.00013 pař. č., tedy o $\frac{1}{6,800.000}$ své délky. (Baeyer Gr. u. Fig. d. Erde.)

K šťastnému řešení přivedl tuto otázku *Borda*, určil teplotu měřítka tím, že s ním spojil teploměr kovový, jehož jednu část tvořilo měřítko samo. Myšlenku svou provedl při hotovení měřítek pro veliké měření francouzské mezi *Barcelonou* a *Dunkerkem*. Skládají se z platinového pravídku *ab* (obr. 13.), jehož konce obsahují mezi sebou délku dvou tois; s ním spojen jest na jednom konci *a* proužek měděný $\alpha\beta$, kterýž ostatní svou délkou volně na platině leží, tak že druhý konec β , jakmile se teplota celého měřítka změní, na platinovém pravídku se pohybuje; příčinou pohybu jest nestejná roztažlivost obou kovů, a patrně, že relativní pohyb ten jest funkcí pravé teploty měřítka; k měření jeho nalezá se na konci platinového pravídku jemné dělení \varnothing , k němuž příčný nonius *n* jest na konci měděného proužku.

Pozorováním tohoto přístroje při rozličných teplotách dá se pravá teplota měřítka pro každé odečtení na dělení \varnothing určit.

Není to jediná oprava, kterou *Borda* na měřítkách těchto učinil. Dotýkání se měřítek jednotlivých při měření z dvou příčin jest škodlivé; za jedno může míti při největší opatrnosti poškození konců za následek, za druhé snadno se může měřítko předešlé ze své polohy pošinouti. Tomu odpomohl *Borda* tím, že zapustil do žlábků na konci platinové tyče malé pohyblivé měřítka *m* s noniusem *n'*. Měřítka se při měření nedotýkala a malá vzdálenost konců měřila se malým tímto měřítkem, které se opatrně až k dotyku pošinulo.*)

*Bessel***) použil k měření základny při měření svém ve *Východním Prusku* měřítek podobného sestavení; sestávají ze železné tyče *A* (obr. 14.), na niž připevněna jiná *B* ze zinku téže tloušťky a poloviční šířky; obě jsou na jednom konci α pájídlem a šroubem pevně spojeny, ostatně se jen dotýkají. Na konci β zinkové tyčky jest malý klín ocelový, jehož hrana jest rovnoběžná k hořejší ploše měřítka; proti němu nalezá se jiný klín γ , na železnou tyč připevněný; hrana jeho jest kolmá k horní ploše železné tyče. Opět jest vzdálenost klínů β a γ funkcí

*) „Geografische Trigonometrie“ etc. von J. P. W. *Stein* (Main 1825) a *Arago's* sämmtl. Werke, übers. von *Hankel* XIII.

**) *F. W. Bessel* u. *Baeyer*. „Gradmessung in Ostpreussen.“

právě teploty měřítka. *Bessel* porovnával u čtyř přístrojů svých vzdálenost klínů β a γ s teplotou měřítka; tuto určil pomocí důkladně opravených teploměrů rtuťových. Ač se pozorování ta děla vždy za velmi příznivých okolností — s každým přístrojem konáno jich 160 — předce se ještě objevily dosti značné odchylky pozorovaných teplot od vypočtených, čímž dokázána nedostatečnost teploměrů rtuťových k takovýmto účelům. Pozorování ta měla hlavně účel theoretický; mělo se totiž konstatovati, zdali a jak se liší výsledky rtuťovým a kovovým teploměrem obdržené; neboť při skutečném měření nebylo teploměru zapotřebí. Poněvadž jest pravá délka měřítka funkcí jeho teploty, tato pak zase funkcí vzdáleností klínů β a γ , dá se pravá délka též přímo touto vzdáleností vyjádřiti. Tak učinil *Bessel* r. 1834 a obdržel pro svá měřítka, která číslicemi I, II, III, IV označil, následující hodnoty:

- I. . . . 1728·8152 p. č. — 0·54033 *a*,
- II. . . . 1729·5153 p. č. — 0·55976 *b*,
- III. . . . 1729·0454 p. č. — 0·57575 *c*,
- IV. . . . 1729·0909 p. č. — 0·58103 *d*,

kdež znamenají *a*, *b*, *c*, *d* vzdálenosti klínů β a γ při jednotlivých měřítkách.

Baeyer použil r. 1846 *Besselova* stroje k měření základny berlínské.*) Poněvadž však tentýž stroj před tím k měření základen u *Kodaně* a *Upsaly* sloužil a tudíž velké cesty vykonal, nemohl a nechtěl *Baeyer* předpokládati, že by při tom nebyl změny utrpěl; protož opětoval měření délek tímž způsobem, jako *Bessel*, a dospěl k následujícím výsledkům:

- I. 1728·8130 p. č. — 0·53027 *a*,
- II. 1729·4930 p. č. — 0·55092 *b*,
- III. 1729·0276 p. č. — 0·56308 *c*,
- IV. 1729·0659 p. č. — 0·56485 *d*,

Změny byly tedy dosti značné, zvlášť u posledních tří měřítka a sice se veškerá měřítka skrátila. Jest to nezvratný důkaz, že měřítka kovová časem trvalou změnu délky utrpí, kterýž zvláštního povšimnutí zasluhuje.

*) *Baeyer*: „Küstenvermessung“ a na jiných místech.

Co se pak způsobu tkne, jakým *Bessel* vzdálenost klínů β a γ jakož konců vedle sebe ležících měřtek určoval, jest od předešlého rozdílný a dokonalejší. *Bessel* použil totiž *Reichenbachem* ponavržený a *Repsoldem* poprvé shotovený klín geodetický. Jest to klín skleněný, jehož různoběžné plochy $a a'$ a $b b'$ (obr. 15.) velmi málo k sobě jsou nakloněny. Na jedné ze souběžných stran vryty jsou dvě jemné čárky kolmo na čáru úhel sklonu půlčí, a mezi nimi jistý počet rovnoběžných čárek ve stejných vzdálenostech. Při klínech, jichž *Bessel* použil a které byly *Sicklerem* a *Pistorem* shotoveny, bylo čárek 120. Patrně, že rozdíl dvou po sobě následujících čárek jest velmi malý — při *Besselových* klínech asi $\frac{1}{100}$ pruské č. — že tedy možná zapuštěním klínu mezi dva body, dvě hrany neb dvě plochy vzdálenost jejich přesně měřit. Povážíme-li, že se dá ještě desetina vzdálenosti dvou takových rovnoběžných čárek dobře odhadnouti, dají se klínem takovým malé vzdálenosti až na $\frac{1}{1000}$ č. měřiti. Použití klínu při měření základny vysvítá samo sebou.

Při této příležitosti musím se zmíniti, jakým způsobem *Bessel* při měření základny blíž *Královce*, o kteréž ještě později bude jednáno, fakticky dokázal, že jest měření teploty měřitek pomocí teploměru rtuťového chybné. Měřítka jeho uzavřena byla ve skříních dřevěných, z nichž jen konce vynikaly, a v těchto skříních nacházely se teploměry. A tu pozoroval v každé poloze mimo teploměr kovový též rtuťový, a poněvadž věděl, jak se má udání prvního k druhému, mohl sledovati nepravidelnosti mezi oběma. Vyskytlo se, že při stoupání teploty vždy šel teploměr rtuťový napřed, kdežto při klesání rychleji klesal než teploměr kovový. Rozdíl mezi oběma v nejnepříznivějším případě obnášel až i 3° R. Že by bylo značnou chybu za následek mělo, kdyby se bylo teploměru rtuťového použilo, dokázal *Bessel* počtem; základnice jeho byla by se objevila o 11·876 pař. č. větší. (Celá její délka obnášela 934·99 tois.)

Posud jednáno jen o měřítkách s koncovými plochami; nyní obraťme se k druhému druhu měřitek.

Již na počátku našeho století počalo se užívati měřitek s *koncovým čárkami* k měření základen; tak učinili *Colby*

v Anglicku, *Hassler* při pracích svých na východním pobřeží Ameriky, *Porro* v rozličných zemích. Avšak přístroje jimi použité postrádaly ještě dostatečné zevrubnosti.

Teprvé roku 1856 sestrojil pařížský mechanik *Brunner* toho druhu měřítka, které všem požadavkům vědy vyhovuje.*) Skládá se z pravítka platinového délky asi 4 metrů, po celé délce své v centimetry děleného, s nímž spojeno jest podobným způsobem jako při stroji *Besselově* pravítko mosazné, tak že opět povstává teploměr kovový. K přístroji tomu náleží pak hlavně ještě čtyry mikrometry mikroskopické. Tyto postaví se ve směru základny ve vzdálenostech délce měřítka přibližně stejných, toto se pod nimi vždy asi o svou délku pošine a v každé poloze pak se měří malé vzdálenosti koncových čárek od pevných nitkových křížů pomocí nitky pohyblivé. Zároveň slouží ty mikroskopy k měření relativní změny délek obou kovů, kteráž jest opět funkcí pravé teploty měřítka.

Měřítka to sloužila k měření základny španělské u městečka *Madridejos. Ibañez*, který měření to vykonal, určil r. 1856 roztažlivost

$$\text{platiny} = 0\cdot00000907 \pm 0\cdot000000030,$$

$$\text{mosazu} = 0\cdot000018984 \pm 0\cdot000000044,$$

dále pak délku mezi koncovými čárkami obsaženou při 21·93°C... 3·8985112 met. \mp 0·0000010.

Prozatím budiž zde uvedeno, že měřítka právě popsaná skvěle se osvědčila; ostatně bude o tomto pro vědu veledůležitém podniku na jiném místě promluveno.

Hlavní výhoda měřítek s koncovými čárkami záleží v tom, že jest jen jednoho měřítka zapotřebí, čímž se stávají počty jednoduššími.

(Dokončení.)

*) Generalbericht über die europäische Gradmessung 1869,