Ladislav Štěpánek
Skládání konečných současných rotací pevného tělesa. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 5, 506--533

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122623

neplatí. Že ale přes to i pro tato prvočísla Fermatova věta je správna, ukázal Kummer ve své druhé práci, které chci věnovati samostatné pojednání. Jdeme-li nad $l \geqq 101$, hromadí se prvočísla, pro něž je počet tříd dělitelný l, a sice jsou to ku př. prvočísla $l = 101, 103, 131, 149, 157$; z nich je dokonce počet tříd pro $l = 157$ dělitelný 157^2, neboť jest prvý činitel počtu tříd pro $l = 157$

$$P' = 5 . 13 . 3148601 . 13 . 157 . 157 . 857487631729.$$

Je-li pro tato prvočísla Fermatova věta správna, není dosud rozhodnuto*). Výpočty jsou tu velmi obtížné a vyžadují zvláštních obratů počtářských.

Skládání konečných současných rotací pevného tělesa.

Podává Dr. **Ladislav Stjepanek**, prof. reálného gymnasia a soukr. docent na universitě v Záhřebě.

(Dokončení.)

2. Rotace téhož druhu.

Budeme nyní hledati podmínku, pro niž differenciální rovnice (16) dají pohyb šroubový kol pevné osy. V tom případě musí rovnice (17) býti rovnicí roviny, jež v prostoru rovnoběžně k sobě postupuje, t. j. levá strana této rovnice musí býti dělitelna jistou funkcí t — řekněme $\varphi'_0(t)$ — tak že po dělení touto funkcí koefficienty u $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ a $\frac{dz}{dt}$ zůstávají nezávislé na t.

Této podmínce se vyhoví, když

$$\varphi_r(t) = k_r \varphi_0(t)$$

pro $r = 1, 2, \ldots h$, kde $k_1, k_2, \ldots k_h$ jsou konstanty na čase nezávislé.

Rovnice (17) zní nyní:

*) *Kummer*, Monatsberichte der königl. pr. Akad. 1874.

$$\sum_{r=1}^{h} l_r k_r \frac{dx}{dt} + \sum_{r=1}^{h} m_r k_r \frac{dy}{dt} + \sum_{r=1}^{h} n_r k_r \frac{dz}{dt}$$

$$= \varphi'_0(t) \sum_{r,s} k_r k_s \begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r \\ l_s & m_s & n_s \\ a_r - a_s & b_r - b_s & c_r - c_s \end{vmatrix},$$

kdež jest dosaditi, jak známo za r, s všecky kombinace 2. třídy bez opakování pro $1, 2, \ldots h$. Integrováním této rovnice obdržíme

$$\sum_{r=1}^{h} l_r k_r x + \sum_{r=1}^{h} m_r k_r y + \sum_{r=1}^{h} n_r k_r z$$

$$= \varphi_0(t) \sum_{r,s} k_r k_s \begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r \\ l_s & m_s & n_s \\ a_r - a_s & b_r - b_s & c_r - c_s \end{vmatrix} + C. \tag{37}$$

Integrační stálou C lze určiti z podmínky, že v počátku náš bod tělesa se nachází v bodě (x_0, y_0, z_0), t. j. pro $t = 0$ má být $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$; tedy, ježto $\varphi_0(0) = 0$

$$\sum_{r=1}^{h} l_r k_r x_0 + \sum_{r=1}^{h} m_r k_r y_0 + \sum_{r=1}^{h} n_r k_r z_0 = C.$$

Z rovnice (37) je vidět, že se bod tělesa pohybuje tak, jako by byl vázán na rovinu, jež rovnoběžně k sobě v prostoru postupuje. Směrové kosinusy normály na tuto rovinu jsou:

$$l = \frac{\sum_{r=1}^{h} l_r k_r}{\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{h} l_r k_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} m_r k_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} n_r k_r\right)^2}},$$

$$m = \frac{\sum_{r=1}^{h} m_r k_r}{\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{h} l_r k_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} m_r k_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} n_r k_r\right)^2}},$$

$$n = \frac{\sum_{r=1}^{h} l_r k_r}{\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{h} l_r k_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} m_r k_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} n_r k_r\right)^2}}.$$

Položme

$$\left(\sum_{r=1}^{h} l_r k_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} m_r k_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{h} n_r k_r\right)^2 = k^2, \tag{38}$$

a obdržíme

$$l = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{h} l_r k_r, \quad m = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{h} m_r k_r, \quad n = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{h} n_r k_r,$$

$$lkx_0 + mky_0 + nkz_0 = C, \tag{39}$$

$$lx + my + nz = lx_0 + my_0 + nz_0 + \frac{S}{k}\,\varphi_0(t),$$

kde

$$S = \sum_{r,s} k_r k_s \begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r \\ l_s & m_s & n_s \\ a_r - a_s & b_r - b_s & c_r - c_s \end{vmatrix} = \sum k_r k_s \delta_{rs} \sin \vartheta_{rs}. \tag{40}$$

Differenciální rovnice (16) zní nyní:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi'_0(t)} \cdot \frac{dx}{dt} &= (mz - ny)\,k + \sum_{r=1}^{h} (n_r b_r - m_r c_r)\,k_r, \\ \frac{1}{\varphi'_0(t)} \cdot \frac{dy}{dt} &= (nx - lz)\,k + \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r)\,k_r, \\ \frac{1}{\varphi'_0(t)} \cdot \frac{dz}{dt} &= (ly - mx)\,k + \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r)\,k_r. \end{aligned} \tag{41}$$

Differencujeme-li první differenciální rovnici dle t a dosadíme-li zároveň za $\frac{dy}{dt}$ a $\frac{dz}{dt}$ hodnoty z druhé a třetí differenciální rovnice, následuje

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi'_0(t)} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\varphi''_0(t)}{[\varphi'_0(t)]^2} \cdot \frac{dx}{dt} &= mk\varphi'_0(t)\,[(ly - mx)\,k \\ &\quad + \sum_{r=1}^{h}(m_r a_r - l_r b_r)\,k_r] - nk\varphi'_0(t)\,[(nx - lz)\,k \\ &\quad + \sum_{r=1}^{h}(l_r c_r - n_r a_r)\,k_r] \\ &= k\varphi'_0(t)\,\{k\,[m\,(ly - mx) - n\,(nx - lz)] \\ &\quad + m\sum_{r=1}^{h}(m_r a_r - l_r b_r)\,k_r - n\sum_{r=1}^{h}(l_r c_r - n_r a_r)\,k_r]\} \\ &= k\varphi'_0(t)\,\{k\,[l\,(lx + my + nz) \\ &\quad - (l^2 + m^2 + n^2)\,x + ka\} \\ &= k^2\varphi'_0(t)\,[l\,(lx + my + nz) - x + a], \end{aligned}$$

kde položeno k vůli zkrácení

$$m \sum_{r=1}^{h} (m_r a_r - l_r b_r) k_r - n \sum_{r=1}^{h} (l_r c_r - n_r a_r) k_r = ka. \tag{42}$$

Následkem (39) obdržíme nyní

$$\frac{1}{[\varphi'_0(t)]^2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\varphi''_0(t)}{[\varphi'_0(t)]^3} \cdot \frac{dx}{dt} = k^2 [l (lx_0 + my_0 + nz_0) + l \frac{S}{k} \varphi_0(t) - x + a]$$

Substitucí

$$x - a - l (lx_0 + my_0 + nz_0) - l \frac{S}{k} \varphi_0(t) = u$$

přejde tato differenciální rovnice v rovnici:

$$\frac{1}{[\varphi'_0(t)]^2} \left[\frac{d^2u}{dt^2} + l \frac{S}{k} \varphi''_0(t)\right] - \frac{\varphi''_0(t)}{[\varphi'_0(t)]^3} \left[\frac{du}{dt} + l \frac{S}{k} \varphi'_0(t)\right] = - k^2 u,$$

nebo po redukci v

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{\varphi''_0(t)}{\varphi'_0(t)} \cdot \frac{du}{dt} + k^2 [\varphi'_0(t)]^2 u = 0.$$

To jest differenciální rovnice lineární, již se pokusíme řešiti pomocí funkce exponenciální. Za exponent volíme funkci $f(t)$ času t, ježto koefficienty differenciální rovnice jsou též funkcemi času t.

Substituujeme tedy

$$u = e^{f(t)}, \quad \frac{du}{dt} = f'(t) \, . \, e^{f(t)}, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = f''(t)\, e^{f(t)} + [f'(t)]^2 . \, e^{f(t)},$$

a obdržíme pak

$$f''(t) + [f'(t)]^2 - \frac{\varphi''_0(t)}{\varphi'_0(t)} . f'(t) + k^2 [\varphi'_0(t)]^2 = 0,$$

nebo

$$\frac{1}{\varphi'_0(t)} \cdot \{[f'(t)]^2 + k^2 [\varphi'_0(t)]^2\} + \frac{\varphi'_0(t) f''(t) - f'(t) \varphi''_0(t)}{[\varphi'_0(t)]^2} = 0,$$

$$\varphi'_0(t) \left\{\left[\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2 + k^2\right\} + \frac{d}{dt}\left[\frac{f'(t)}{\varphi'_0(t)}\right] = 0.$$

Této rovnici hoví

$$\frac{f'(t)}{\varphi'_0(t)} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki,$$

a z toho $\qquad f(t) = \pm ki\varphi_0(t).$

Integrační stálou zde vynecháváme, neboť se nalézá v integrálu

$$u = c_1 e^{ki\varphi_0(t)} + c_2 e^{-ki\varphi_0(t)} = C_1 \cos[k\varphi_0(t)] + C_2 \sin[k\varphi(t)].$$

Následkem naší substituce obdržíme

$$x - a = l(lx_0 + my_0 + nz_0) + C_1 \cos[k\varphi_0(t)] + C_2 \sin[k\varphi(t)] + l\frac{S}{k}\varphi_0(t).$$

Pro $t = 0$ má býti $x = x_0$, tedy

$$x_0 - a = l(lx_0 + my_0 + nz_0) + C_1$$
$$C_1 = x_0 - a - l(lx_0 + my_0 + nz_0)$$

a proto

$$x - a = l(lx_0 + my_0 + nz_0) + [x_0 - a - l(lx_0 + my_0 + nz_0)] \cos[k\varphi_0(t)] + C_2 \sin[k\varphi_0(t)] + l\frac{S}{k}\varphi_0(t),$$

tímtéž způsobem

$$y - b = m(lx_0 + my_0 + nz_0) + [y_0 - b - m(lx_0 + my_0 + nz_0)] \cos[k\varphi_0(t)] + C'_2 \sin[k\varphi_0(t)] + m\frac{S}{k}\varphi_0(t), \qquad (43)$$

$$z - c = n(lx_0 + my_0 + nz_0) + [z_0 - c - n(lx_0 + my_0 + nz_0)] \cos[k\varphi_0(t)] + C''_2 \sin[k\varphi_0(t)] + n\frac{S}{k}\cdot\varphi_0(t),$$

kde dle (42)

$$ka = m\sum_{r=1}^{h}(m_r a_r - l_r b_r)k_r - n\sum_{r=1}^{h}(l_r c_r - n_r a_r)k_r,$$
$$kb = n\sum_{r=1}^{h}(n_r b_r - m_r c_r)k_r - l\sum_{r=1}^{h}(m_r a_r - l_r b_r)k_r, \qquad (44)$$
$$kc = l\sum_{r=1}^{h}(l_r c_r - n_r a_r)k_r - m\sum_{r=1}^{h}(n_r b_r - m_r c_r)k_r.$$

Dosadíme-li hodnoty, jež v rovnicích (43) obdržíme, do poslední rovnice (39), následuje

$$la + mb + nc - (la + mb + nc)\cos[k\varphi_0(t)] + (lC_2 + mC'_2 + nC''_2)\sin[k\varphi_0(t)] = 0.$$

Tato rovnice musí platit pro všechna t, tedy

$$\begin{aligned} la + mb + nc &= 0 \\ lC_2 + mC'_2 + nC''_2 &= 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Hodnoty a, b, c v (44) skutečně také hoví první rovnici. K určení konstant C_2, C'_2, C''_2 třeba jen hodnoty pro x, y, z z (43) dosadit do první differenciální rovnice (41), neboť z rovnice, jiż tak obdržíme

$$\begin{aligned} & - k\,[x_0 - a - l\,(lx_0 + my_0 + nz_0)]\,sin\,[k\varphi_0\,(t)] \\ & + kC_2\,cos\,[k\varphi_0\,(t)] + l\,\frac{S}{k} \\ & = k\,(mC''_2 - nC'_2)\,sin\,[k\varphi_0\,(t)] + k\,[m\,(z_0 - c) \\ & - n\,(y_0 - b)]\,cos\,[k\varphi_0\,(t)] + k\,(mc - nb) \\ & + \sum_{r=1}^{h}(n_r b_r - m_r c_r)\,k_r \end{aligned}$$

plyne

$$C_2 = m\,(z_0 - c) - n\,(y_0 - b), \qquad C'_2 = n\,(x_0 - a) - l\,(z_0 - c),$$
$$C'' = l\,(y_0 - b) - m\,(x_0 - a),$$

ježto musí platit pro každé t. Tyto hodnoty hoví také druhé rovnici (45). Vzhledem k první rovnici (45) můžeme nyní rovnice (43) psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} x - a &= l\,[l\,(x_0 - a) + m\,(y_0 - b) + n\,(z_0 - c)] \\ & + \{x_0 - a - l\,[l\,(x_0 - a) + m\,(y_0 - b) + n\,(z_0 - c)]\}\,.\,cos\,\varphi\,(t) \\ & \quad + [m\,(z_0 - c) - n\,(y_0 - b)]\,sin\,\varphi\,(t) + l\,\frac{S}{k^2}\,\varphi\,(t), \\ y - b &= m\,[l\,(x_0 - a) + m\,(y_0 - b) + n\,(z_0 - c)] \\ & + \{y_0 - b - m\,[l\,(x_0 - a) + m\,(y_0 - b) + n\,(z_0 - c)]\}\,cos\,\varphi\,(t) \\ & \quad + [n\,(x_0 - a) - l\,(z_0 - c)]\,sin\,\varphi\,(t) + m\,\frac{S}{k^2}\,\varphi\,(t). \qquad (46) \\ z - c &= n\,[l\,(x_0 - a) + m\,(y_0 - b) + n\,(z_0 - c)] \\ & + \{z_0 - c - n\,[l\,(x_0 - a) + m\,(y_0 - b) + n\,(z_0 - c)]\}\,cos\,\varphi\,(t) \\ & \quad + [l\,(y_0 - b) - m\,(x_0 - a)]\,sin\,\varphi\,(t) + n\,\frac{S}{k^2}\,\varphi\,(t), \end{aligned}$$

kde

$$\varphi(t) = k\varphi_0(t) = \sqrt{\left[\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi_r(t)\right]^2}$$

$$\varphi'(t) = k\varphi'_0(t) = \sqrt{\left[\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi'_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi'_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi'_r(t)\right]^2}$$

$$l = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{h} l_r k_r = \frac{\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi_r(t)}{\varphi(t)} = \frac{\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi'_r(t)}{\varphi'(t)} = \ldots,$$

$$m = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{h} m_r k_r = \frac{\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi_r(t)}{\varphi(t)} = \frac{\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi'_r(t)}{\varphi'(t)} = \ldots \tag{47}$$

$$n = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{h} n_r k_r = \frac{\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi_r(t)}{\varphi(t)} = \frac{\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi'_r(t)}{\varphi'(t)}.$$

Jako při skládání rovnoměrných rotací, obdržíme též zde *při skládání rotací stejného druhu* pohyb šroubový. Rotace a translace tohoto pohybu šroubového, určená funkcí

$$\varphi(t) = k \,.\, \varphi_0(t),$$

jest téhož druhu (rovnoměrná, rovnoměrně zrychlená atd.) jako dané rotace o úhlových drahách $k_1\varphi_0(t)$, $k_2\varphi_0(t), \ldots k_h\varphi_0(t)$.

Z rovnic (47) jest vidno, že oblouková dráha a oblouková rychlost vysledné rotace jest — jako při skládání rovnoměrných rotací — v určitém čase t dle velikosti i směru rovna geometrickému součtu obloukových drah, resp. obloukových rychlostí daných rotací v témž čase.

Tento směr, směr osy výsledného pohybu šroubového, jest dán směrovými kosinusy l, m, n v (47). Osa se s časem nemění, ježto l, m, n a a, b, c jsou nezávisly na t.

Výsledná translace jest dána výrazem

$$\frac{S}{k^2}\varphi(t) = \frac{S}{k}\varphi_0(t) = \sum_{r,s}\frac{k_r k_s}{k} \,.\, \varphi_0(t)\, \delta_{rs}\, sin_{rs}\, \vartheta$$

pro čas t, podobně jako při skládání rovnoměrných rotací. Osa výsledného pohybu šroubového jde bodem (a, b, c), kdež souřadnice a, b, c mají hodnoty (44).

Násobíme-li rovnice (44) výrazem $\varphi_0(t)$ nebo $\varphi'_0(t)$, obdržíme pro a, b, c rovnice, jež odpovídají rovnicím (26) při skládání rovnoměrných rotací, osa výsledného pohybu šroubového jest tedy centrální osou daných rotorů a jest pevná, ježto tyto rotory zůstávají ve stálém poměru, ač jich velikost se s časem mění. Při skládání jen dvou rotací téhož druhu protíná tedy osa výsledná nejkratší vzdálenost daných os v obráceném poměru příslušných rotorů $\varphi'_1(t)$ a $\varphi'_2(t)$ nebo též $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$, promítnutých do směru osy výsledné. Tento poměr se nemění, jest na čase nezávislý ($= k_2 : k_1$). Dle (38) jest

$$\varphi''(t) = k\varphi''_0(t) = \sqrt{\left[\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi_r''(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi_r''(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi''_r(t)\right]^2},$$

t. j. při rotacích téhož druhu obdržíme nejen výslednou dráhu obloukovou a výslednou rychlost obloukovou, nýbrž také výsledné obloukové zrychlení geometricky sčítáním příslušných komponent (dle polygonu směrových veličin v prostoru). Z toho všeho je zjevno, že mezi skládáním rotací téhož druhu a rotací rovnoměrných je úplná analogie, takže můžeme výsledky získané při skládání rovnoměrných rotací, beze všeho applikovati na skládání rotací téhož druhu. Protínají-li se osy daných rotací téhož druhu v jednom bodě, obdržíme jen rotaci bez translace téhož druhu kol osy procházející týmž bodem.

Rotace téhož druhu kol os rovnoběžných dají též jen rotaci kol osy, jdoucí rovnoběžně daným osám středem daných rovnoběžných rotorů; oblouková rychlost této výsledné rotace rovná se algebraickému součtu daných obloukových rychlostí, rovná-li se tato nule, obdržíme jen translaci téhož druhu jako daná rotace a sice kolmo na směr daných os a t. d.

3. Rotace různého druhu.

Jsou-li rotace, jež máme skládat, různého druhu, tedy obloukové dráhy $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... $\varphi_h(t)$ zcela libovolné funkce, jež nemusí splňovat žádné podmínky, pak nedají differenciální rovnice (16) žádného pohybu šroubového. Aby byl i tento případ pokud možno obecně řešen, musíme poukázat nejdříve na analogii mezi skládáním translací pevného směru a skládáním rotací kol pevných os. Viděli jsme, že se rotace téhož druhu kol pevných os, jež se protínají v jednom bodě, dají převésti na rotaci téhož druhu, taktéž kol pevné osy, jdoucí průsečíkem daných os.

Oblouková rychlost, obloukové zrychlení a oblouková dráha výsledné rotace obdrží se jako geometrický součet příslušných komponent (dle mnohoúhelníka směrových veličin v prostoru). Stejně dají též translace téhož druhu o pevném směru (v přímkách) opět translaci téhož druhu v pevném směru (v přímce). Rychlost, urychlení a dráhu výsledné translace obdržíme jakožto geometrický součet (dle polygonu směrových veličin v prostoru) z rychlostí, urychlení a drah translací, jež skládáme. Translaci v pevném směru (v přímce) odpovídá tedy rotace kol pevné osy. Analogie jest zřejma. Avšak, jako považujeme translaci v proměnlivém směru (v křivce) za sled nekonečně malých přímkových translací (vždy ve směru tečny v příslušném bodě křivky), tak můžeme též každý pohyb pevného tělesa kol pevného bodu považovati za sled nekonečně malých rotací kol osy měnící stále svůj směr. Při translaci proměnlivého směru (v křivce) pokládáme pohyb v nekonečně krátkém čase dt za pohyb přímočarý (ve směru tečny ke křivce). Tak jest též pohyb tělesa kol bodu v nekonečné krátkém čase dt rotací kol určité osy. Tato osa jest *okamžitou osou rotace.* Dále je zřejmý závěr, že můžeme vůbec libovolný pohyb pevného tělesa pro jistý okamžik považovati za spojení nekonečně malé rotace s nekonečně malou translací — tedy za nekonečně malý pohyb šroubový určitého směru. Pro nekonečně krátký čas dt můžeme tedy říci, že jsou koefficienty

$$\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi'_r(t),\quad \sum_{r=1}^{h} m_r\varphi'_r(t),\quad \sum_{r=1}^{h} n_r\varphi'_r(t)$$

a poslední součty pravých stran v differenciálních rovnicích konstantní, nebo, co vede k témuž výsledku, rotace, jež skládáme, můžeme považovati za rovnoměrné pro nekonečně krátký čas dt. Analogicky postupujeme též při translacích, kladouce

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ a t. d.}$$

Pro nekonečně krátkou dobu dá rovnice (17), integrována byvši, rovnici roviny:

$$\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi'_r(t)\,.\,x + \sum_{r=1}^{h} m_r\varphi'_r(t)\,.\,y + \sum_{r=1}^{h} n_r\varphi'_r(t)\,.\,z$$

$$= \sum_{r,s} \varphi'_r(t)\,\varphi'_s(t) \begin{vmatrix} l_r & m_r & n_r \\ l_s & m_s & n_s \\ a_r - a_s & b_r - b_s & c_r - c_s \end{vmatrix} . \, t + C.$$

Směrovými kosinusy normály k této rovině jsou směrové kosinusy *osy okamžitého pohybu šroubového*; jich hodnoty jsou:

$$l = \frac{\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi'_r(t)}{\varphi'(t)}, \quad m = \frac{\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi'_r(t)}{\varphi'(t)}, \quad n = \frac{\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi'_r(t)}{\varphi'(t)} \tag{48}$$

kde

$$\varphi'(t) = \sqrt{\left[\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi'_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi'_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi'_r(t)\right]^2}$$

značí obloukovou rychlost tohoto výsledného pohybu šroubového. Z těchto výrazů vidno, že se směrové kosinusy osy okamžitého pohybu šroubového s časem mění, jsou funkcemi času t.

Rotace nestejných druhů kol pevných os dají pohyb tělesa, jejž můžeme považovati za sled nekonečně malých pohybů šroubových kol měnlivé osy.

Obdržíme tedy pohyb šroubový kol osy, jež stále mění svoji polohu i svůj směr v prostoru, jako jsme obdrželi při skládání translací různého druhu o pevném směru (v přímkách) translaci, jež stále svůj směr v prostoru mění (v křivce). Z (48) vidíme dále, že výsledná oblouková rychlost v určitém časovém okamžiku rovná se geometrickému součtu obloukových rychlostí příslušných témuž okamžiku pro rotace, jež skládáme.

Stanovíme nyní *geometrické místo okamžité osy* pohybu pro několik jednodušších případů.

Vezměme nejprve případ, že se osy daných rotací v jednom bodě, v počátku souřadnic, protínají; pak máme:

$$a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = \ldots = a_h = b_h = c_h = 0$$

a obdržíme z (36), kladouce za ω_r výraz $\varphi'_r(t)$:

$$\frac{\varphi'(t)\,.\,x}{\sum_{r=1}^{h} l_r\varphi'_r(t)} = \frac{\varphi'(t)\,.\,y}{\sum_{r=1}^{h} m_r\varphi'_r(t)} = \frac{\varphi'(t)\,.\,z}{\sum_{r=1}^{h} n_r\varphi'_r(t)}$$

nebo (49)

$$\frac{x}{\sum\limits_{r=1}^{h} l_r \varphi'_r(t)} = \frac{y}{\sum\limits_{r=1}^{h} m_r \varphi'_r(t)} = \frac{z}{\sum\limits_{r=1}^{h} n_r \varphi'_r(t)}$$

co rovnice výsledné okamžité osy rotace.

Obdržíme zde sled nekonečně malých rotací o měnlivé ose kol onoho pevného bodu. Geometrické místo této osy jest tedy plocha regulérní, jejíž tvořitelky se protínají v počátku souřadnic. Vlastnost této plochy závisí na funkcích $\varphi'_1(t)$, $\varphi'_2(t), \ldots \varphi'_h(t)$ a na směrových kosinusech daných os.

Zvlášť jmenujme případ, že máme jen 2 rotace skládati. Tu musí výsledná osa okamžitá vždy zůstati v rovině daných os, ježto ji můžeme v každém okamžiku obdržeti z rovnoběžníka daných obloukových rychlostí. To se dá též mathematicky lehce dokázati. Pro dvě rotace máme okamžitou osu:

$$\frac{x}{l_1\varphi'_1(t) + l_2\varphi'_2(t)} = \frac{y}{m_1\varphi'_1(t) + m_2\varphi'_2(t)} = \frac{z}{n_1\varphi'_1(t) + n_2\varphi'_2(t)},$$

nebo, když označíme společnou proměnnou hodnotu těchto zlomků u,

$$x = l_1 u\varphi'_1(t) + l_2 u\varphi'_2(t), \quad y = m_1 u\varphi'_1(t) + m_2 u\varphi'_2(t),$$
$$z = n_1 u\varphi'_1(t) + n_2 u\varphi'_2(t),$$

z toho:

$$\begin{vmatrix} x & l_1 & l_2 \\ y & m_1 & m_2 \\ z & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

a to jest rovnice roviny daných os rotačních.

V tomto případě nalézá se tedy ona plocha regulérní v rovině daných os rotačních.

Jsou-li osy daných rotací rovnoběžné, t. j.

$$l_r = \varepsilon_r l_0, \quad m_r = \varepsilon_r m_0, \quad n_r = \varepsilon_r n_0 \text{ pro } r = 1, 2, \ldots h,$$

kde ε_r může býti buď $+1$ nebo -1 dle směru příslušné rotace, obdržíme v každém časovém okamžiku t nekonečně malou rotaci kol osy, jejíž směrové kosinusy jsou l_0, m_0, n_0 a jež jde bodem (a', b', c'), kdež

$$a' = \frac{\sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r a_r \varphi'_r(t)}{\sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r \varphi'_r(t)}, \quad b' = \frac{\sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r b_r \varphi'_r(t)}{\sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r \varphi'_r(t)}, \quad c' = \frac{\sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r c_r \varphi'_r(t)}{\sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r \varphi'_r(t)}.$$

Zde jest $\varepsilon_r = \cos 0 = 1$ nebo $\varepsilon_r = \cos \pi = -1$, dle toho, je-li příslušná rotace ve směru výsledné rotace (osa l_0, m_0, n_0) nebo ve směru opačném (osa $-l_0$, $-m_0$, $-n_0$), jako v příslušném případu rovnoměrných rotací. Výsledná oblouková rychlost této nekonečně malé rotace v čase t jest:

$$\varphi'(t) = \sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \varphi'_r(t).$$

Výsledný pohyb jest sled nekonečně malých rotací touto obloukovou rychlostí kol osy, jež se rovnoběžně k sobě v prostoru pošinuje.

Tato proměnná osa má rovnice:

$$\frac{x-a'}{l_0} = \frac{y-b'}{m_0} = \frac{z-c'}{n_0}$$

nebo

$$\frac{x \cdot \sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r \varphi'_r(t) - \sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r a_r \varphi'_r(t)}{l_0} = \frac{y \sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r \varphi'_r(t) - \sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r b_r \varphi'_r(t)}{m_0}$$
$$= \frac{z \sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r \varphi'_r(t) - \sum\limits_{r=1}^{h} \varepsilon_r c_r \varphi'_r(t)}{n_0}, \tag{50}$$

jak obdržíme též přímo z rovnic (36). Geometrické místo těchto okamžitých os rotačních jest regulérní plocha, jejíž tvořitelky běží rovnoběžně. Kdybychom měli skládat jen 2 takové rotace, mohli bychom funkce $\varphi'_1(t)$ a $\varphi'_2(t)$ z (50) podobným způsobem eliminovati, jako u dvou rotací, kde se osy v jednom bodě protínají, a obdržíme rovnici roviny, jež je určena oběma danými osami rotace.

Může ještě pro určitý čas nastati případ, že

$$\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \varphi'_r(t) = 0,$$

výsledná osa rotační přejde v tomto okamžiku do nekonečna, a nekonečně malá rotace přejde v nekonečně malou translaci, jak jsme o tom obšírně pojednali u rovnoměrných rotací. Je-li

$$\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r \varphi'_r(t) = 0$$

pro každé t, obdržíme translaci bez rotace o rychlosti:

$$\sqrt{\left[\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r a_r \varphi'_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r b_r \varphi'_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} \varepsilon_r c_r \varphi'_r(t)\right]^2},$$

kde (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_h, b_h, c_h) jsou průseky os daných rotací s rovinou na nich kolmou.

Zbývá ještě obecný případ, kdy se rotační osy ani neprotínají, ani nejdou rovnoběžně. Tu jest výsledný pohyb sledem nekonečně malých pohybů šroubových. Okamžitá osa tohoto pohybu šroubového má dle (36) v čase t rovnice:

$$\frac{\varphi'(t) \cdot x - \sum_{r=1}^{h} a_r \varphi'_r(t) \cos \vartheta_r}{\sum_{r=1}^{h} l_r \varphi'_r(t)} = \frac{\varphi'(t) \cdot y - \sum_{r=1}^{h} b_r \varphi'_r(t) \cos \vartheta_r}{\sum_{r=1}^{h} m_r \varphi'_r(t)} = \frac{\varphi'(t) \cdot z - \sum_{r=1}^{h} c_r \varphi'_r(t) \cos \vartheta_r}{\sum_{r=1}^{h} n_r \varphi'_r(t)}, \tag{51}$$

kde a_r, b_r, c_r a $\cos \vartheta_r$ jsou na čase t závislé.

Těleso koná v každém časovém okamžiku t kol okamžité osy nekonečně malou rotaci s obloukovou rychlostí:

$$\varphi'(t) = \sqrt{\left[\sum_{r=1}^{h} l_r \varphi'_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} m_r \varphi'_r(t)\right]^2 + \left[\sum_{r=1}^{h} n_r \varphi'_r(t)\right]^2}$$

a nekonečně malou translaci směrem okamžité osy rychlostí:

$$\sum_{rs} \frac{\varphi'_r(t)\, \varphi'_s(t)}{\varphi'(t)} \delta_{rs} \sin \vartheta_{rs}.$$

Geometrické místo této okamžité osy je regulérní plocha, jež obecně jest závislá na funkcích $\varphi'_1(t)$, $\varphi'_2(t)$, ... $\varphi'_h(t)$.

Ježto jsme viděli, že u dvou rovnoběžných nebo v jednom bodě se protínajících os geometrické místo výsledné osy okamžité leží v rovině těchto os, rozřešíme ještě otázku, jaké geometrické místo okamžité osy obdržíme při skládání dvou libovolných rotací kol os, jež se neprotínají, ani nejdou rovnoběžně.

Vezmeme jen dvě rotace o obloukových drahách $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ kol dvou mimoběžných os. Rovnice okamžité osy pohybu šroubového v čase t zní dle (51):

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi'(t) \,.\, x - [a_1\varphi_1'(t) \cos\vartheta_1 + a_2\varphi'_2(t) \cos\vartheta_2]}{l_1\varphi'_1(t) + l_2\varphi'_2(t)} \\
&= \frac{\varphi'(t) \,.\, y - [b_1\varphi'_1(t) \cos\vartheta_1 + b_2\varphi'_2(t) \cos\vartheta_2]}{m_1\varphi'_1(t) + m_2\varphi'_2(t)} \\
&= \frac{\varphi'(t) \,.\, z - [c_1\varphi'_1(t) \cos\vartheta_1 + c_2\varphi'_2(t) \cos\vartheta_2]}{n_1\varphi'_1(t) + n_2\varphi'_2(t)}.
\end{aligned} \tag{52}$$

Body (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) jsou průseky daných os s rovinou kolmou k výsledné okamžité ose. Tuto rovinu můžeme vždy proložiti nejkratší vzdáleností daných os, takže (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) se stávají průseky této nejkratší vzdálenosti s danými osami; souřadnice a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 jsou pak na čase t nezávislé. Výsledná osa okamžitá jest stále kolmá k nejkratší vzdálenosti daných os a protíná ji v obráceném poměru příslušných rotorů $\varphi'_1(t)$ a $\varphi'_2(t)$, promítnutých do směru okamžité osy, tedy v poměru $\varphi'_2(t) \cos\vartheta_2 : \varphi'_1(t) \cos\vartheta_1$, kde $\cos\vartheta_1$ a $\cos\vartheta_2$ jsou na čase t závislé. Kdežto se tento poměr u rotací téhož druhu nemění, jest zde na čase t závislý.

Okamžitá osa opisuje regulérní plochu, kterou můžeme určiti eliminací času t z rovnic (52). Pro zjednodušení eliminace a výsledku volíme nejkratší vzdálenost δ daných os rotačních v ose X-ové, klademe tedy:

$$b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0, \quad l_1 = l_2 = 0.$$

Rovnice (52) okamžité osy zní pak:

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi'(t) \,.\, x - [a_1\varphi'_1(t) \cos\vartheta_1 + a_2\varphi'_2(t) \cos\vartheta_2]}{0} \\
&= \frac{\varphi'(t) \,.\, y}{m_1\varphi'_1(l) + m_2\varphi'_2(t)} = \frac{\varphi'(t) \,.\, z}{n_1\varphi'_1(t) + n_2\varphi'_2(t)}.
\end{aligned}$$

Společná hodnota těchto zlomků nemůže se stále rovnati ∞, proto musí čitatel prvního zlomku býti rovný 0 a naše dvojitá rovnice přejde ve dvě:

$$\varphi'(t)\,.\,x - [a_1\varphi'_1(t)\cos\vartheta_1 + a_2\varphi'_2(t)\cos\vartheta_2] = 0$$

$$\frac{y}{m_1\varphi'_1(t) + m_2\varphi'_2(t)} = \frac{z}{n_1\varphi'_1(t) + n_2\varphi'_2(t)}.$$

Uvážíme-li, že:

$$\cos\vartheta_1 = ll_1 + mm_1 + nn_1 = l_1\frac{l_1\varphi'_1(t) + l_2\varphi'_2(t)}{\varphi'(t)}$$

$$+ m_1\frac{m_1\varphi'_1(t) + m_2\varphi'_2(t)}{\varphi'(t)} + n_1\frac{n_1\varphi'_1(t) + n_2\varphi'_2(t)}{\varphi'(t)}$$

$$= \frac{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)\,\varphi'_1(t) + (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)\,\varphi'_2(t)}{\varphi'(t)}$$

$$= \frac{\varphi'_1(t) + \varphi'_2(t)\cos\vartheta}{\varphi'(t)}$$

$$\cos\vartheta_2 = ll_2 + mm_2 + nn_2 = \frac{\varphi'_1(t)\cos\vartheta + \varphi'_2(t)}{\varphi'(t)}$$

$$[\varphi'(t)]^2 = [l_1\varphi'_1(t) + l_2\varphi'_2(t)]^2 + [m_1\varphi'_1(t) + m_2\varphi'_2(t)]^2$$
$$+ [n_1\varphi'_1(t) + n_2\varphi'_2(t)]^2 = [\varphi'_1(t)^2] + [\varphi'_2(t)]^2$$
$$+ 2\varphi'_1(t)\,\varphi'_2(t)\cos\vartheta,$$

kde ϑ značí úhel směrů daných os, obdržíme:

$$\{[\varphi'_1(t)]^2 + [\varphi'_2(t)]^2 + 2\varphi'_1(t)\,\varphi'_2(t)\cos\vartheta\}\,x$$
$$- \{a_1\varphi'_1(t)\,[\varphi'_1(t) + \varphi'_2(t)\cos\vartheta] + a_2\varphi'_2(t)$$
$$.\times[\varphi'_1(t)\cos\vartheta + \varphi'_2(t)]\} = 0$$
$$(m_1z - n_1y)\,\varphi'_1(t) = -(m_2z - n_2y)\,\varphi'_2(t),$$

nebo

$$(x - a_1)\left[\frac{\varphi'_1(t)}{\varphi'_2(t)}\right]^2 + (2x - a_1 - a_2)\frac{\varphi'_1(t)}{\varphi'_2(t)}\cos\vartheta + x - a_2 = 0$$

$$\frac{\varphi'_1(t)}{\varphi'_2(t)} = -\frac{m_2z - n_2y}{m_1z - n_1y}.$$

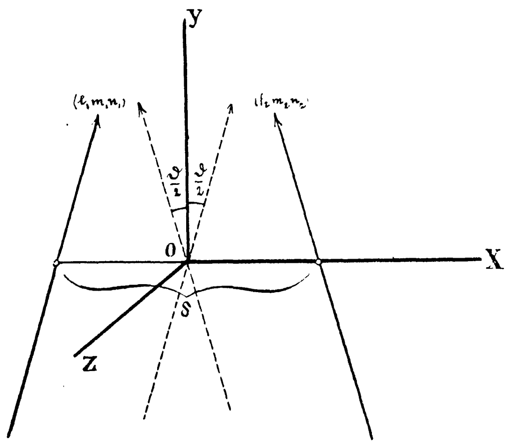
Z těchto dvou rovnic obdržíme eliminací výrazu $\frac{\varphi'_1(t)}{\varphi'_2(t)}$ pro hledané geometrické místo rovnici:

$$(x - a_1)\left(\frac{m_2z - n_2y}{m_1z - ny_1}\right)^2 - (2x - a_1 - a_2)\frac{m_2z - n_2y}{m_1z - n_1y}\cos\vartheta$$
$$+ x - a_2 = 0,$$

nebo

$$(x - a_1)(m_2 z - n_2 y)^2 - [(x - a_1) + (x - a_2)](m_2 z - n_2 y)$$
$$(m_1 z - n_1 y) \cos \vartheta + (x - a_2)(m_1 z - n_1 y)^2 = 0. \qquad (53)$$

Jest zajímavo, že tato regulérní plocha, v níž se geometrické místo okamžité osy nalézá, je zcela nezávislá na funkcích $\varphi'_1(t)$ a $\varphi'_2(t)$, t. j. na druhu daných rotací; jest určena již danými osami.



Obr. 4.

Rovnice této regulérní plochy obdrží jednoduchý tvar, položíme-li počátek do středu nejkratší vzdálenosti a stanovíme-li směry osy X-ové a Z-ové tak, aby půlily oba úhly vedlejší daných os. (Obr. 4.)

Za této podmínky jest:

$$a_1 = -\frac{\delta}{2}, \quad a_2 = \frac{\delta}{2}, \quad m_1 = m_2 = \cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$n_1 = -\sin\frac{\vartheta}{2}, \quad n_2 = \sin\frac{\vartheta}{2},$$

a rovnice (53) obdrží tvar:

$$\left(x + \frac{\delta}{2}\right)\left(z \cos\frac{\vartheta}{2} - y \sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2$$
$$- 2x\left(z^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} - y^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\vartheta$$
$$+ \left(x - \frac{\delta}{2}\right)\left(z \cos\frac{\vartheta}{2} + y \sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2 = 0$$

nebo

$$x\left(2z^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} + 2y^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} - 2z^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} \cos\vartheta\right.$$

$$\left. + 2y^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} \cos\vartheta\right) - \frac{\delta}{2}\, 4yz \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{\vartheta}{2} = 0$$

a z toho konečně plyne:

$$x(y^2 + z^2) - \frac{\delta}{\sin\vartheta}\, yz = 0. \tag{54}$$

To jest rovnice *Plückerova konoidu*. Geometrické místo okamžité osy pohybu, jenž resultuje ze dvou současných rotací různého druhu kol os mimoběžných nalézá se tedy na *Plückerově* konoidu. Poznali jsme ale, že se toto geometrické místo u dvou rotací různého druhu kol os, protínajících se v jednom bodě nebo jdoucích rovnoběžně, nalézá v rovině těchto os, a to musí sledovati též z rovnic (54). Protínají-li se dané osy, pak položíme $\delta = 0$ a obdržíme:

$$x(y^2 + z^2) = 0, \text{ tedy } x = 0.$$

To jest rovnice roviny zy, roviny daných os. Jsou-li osy rovnoběžné, položíme buď $\vartheta = 0$ nebo $\vartheta = \pi$, tedy $\sin\vartheta = 0$ a obdržíme z (54):

$$yz = 0.$$

Tato rovnice rozpadá se v rovnice dvě, neboť jest buď $y = 0$ nebo $z = 0$. První rovnice je rovnicí roviny xz, jest rovnicí roviny daných os pro $\vartheta = \pi$, vztahuje se tedy na případ antiparallelních os.

Druhá rovnice je rovnicí roviny xy, vztahuje se na případ os rovnoběžných. V pádu rotací stejného druhu redukuje se sice ono geometrické místo na jedinou přímku, avšak ta se nalézá též na tomto konoidu.

K bližšímu seznání získaného resultátu usoudíme následovně: Tvořitelka plochy jest okamžitá osa pohybu a nazveme-li zkráceně $\frac{\varphi'_1(t)}{\varphi'_2(t)} = \Phi(t)$ písmenem ψ a uvážíme-li, že

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi'_2(t)} = \sqrt{1 + \psi^2 + 2\psi \cos\vartheta},$$

mají směrové kosinusy tvořitelky tyto hodnoty:

$$l = 0, \quad m = \frac{m_1\varphi'_1(t) + m_2\varphi'_2(t)}{\varphi'(t)} = \frac{(1+\psi)\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi^2+2\psi\cos\vartheta}}$$

$$n = \frac{n_1\varphi'_1(t) + n_2\varphi'_2(t)}{\varphi'(t)} = \frac{(1-\psi)\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi^2+2\psi\cos\vartheta}}. \tag{55}$$

Tato tvořitelka protíná osu x-ovou, nejkratší vzdálenost daných os, v bodě:

$$a = \frac{a_1\varphi'_1(t)\cos\vartheta_1 + a_2\varphi'_2(t)\cos\vartheta_2}{\varphi'(t)}$$

$$= \frac{\delta}{2}\cdot\frac{\varphi'_1(t)[\varphi'_1(t)+\varphi'_2(t)\cos\vartheta] + \varphi'_2(t)[\varphi'_1(t)\cos\vartheta+\varphi'_2(t)]}{[\varphi'(t)]^2}$$

$$= \frac{\delta}{2}\cdot\frac{1-\psi^2}{1+\psi^2+2\psi\cos\vartheta}.$$

K zodpovědění otázky, pro kterou hodnotu ψ obdržíme určitou hodnotu a, musíme rovnici:

$$a = \frac{\delta}{2}\cdot\frac{1-\psi^2}{1+\psi^2+2\psi\cos\vartheta}$$

nebo (56)

$$\psi^2 + \frac{4a\cos\vartheta}{\delta+2a}\psi = 1 - \frac{4a}{\delta+2a}$$

řešiti dle ψ. Obdržíme dvě hodnoty ψ' a ψ'', jež hoví podmínkám:

$$\psi' + \psi'' = -\frac{4a\cos\vartheta}{\delta+2a}, \quad \psi'\psi'' = -1 + \frac{4a}{\delta+2a}.$$

Násobíme-li druhou podmínku $\cos\vartheta$ a sečteme obě, následuje

$$\psi' + \psi'' + \psi'\psi''\cos\vartheta = -\cos\vartheta,$$

a z toho

$$\psi'' = -\frac{\psi'+\cos\vartheta}{1+\psi'\cos\vartheta}.$$

Obdržíme tedy tutéž hodnotu pro a při

$$\psi = \psi' \text{ a } \psi = -\frac{\varphi'+\cos\vartheta}{1+\psi'\cos\vartheta},$$

t. j. bodem a nejkratší vzdálenosti jdou dvě tvořitelky, jež dle (55) mají tyto směrové kosinusy

$$l' = 0,\quad m' = \frac{(1+\psi')\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi'^2+2\psi'\cos\vartheta}}$$

$$n' = \frac{(1-\psi')\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi'^2+2\varphi'\cos\vartheta}}$$

a

$$l'' = 0,\quad m'' = \frac{(1+\psi'')\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi''^2+2\psi''\cos\vartheta}}$$

$$= \frac{(1-\psi')\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi'^2+2\psi'\cos\vartheta}} = n', \tag{57}$$

$$n'' = \frac{(1-\psi'')\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi''^2+2\psi''\cos\vartheta}}$$

$$= \frac{(1+\psi')\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi'^2+2\psi'\cos\vartheta}} = m'.$$

Uhel Θ, v němž se obě tvořitelky v bodě a nejkratší vzdálenosti protínají, je určen vzorcem

$$\cos\Theta = l'l'' + m'm'' + n'n''$$

$$= \frac{2(1-\psi'^2)\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{1+\psi'^2+2\psi'\cos\vartheta} = \frac{2a}{\delta}\sin\vartheta. \tag{58}$$

Z rovnice (56) obdržíme

$$\psi = \frac{-2a\cos\vartheta \pm \sqrt{\delta^2-4a^2\sin^2\vartheta}}{\delta+2a}. \tag{59}$$

Ježto ale ψ nemůže míti žádných komplexních hodnot, musí

$$\delta^2 \geqq 4a^2\sin^2\vartheta \quad \text{neboli} \quad -\frac{\delta}{2\sin\vartheta} \leqq a \leqq \frac{\delta}{2\sin\vartheta}. \tag{60}$$

Tím jsou nalezeny meze hodnoty a.

Pro mezní hodnoty a máme dle (58) a (59) tyto hodnoty pro φ a Θ:

$$\text{pro } a_0 = -\frac{\delta}{2\sin\vartheta} \text{ jest } \psi'_0 = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta - 1} = \psi''_0,$$

$$\Theta_0 = arc\cos(-1) = \pi,$$

$$\text{pro } a_3 = \frac{\delta}{2\sin\vartheta} \quad \text{jest } \psi''_3 = \frac{-\cos\vartheta}{\sin\vartheta + 1} = \psi''_3,$$

$$\Theta_3 = arc\cos 1 = 0.$$

Příslušné hodnoty směrových kosinusů obou tvořitelek v bodě $a_0 = -\dfrac{\delta}{2\sin\vartheta}$ jsou dle (57)

$$l'_0 = 0,\ m'_0 = \frac{(1+\psi'_0)\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi'^2_0+2\psi'_0\cos\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$n'_0 = \frac{(1-\psi'_0)\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi'^2_0+2\psi'_0\cos\vartheta}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$l''_0 = 0,\ m''_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad n''_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a v bodě $a_3 = \dfrac{\delta}{2\sin\vartheta}$:

$$l'_3 = 0,\ m'_3 = \frac{(1+\psi'_3)\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi'^2_3+2\psi'_3\cos\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$n'_3 = \frac{(1-\psi'_3)\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1+\psi'^2_3+2\psi'_3\cos\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$l''_3 = 0,\ m''_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad n''_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dvojitá tvořitelka v bodě a_3 půlí tedy pravý úhel mezi směry osy Y-ové a Z-ové, a v bodě a_0 půlí úhel vedlejší týchž směrů. Najdeme nyní tvořitelky v bodech $a_1 = -\dfrac{\delta}{2}$ a $a_2 = \dfrac{\delta}{2}$.

Pro $a_1 = -\frac{\delta}{2}$ máme

$$\psi'_1 = \infty,\ l'_1 = 0,\ m'_1 = \cos\frac{\vartheta}{2} = m_1,\ n'_1 = -\sin\frac{\vartheta}{2} = n_1,$$

$$\psi''_1 = -\frac{1}{\cos\vartheta},\ l''_1 = 0,\ m''_1 = -\sin\frac{\vartheta}{2},\ n''_1 = \cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$\Theta = arc\cos(-\sin\vartheta) = \frac{\pi}{2} + \vartheta.$$

První tvořitelka v bodě a_1 jest první daná osa, a druhá tvořitelka jest kolma na směr druhé dané osy.

Pro $a_2 = \frac{\delta}{2}$ máme

$$\psi'_2 = 0,\ l'_2 = 0,\ m'_2 = \cos\frac{\vartheta}{2} = m_2,\ n'_2 = \sin\frac{\vartheta}{2} = n_2$$

$$\psi''_2 = -\cos\vartheta,\ l''_2 = 0,\ m''_2 = \sin\frac{\vartheta}{2},\ n''_2 = \cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$\Theta = arc\cos(\sin\vartheta) = \frac{\pi}{2} - \vartheta.$$

První tvořitelka v bodě a_2 jest druhá daná osa, a druhá tvořitelka jest kolma na směr první dané osy.

Abychom obdrželi tvořitelky pro počátek, klademe $a_4 = 0$ a obdržíme

$$\psi'_4 = 1,\ l'_4 = 0,\ m'_4 = \frac{2\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2 + 2\cos\vartheta}} = 1,\ n'_4 = 0,$$

$$\psi''_4 = -1,\ l''_4 = 0,\ m''_4 = 0,\ n''_4 = 1$$

$$\Theta = arc\cos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

V počátku jest tedy první tvořitelka osa y-ová, a druhá osa z-ová. Ze všeho toho plyne, že se naše regulérní plocha nalézá mezi rovinami

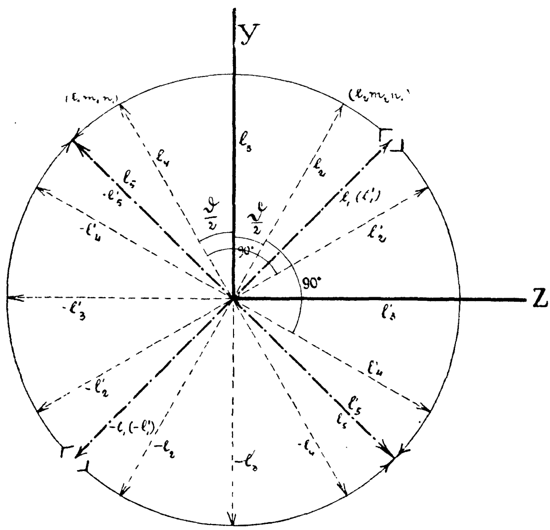
$$x = \frac{\delta}{2\sin\vartheta} \text{ a } x = -\frac{\delta}{2\sin\vartheta}.$$

V každé z těchto rovin máme dvojitou tvořitelku plochy a v každé jiné rovině mezi oběma těmito rovinami, stojící kolmo na nejkratší vzdálenosti, dvě příslušné tvořitelky, jež se na nejkratší vzdálenosti protínají. Přejdeme-li od roviny $x = \frac{\delta}{2 \sin \vartheta}$ k rovině $x = -\frac{\delta}{2 \sin \vartheta}$, vzrůstá úhel příslušné tvořitelky od 0 do π a sice jest pro

$$x = \frac{\delta}{2 \sin \vartheta}, \quad \frac{\delta}{2}, \quad 0, \quad -\frac{\delta}{2}, \quad -\frac{\delta}{2 \sin \vartheta},$$

$$\Theta = 0, \quad \frac{\pi}{2} - \vartheta, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \vartheta, \quad \pi.$$

První dvojitá tvořitelka (e_1 nebo e'_1 v obr. 5.) půlí úhel



Obr. 5.

osy y-ové a z-ové. Nalézá se v rovině $x = \frac{\delta}{2 \sin \vartheta}$. Blížíme-li se odsud druhé dané ose, vzrůstá úhel příslušné tvořitelky od 0 do $\frac{\pi}{2} - \vartheta$; v rovině $x = \frac{\delta}{2}$ svírají příslušné tvořitelky úhel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ a první spadá v jedno s druhou danou osou, kdežto druhá stojí na první dané ose kolmo (e_2 a e'_2). Jdeme-li dále až k počátku, vzrůstá úhel příslušných tvořitelek od

$\frac{\pi}{2} - \vartheta$ do $\frac{\pi}{2}$, v rovině $x = 0$ svírají t vořitelky pravý úhel a spadají v jedno s osou y-ovou a z-ovou, půlí tedy úhel a vedlejší úhel daných os (e_3 a e'_3). Blížíme-li se od středu nejkratší vzdáleností první dané ose, vzrůstá úhel od $\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2} + \vartheta$, v rovině $x = -\frac{\delta}{2}$ je tento úhel $\frac{\pi}{2} + \vartheta$ a první tvořitelka spadá s první danou osou v jedno. kdežto druhá stojí kolmo na druhé dané ose (e_4 a e'_4). Dále vzrůstá úhel příslušných tvořitelek od $\frac{\pi}{2} + \vartheta$ do π, v rovině $x = -\frac{\delta}{2\, sin\, \vartheta}$ jest tento úhel π, zde jest druhá dvojitá tvořitelka regulérní plochy a půlí vedlejší úhel osy y a z (e_5 a e'_5). Směry obou dvojitých tvořitelek jsou k sobě ko mé.

Každou tvořitelku možno vzít v opačném směru, ježto:

$$\frac{\varphi'_1(t)}{\varphi'_2(t)} = \frac{-\varphi'_1(t)}{-\varphi'_2(t)} = \psi(t),$$

proto protíná výslednice $-\varphi'_1(t)$ a $-\varphi'_2(t)$ nejkratší vzdálenost daných os v témž bodě jako resultanta $\varphi'_1(t)$ a $\varphi'_2(t)$. Obě spadají v tutéž přímku, ježto funkce $\psi(t)$ má v obou případech tutéž hodnotu, mají ale směr opačný. To následuje též z našich rovnic, uvážíme-li, že

$$\varphi'(t) = \pm\sqrt{[\varphi'_1(t)]^2 + [\varphi'_2(t)]^2 + 2\varphi'_1(t)\,\varphi'_2(t)\, cos\, \vartheta},$$

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi'_2(t)} = \pm\sqrt{1 + \psi^2 + 2\psi\, cos\, \vartheta},$$

kde v případu $\varphi'_1(t)$ a $\varphi'_2(t)$ musíme vzíti znaménko $+$, v případu $-\varphi'(t)$ a $-\varphi'_2(t)$ znaménko $-$.

Vezmeme-li tedy též v úvahu opačné směry tvořitelek, máme:

v rovině	$x = \frac{\delta}{2\, sin\, \vartheta}$				$x = \frac{\delta}{2}$				$x = 0$			
tvořitelky	e_1	e'_1	e_1	$-e'_1$	e_2	e'_2	e_2	$-e'_2$	e_3	e'_3	e_3	$-e'_3$
	$-e_1$	$-e'_1$	$-e_1$	e'_1	$-e_2$	$-e'_2$	$-e_2$	e'_2	$-e_3$	$-e'_3$	$-e'_3$	e'_3
jež svírají úhel	0		π		$\frac{\pi}{2} - \vartheta$		$\frac{\pi}{2} + \vartheta$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	

v rovině	$x = -\frac{\delta}{2}$				$x = -\frac{\delta}{2 \sin \vartheta}$			
tvořitelky	e_4 / $-e_4$	e'_4 / $-e'_4$	e_4 / $-e_4$	$-e'_4$ / e'_4	e_5 / $-e_5$	e'_5 / $-e'_5$	e_5 / $-e_5$	$-e'_5$ / e'_5
jež svírají úhel	$\frac{\pi}{2} + \vartheta$		$\frac{\pi}{2} - \vartheta$		π		0	

Ve zvláštních případech, kdy $\vartheta = 0$ nebo $\vartheta = \pi$, obdržíme v každém bodě nejkratší vzdálenosti jen jednu tvořitelku naší plochy, neboť pak

$$a = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1 \mp \psi}{1 \pm \psi}$$

a tato rovnice prvního stupně dá pro jednu hodnotu a jen jedno řešení $\psi = \psi'$. Směrové kosinusy tvořitelky jsou:

$$\text{pro } \vartheta = 0, \; l'_0 = 0, \; m' = \frac{1 + \psi'}{\pm\sqrt{1 + \psi'^2 + 2\psi'}} = \pm 1, \; n' = 0,$$

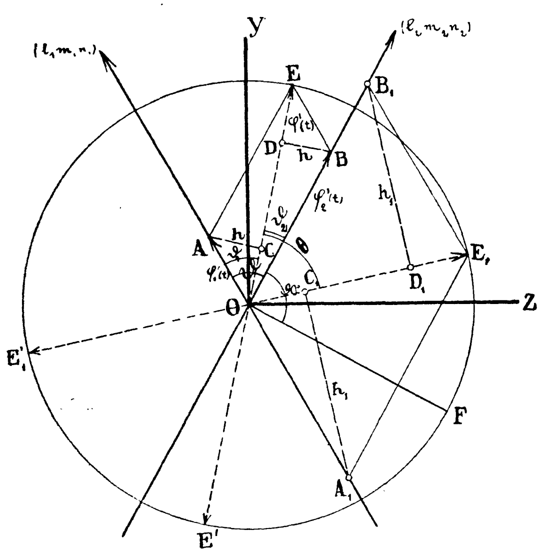
$$\text{pro } \vartheta = \pi, \; l' = 0, \; m' = 0, \; n' = \frac{1 - \psi'}{\pm\sqrt{1 + \psi'^2 - 2\psi'}} = \pm 1.$$

Naše regulérní plocha stává se rovinou $z = 0$ nebo $y = 0$ a dosahuje od $x = \frac{\delta}{2 \sin \vartheta} = \infty$ do $x = -\frac{\delta}{2 \sin \vartheta} = -\infty$.

Závěrek.

Geometrické místo okamžité osy pohybu, jejž obdržíme skládáním dvou libovolných rotací různého druhu kol os mimoběžných, nachází se na regulérní ploše. Tato plocha jest *Plückerův konoid.* Určíme nyní tuto plochu cestou více konstruktivní.

Nejdříve dokážeme, že se v každém bodě nejkratší vzdálenosti daných os protínají dvě tvořitelky regulérní plochy a stanovíme zároveň úhel mezi oběma. Abychom nalezli výslednou okamžitou osu rotace v libovolném čase t, naneseme rotory $\varphi'_1(t)$ a $\varphi'_2(t)$ v jednom bodě a sice ve středu O nejkratší vzdálenosti δ a konstruujeme z nich rovnoběžník. (Obr. 6.) Úhlopříčka jeho udává nám obloukovou rychlost $\varphi'(t)$ výsledné okamžité rotace co do směru i velikosti v prostoru. Nejkratší vzdálenost os daných rotací rozdělíme v opačném poměru příslušných rotorů, promítnutých do směru resultanty $\varphi'(t)$, tedy v poměru $OD : OC$ a vedeme tím bodem rovnoběžku k úhlopříčce $\varphi'(t)$. Tato přímka jest výslednou okamžitou osou pohybu, tedy tvořitelka plochy regulérní. Ukážeme, že obdržíme týž poměr $OD : OC$, tedy týž průsek s nejkratší vzdáleností ještě pro jiný



Obr. 6.

směr resultanty $\varphi'(t)$. Značí-li ϑ_1 a $\vartheta_2 = \vartheta - \vartheta_1$ úhly, jež svírá resultanta $\varphi'(t)$ se směry daných os, jest

$$OD : OC = h \cot \vartheta_2 : h \cot \vartheta_1 = tg\, \vartheta_1 : tg\, \vartheta_2$$
$$= tg\, \vartheta_1 : tg\, (\vartheta - \vartheta_1).$$

Označíme-li tento poměr v, obdržíme rovnici

$$tg\, \vartheta_1 \frac{1 + tg\, \vartheta\, tg\, \vartheta_1}{tg\, \vartheta - tg\, \vartheta_1} = v$$

nebo

$$tg^2\, \vartheta_1 + \frac{1 + v}{tg\, \vartheta} \cdot tg\, \vartheta_1 = v.$$

Pro týž poměr $v = OD : OC$ obdržíme z této rovnice dvě hodnoty pro $tg\,\vartheta_1$ a dva úhly ϑ_1 a ϑ'_1. Mezi kořeny této kvadratické rovnice platí dva vztahy

$$tg\,\vartheta_1 + tg\,\vartheta'_1 = -\frac{1+v}{tg\,\vartheta},$$
$$tg\,\vartheta_1\, tg\,\vartheta'_1 = -v,$$

a proto

$$tg\,(\vartheta_1 + \vartheta'_1) = \frac{tg\,\vartheta_1 + tg\,\vartheta'_1}{1 - tg\,\vartheta_1\, tg\,\vartheta'_1} = -\frac{1+v}{tg\,\vartheta} : (1+v)$$
$$= -\frac{1}{tg\,\vartheta} = tg\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right).$$

Z toho plyne

$$\vartheta_1 + \vartheta'_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta \text{ neboli } \vartheta_1 + \vartheta'_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta \pm \pi.$$

Za účelem konstrukce úhlu $\vartheta'_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta - \vartheta_1$ veďme $OF \perp OB$ a $\sphericalangle FOE_1 = \vartheta_1$, pak jest $\sphericalangle AOE_1 = \vartheta'_1$ a OE_1 hledaná resultanta, jež odpovídá téže hodnotě v a tím i témuž bodu nejkratší vzdálenosti δ přísluší jako resultanta OE. Úhel

$\vartheta'_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta \pm \pi - \vartheta_1$ vede nás k resultantě OE'_1, tato ale nalézá se v téže přímce s OE_1, jen že jest opačného směru. Stejně hoví naší úloze též hodnota $\vartheta_1 \pm \pi$ pro ϑ_1 a vede k resultantě OE', jež se nalézá v téže přímce s OE, ale má opačný směr. Jest to resultanta pro $-\varphi'_1(t)$ a $-\varphi'_2(t)$.

Úhel Θ příslušných tvořitelek, jež odpovídají téže hodnotě v a proto týmž bodem nejkratší vzdálenosti jdou, dává výraz

$$\cos\Theta = \cos(\vartheta'_1 - \vartheta_1) = \cos\vartheta'_1 \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta'_1 \sin\vartheta_1$$
$$= \cos\vartheta'_1 \cos\vartheta_1 (1 + tg\,\vartheta'_1\, tg\,\vartheta_1)$$
$$= \frac{\sin(\vartheta'_1 + \vartheta_1)}{tg\,\vartheta'_1 + tg\,\vartheta_1}(1 + tg\,\vartheta'_1\, tg\,\vartheta_1) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)}{-\frac{1+v}{tg\,\vartheta}}(1 - v)$$
$$= \frac{v-1}{v+1}\sin\vartheta.$$

Volíme-li nejkratší vzdálenost δ za osu x-ovou, střed její za počátek, a stanovíme-li směr osy y-ové a z-ové tak, aby půlily úhel a vedlejší úhel daných os (obr. 4. a 6.), pak jest

$$v = \frac{\frac{\delta}{2} + x}{\frac{\delta}{2} - x} = \frac{\delta + 2x}{\delta - 2x},$$

kde x značí souřadnici průseku tvořitelky OE a OE_1 na nejkratší vzdálenosti δ. Dosazením této hodnoty do výrazu pro $cos\ \Theta$ následuje

$$cos\ \Theta = \frac{2x}{\delta}\ sin\ \vartheta,$$

týž výraz jako v (58). Souřadnice x musí tedy hověti podmínce

$$-1 \leqq \frac{2x}{\delta}\ sin\ \vartheta \leqq 1,$$

nebo

$$-\frac{\delta}{2\ sin\ \vartheta} \leqq x \leqq \frac{\delta}{2\ sin\ \vartheta},$$

t. j. naše regulérní plocha nalézá se mezi rovinami

$$x = -\frac{\delta}{2\ sin\ \vartheta} \text{ a } x = \frac{\delta}{2\ sin\ \vartheta}.$$

Rovnice tvořitelky OE (obr. 6.) jest

$$z = y\ tg\left(\vartheta_1 - \frac{\vartheta}{2}\right),$$

rovnice tvořitelky OE_1

$$z = y\ tg\left(\vartheta'_1 - \frac{\vartheta}{2}\right),$$

a obou tvořitelek dohromady

$$\left[z - y\ tg\left(\vartheta_1 - \frac{\vartheta}{2}\right)\right]\left[z - y\ tg\left(\vartheta'_1 - \frac{\vartheta}{2}\right)\right] = 0.$$

Tato rovnice platí pro všechny tvořitelky plochy regulérní, třeba jen za ϑ_1 a $\vartheta'_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta - \vartheta_1$ dosadit příslušné hodnoty proměnné. Abychom obdrželi hledanou rovnici plochy regulérní, musíme do této rovnice na místě ϑ_1 a ϑ'_1 zavésti souřadnici x.

Provedením násobení obdržíme

$$z^2 - zy\left[tg\left(\vartheta'_1 - \frac{\vartheta}{2}\right) + tg\left(\vartheta'_1 - \frac{\vartheta}{2}\right)\right]$$
$$+ y^2\, tg\left(\vartheta_1 - \frac{\vartheta}{2}\right) tg\left(\vartheta'_1 - \frac{\vartheta}{2}\right) = 0,$$

nebo

$$y^2 \sin\left(\vartheta_1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\vartheta'_1 - \frac{\vartheta}{2}\right)$$
$$- yz\left[\sin\left(\vartheta_1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\vartheta'_1 - \frac{\vartheta}{2}\right)\right]$$
$$+ \cos\left(\vartheta_1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\vartheta'_1 - \frac{\vartheta}{2}\right)$$
$$+ z^2 \cos\left(\vartheta_1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\vartheta'_1 - \frac{\vartheta}{2}\right) = 0.$$

Součiny sinusů a kosinusů můžeme vyjádřiti rozdílem a součtem dvou kosinusů, tedy

$$\frac{y^2}{2}\left[\cos\left(\vartheta'_1 - \vartheta\right) - \cos\left(\vartheta'_1 + \vartheta_1 - \vartheta\right)\right] - yz \sin\left(\vartheta'_1 + \vartheta_1 - \vartheta\right)$$
$$+ \frac{z^2}{2}\left[\cos\left(\vartheta'_1 - \vartheta_1\right) + \cos\left(\vartheta'_1 + \vartheta_1 - \vartheta\right)\right] = 0.$$

Dosadíme-li zde $\vartheta'_1 - \vartheta_1 = 0$ a $\vartheta'_1 + \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta$, obdržíme

$$\tfrac{1}{2}(y^2 + z^2) \cos \Theta - yz = 0,$$
$$(y^2 + z^2)\, \frac{x}{\delta} \sin \vartheta - yz = 0,$$

nebo konečně

$$x(y^2 + z^2) - \frac{\delta}{\sin \vartheta}\, yz = 0,$$

tutéž rovnici jako v (54).

(Z němčiny přeložil *V. Pokorný*, suppl. učitel v Rokycanech.)