Josef Kounovský

Vzájemná oskulace kuželoseček ve stupni vyšším

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 5, 465--484

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122622

Vzájemná oskulace kuželoseček ve stupni vyšším.

Napsal prof. dr. Jos. Kounovský.

I. Úvod.

1. Kuželosečka stanovena jest obecně pěti určovacími prvky, které mohou býti body i tečnami. Tečna s bodem dotyčným zastupuje dva určovací prvky, t. dva nekonečně blízké body nebo dvě nekonečně blízké tečny. Známe-li v bodě kuželosečky oskulační kružnici, t. j. kružnici mající s kuželosečkou tři nekonečně blízké body společné, zastupuje tato znalost křivosti tři určovací prvky. Rovněž podmínkou, aby kuželosečka oskulovala v určitém bodě jinou kuželosečku, t. j. měla s ní v tomto bodě touž křivost, vytčeny jsou tři určovací její prvky.

Za dané podmínky oskulační dotyku trojbodového určena jest tedy kuželosečka ještě dvěma dalšími prvky. Je-li sestrojiti kuželosečku oskulující danou kuželosečku v daném bodě ve stupni vyšším, tedy dotykem čtyřbodovým, stačí k určení jejímu ještě další pátý prvek, bod nebo tečna.

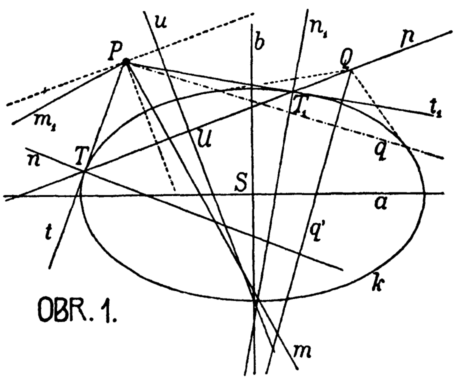
2. Při sestrojování kuželoseček sluší míti vždy na mysli určení jich os nebo sdružených průměrů, hlavně z důvodu prakticko-konstruktivního. Sestrojujeme-li kuželosečku, v jejímž určení nachází se oskulační podmínka v některém jejím daném bodě, poslouží nám v každém případě známost sestrojování poloměrů křivosti kuželoseček užitím Steinerovy paraboly, jež mistrně provedl dvorní rada Pelz*). Zmíníme se tedy předem o theorii Steinerovy paraboly a její applikaci při sestrojování poloměrů křivosti kuželoseček, pak poukážeme ke skutečnosti,

---

*) V práci: »Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollalien eines Steiner'schen Satzes«. Zased. zprávy král. čes. společ. nauk, ročník 1879. Praha 1880.

že sestrojování kuželoseček za dané podmínky vzájemného dotyku trojbodového jest známostí zmíněné paraboly řešeno a po té přistoupíme k vlastnímu předmětu tohoto článku.

3. Uvažujeme-li v rovině kuželosečky k (Obr. 1.) svazek paprskový o vrcholu P, tu obalují kolmé reciproké poláry q' všech paprsků q tohoto svazku touž parabolu.



OBR. 1.

Že obalová křivka křivého svazku kolmých reciprokých polár q' jest kuželosečkou, lze posouditi z projektivnosti jeho s řadou pólů Q paprsků q a tedy s paprskovým svazkem o vrcholu P. Poněvadž do toho svazku patří též nekonečně vzdálená přímka roviny kuželosečky, jakožto kolmá reciproká polára paprsku spojujícího bod P se středem S uvažované kuželosečky, jest obalová kuželosečka polár q' skutečně parabolou, již dvorní rada Pelz nazval „parabolou Steinerovou" a o jejíž existenci podal krásný důkaz v jiné své práci*). Označíme parabolu tu průběhem pojednání vždy Π.

Tečnami této paraboly jsou dle definice také:

α) Osy a, b kuželosečky k, jakožto reciproké poláry paprsků bodem P kolmo k nim sestrojených.

β) Pravoúhlá dvojina mm_1 paprskové involuce, kterou indukuje kuželosečka k v bodě P.

*) »Die Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades.« Sitzungsber. der kais. Akad., sv. LXIX., Vídeň 1874.

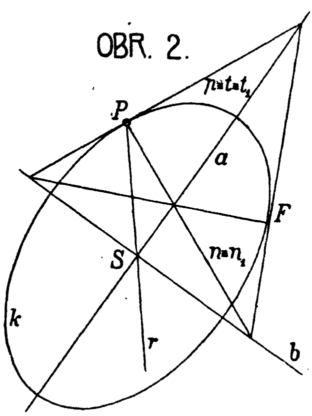
γ) Polára p bodu P, jakožto kolmá reciproká polára paprsku bodem P na ni kolmo sestrojeného.

δ) Normály n a n_1 sestrojené v dotyčných bodech T a T_1 tečen, jež procházejí bodem P na kuželosečku.

ε) Přímka $u \perp p$ vztyčená na p ve středu U bodové involuce, indukované kuželosečkou na p, jsouc kolmou reciprokou polárou paprsku sestrojeného bodem P rovnoběžně s jeho polárou p.

4. Blíží-li se bod P uvažované kuželosečce k a padne-li konečně na ni, zůstává vše o Steinerově parabole v platnosti. Poměry konstruktivní utváří se pak následovně.

OBR. 2.



Obě tečny t a t_1, sestrojené dříve bodem P na kuželosečku, stotožní se nyní v tečně p, sestrojené v bodě P na k. (Obr. 2.). Obě normály n a n_1 se rovněž stotožní či stanou se normálami bezprostředně sousedními, a průsečík jich C jest středem křivosti kuželosečky k pro bod P. Bod C jeví se tedy býti průsečíkem dvou sousedních tečen Steinerovy paraboly Π čili jest dotyčným bodem normály n bodu P na parabole Π, která jest úplně určena osami kuželosečky k a tečnou a normálou v bodě P. Střed křivosti C možno tedy rýsovati užitím věty Brianchonovy.

Spojnice r uvažovaného bodu P na kuželosečce a jejího středu S jest řídící přímkou příslušné paraboly Π, ježto $p \perp n$,

$b \perp a$. Ohnisko F paraboly Π sestrojí se jako diagonální roh úplného čtyřstranu $abpn$, který neleží na diagonální straně PS. Bod C možno pak i bez věty Brianchonovy snadno rýsovati.

Je-li uvažovaná kuželosečka k hyperbolou, můžeme pro parabolu Π určiti ještě dvě charakteristické další tečny. Sestrojíme-li totiž bodem P paprsky rovnoběžné s asymptotami, nacházejí se jejich póly vzhledem ke kuželosečce k v průsečících tečny p a asymptot, i jsou kolmice v těchto průsečících na asymptoty vztyčené rovněž tečnami paraboly Π dle definice.

Je-li konečně uvažovaná kuželosečka k parabolou, určíme pro kterýkoli její bod P příslušnou parabolu Steinerovu třemi tečnami a to p, n a osou a paraboly uvažované, jakožto vrcholovou tečnou pomocné paraboly Π. Jestiť střed dané paraboly v nekonečnu, tedy paprsek sestrojený bodem P rovnoběžně s osou a paraboly jest řídící přímkou paraboly Π. Osa a jest společnou vrcholovou tečnou Steinerových parabol pro všechny body kuželosečky uvažované.

Známo-li u kuželosečky ohnisko G, dospíváme opět rychle k tečně paraboly Steinerovy pro kterýkoli její bod P. Kolmou reciprokou polárou pro paprsek PG vzhledem ke kuželosečce dané jest totiž kolmice sestrojená naň v ohnisku G.

Pro různá určení dané kuželosečky k vytváří se konstrukce poloměru křivosti jejích bodů různě, vždy možno však použíti paraboly Steinerovy a větou Brianchonovou sestrojiti střed křivosti, jak podrobně ukázal dvorní rada Pelz v citované již práci.

5. Známost předchozí konstrukce poloměru křivosti v bodě kuželosečky podává nám ihned sestrojování kuželoseček za dané podmínky dotyku trojbodového. Pro libovolné jinak určení dlužno jen konstruovati Steinerovu parabolu pro bod oskulace vzhledem ke kuželosečce hledané. Určena jest tečnou, normálou se středem křivosti ($\equiv$ tečna s bodem dotyčným), a potřebnou ještě (čtvrtou) její tečnu stanovíme z dalších podmínek, jež určují danou kuželosečku; abychom ji sestrojili, snažíme se vždy sestrojiti paprsek procházející bodem oskulace a jeho pól, nacházející se na tečně kuželosečky v bodě oskulace sestrojené: tím prochází již k paprsku uvažovanému kolmá další tečna paraboly Steinerovy.

Konstrukce paraboly Π (vlastně čtvrté její tečny) neposkytuje obtíží, když kromě podmínky oskulační určena jest kuželosečka ještě na př. ohniskem, nebo středem, pólem a příslušnou polárou, tečnou s bodem dotyčným, dvěma body, dvěma tečnami, tečnou s bodem dotyčným a pod., i když prvky určovací (body nebo tečny) jsou sdruženě imaginární.

Sestrojíme-li pro parabolu Steinerovu bodu oskulace vzhledem ke kuželosečce hledané řídící přímku, jest tato jejím průměrem. Na tom určí se střed kuželosečky buď jako střed involuce indukované na průměru kuželosečkou, nebo pomocí průměru jiného.

Středem procházející tečny Steinerovy paraboly jsou osami konstruované kuželosečky, která jest již úplně určena, neboť i omezení os jest snadným.

II. Strojení kuželoseček za dané podmínky dotyku čtyřbodového.

6. Konstrukci kuželosečky oskulující danou kuželosečku ve stupni vyšším, tedy dotykem čtyřbodovým, ozřejmíme, pokládáme-li dotyk ten za krajní polohu kuželoseček dvojnásobně se dotýkajících pro případ, že oba body dotyčné splynou.

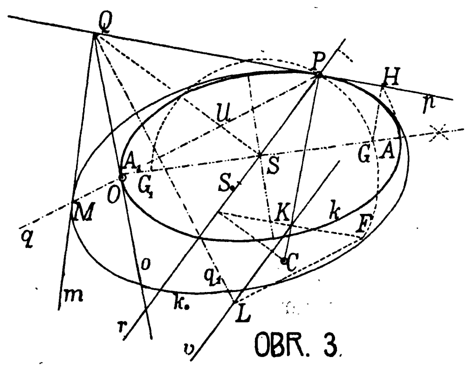
Uvažujeme-li v obr. 1. u kuželosečky k parabolu Steinerovu Π příslušnou libovolnému bodu P její roviny a uvedeme-li si na paměť všechny zvláštní její tečny vytčené v čl. 3., seznáváme, že pro každou jinou kuželosečku, která dotýká se kuželosečky k dvojmo v dotyčných bodech T a T_1 tečen sestrojených k ní bodem P, jest parabola Steinerova příslušící témuž bodu P totožná s parabolou Π, majíc s ní více tečen společných než k určení paraboly jest třeba.

Vlastnost právě vytčená podrží patrně platnost i pro případ, kdy dotyčné body T a T_1 obou (a všech) kuželoseček o společném dvojnásobném dotyku splynou. Odtud plyne věta:

Kuželosečky, mající v společném bodu dotyk čtyřbodový, mají pro ten bod i společnou Steinerovu parabolu.

Kuželosečky o společném čtyřbodovém dotyku tvoří řadu kuželoseček, u níž čtyři základní přímky splynuly. Podrží tedy i zde platnost známá věta: *Středy kuželoseček řady jakožto póly nekonečně vzdálené přímky roviny nacházejí se na téže přímce.* Pro kuželosečky dvojnásobného dotyku (Obr. 1.) jest přímkou tou spojnice bodu P a středu U sdružené tětivy TT_1, pro kuželosečky dotyku čtyřbodového v bodu P jest to spojnice bodu P a středu kuželosečky dané. Toto geometrické místo středů kuželoseček uvažovaných jest pak řídící přímkou paraboly Steinerovy pro bod P.

Užitím této pomocné paraboly sestrojíme snadno kuželosečku o daném dotyku čtyřbodovém.



OBR. 3.

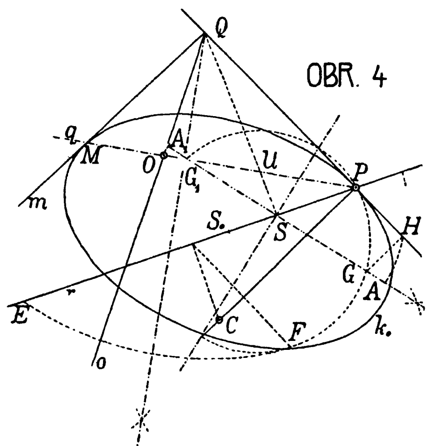
7. *Kuželosečka určena čtyřbodovým dotykem a dalším bodem.*

Danou kuželosečku k_0 určíme vzhledem k problému nejjednodušeji bodem P, příslušným středem křivosti C a středem S_0, neboť určena tím ihned pomocná parabola Π svou řídící přímkou $r \equiv PS_0$ a tečnou PC s bodem dotyčným C. Kdyby kuželosečka k_0 byla určena jinak, zjednáme si parabolu pomocnou dle citovaného pojednání dvorního rady Pelze.

Kuželosečka k, již dlužno rýsovati, budiž určena mimo čtyřbodový dotyk v bodě P ještě bodem O (Obr. 3.). V tomto bodě snažíme se sestrojiti tečnu kuželosečky k. Jejím průsečíkem Q s tečnou p v bodě P sestrojenou prochází kolmá reciproká polára q_1 k přímce $q \equiv PO$. Ježto q_1 jest tečnou paraboly Π již určené, můžeme ji sestrojiti, znajíce její směr kolmý ku q.

Užitím tečny PC s bodem dotyčným C a řídící přímky r sestrojíme ohnisko F a vrcholovou tečnu v pomocné paraboly. Sestrojíme-li ohniskem F rovnoběžku se směrem q, protíná vrcholovou tečnu v v bodě L, jímž prochází tečna q_1. Mohli bychom ji sestrojiti ovšem též větou Brianchonovou.

Přímka q_1 protíná tedy tečnu p v pólu Q přímky q, i jest QO tečnou hledané kuželosečky k v bodě O. Spojnice půlícího bodu U tětivy OP s pólem Q určuje na přímce r již střed S kuželosečky k. Osy kuželosečky k jsou tečnami pomocné paraboly a sestrojí se jako osy úhlu FSP a vedlejšího. Sestrojíme-li kružnici opsanou trojúhelníku určenému tečnou a normálou



v bodě P a osou kuželosečky, protíná kružnice druhou osu v ohniskách; v obr. vycházejí reálná ohniska G a G_1. Označíme-li H patu kolmice sestrojené ohniskem G na tečnu p, jest $SH = SA = SA_1$ hlavní poloosou výsledné kuželosečky, již možno přesně rýsovati.

8. ***Kuželosečka určena čtyřbodovým dotykem a tečnou.***

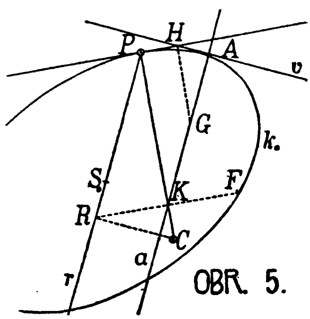
Kuželosečka daná k_0 vytčena opět středem S_0 a bodem P s příslušným středem křivosti C, čímž úplně jest stanovena parabola Π pro bod P jako v případě předešlém (Obr. 4.)

Výsledná kuželosečka k nechť dotýká se kuželosečky k_0 v bodě P dotykem čtyřbodovým a má za tečnu přímku o.

Snahou naší v tomto případě jest získati na tečně o dotyčný bod O kuželosečky. Za tím účelem sestrojíme poláru q průsečíku Q tečny o a tečny p v bodě P kuželosečky. Sdružená kolmá polára q_1 bodem Q procházející jest tečnou paraboly Π a možno ji rýsovati, sestrojíme-li ohnisko F paraboly jako v případě předešlém, jako osu oblouku EF o středu Q, kde E nachází se na řídící přímce r paraboly. Pak polára q procházejíc bodem P stojí kolmo na sdružené přímce q_1 a protíná tečnu o v bodě dotyčném O.

Další konstrukce kuželosečky k provedena jako v případu předchozím.

Paraboly dotyku čtyřbodového. Kuželosečka k_0 určena jako v případech předešlých (Obr. 5.) Patrně existuje jediná para-



OBR. 5.

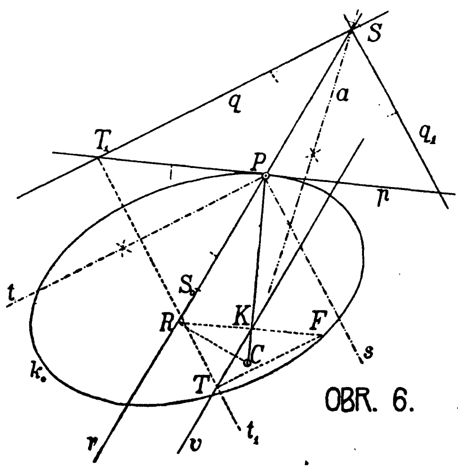
bola k mající v bodě P s danou kuželosečkou k_0 dotyk čtyřbodový. Její střed v nekonečnu udává řídící přímka $r \equiv PS$ paraboly Steinerovy, jež udává tedy zároveň směr osy paraboly výsledné.

Ježto dle definice jsou osy kuželosečky tečnami Steinerovy paraboly pro kterýkoli bod kuželosečky, sestrojí se osa a paraboly k jako tečna paraboly Π; jsouc rovnoběžná s její řídící přímkou jest tečnou vrcholovou. Sestrojí se $CR \perp r$, $RK \perp PC$, bodem K prochází $\bar{a} \parallel r$. Ohnisko G oskulující paraboly obdržíme jako půlící bod mezi průsečíkem tečny a normály na ose; sestrojíme-li ohniskem kolmici na tečnu, prochází její patou tečna vrcholová paraboly k, kterou možno již přesně narýsovati.

9. ***Rovnostranné hyperboly oskulující danou kuželosečku ve stupni vyšším.***

Lze snadno ukázati možnost, že pro každý bod kuželosečky existuje jedna rovnostranná hyperbola mající v bodě tom s kuželosečkou danou dotyk čtyřbodový.

Všecky kuželosečky dotýkající se dané kuželosečky k_0, již zvolíme opět středem S_0, bodem P a příslušným středem křivosti C (Obr. 6.), v bodě P dotykem čtyřbodovým možno považovati za krajní případ svazku kuželoseček, v němž všechny základní body splynuly.



OBR. 6.

Jak známo, tvoří průsečné body libovolné přímky s kuželosečkami svazku dvojiny involuce. Uvažujeme-li zvláště involuci tuto na nekonečně vzdálené přímce roviny *) a promítneme-li ji paprskovou involucí ze středu P, jsou dvojiny této paprskové involuce směry asymptot kuželoseček svazku, určujíce jejich nekonečně vzdálené body, ať již reálné či imaginárné. Tečna p společná v bodě P všem kuželosečkám svazku jest patrně v uvažované involuci paprskem dvojným. Oba dvojné paprsky tvoří

*) C. Beyel: »Über Oskulation und vierpunktige Berührung von Kegelschnitten.« Hoffmannův Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht, 19. ročník, Lipsko 1888.

s kteroukoli dvojinou involuce čtveřinu harmonických paprsků a dle toho rýsoval by se druhý dvojný paprsek. Ježto však asymptoty kuželosečky jsou dvojnými elementy involuce sdružených průměrů a oddělují každou jich dvojinu harmonicky a jelikož v bodě P tečna p a průměr $r \equiv PS_0$ udávají směr jedné dvojiny sdružených průměrů (pro všechny kuželosečky svazku) a oddělují tedy harmonicky každou dvojinu involuce o středu P, jest nutně přímka r druhým dvojným paprskem této involuce.

V každé paprskové involuci vyskytne se obecně jedna dvojina paprsků vzájemně kolmých, což ukazuje na existenci jedné rovnostranné hyperboly v našem svazku kuželoseček, t. j. jedné rovnostranné hyperboly k dotýkající se dané kuželosečky k_0 v daném bodě P dotykem čtyřbodovým. Směry s a t jejích asymptot rozpolují úhly mezi dvojnými paprsky p a r involuce o středu P.

Ze směrů asymptot a podmínky oskulační možno již hyperbolu rýsovati, v našem případě postačí úplně jeden z obou známých směrů, na př. t.

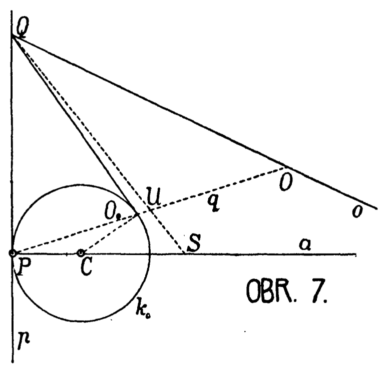
Dle čl. 4. rýsujeme nyní snadno asymptotu $q \parallel t$ za známé podmínky, že průsečíkem asymptoty a tečny p kuželosečky prochází tečna příslušné Steinerovy paraboly ve směru k asymptotě kolmém. Sestrojíme tedy ohnisko F a vrcholovou tečnu v paraboly Π, dále pak sestrojíme její tečnu $t_1 \perp t$, učinivše $FT \parallel t$, $t_1 \perp FT$. Průsečíkem T_1 přímky t_1 a tečny p prochází asymptota q hledané rovnostranné hyperboly k, ve směru t. Asymptota protíná přímku r ve středu S hyperboly, přímo sestrojí se již druhá asymptota $q_1 \perp q$ a dle polohy bodu P hlavní osa a hyperboly, kterouž možno již známými přesnými konstrukcemi rýsovati.

10. *Oskulační kružnice dotyku čtyřbodového.*

Jelikož dle článku předešlého jest tečna p v bodě P dotyku čtyřbodového se svým sdruženým průměrem r dvojinou směrů sdružených průměrů pro každou kuželosečku oskulující danou v bodě P ve stupni vyšším a jelikož involuce sdružených průměrů kružnice jest pravoúhlá, možno sestrojiti oskulační kružnice dotyku čtyřbodového jen pro ty body kuželosečky dané, jichž $p \perp r$, tedy toliko ve vrcholech kuželosečky. Již ze zákona pravoúhlé souměrnosti vyvodíme, že ve vrcholu kuželosečky není možná zříditi kružnici dotyku trojbodového. I určují kružnice dotyku čtyřbodového ve vrcholech kuželosečky její křivost. Konstrukce středů těchto kružnic jsou známy.

Strojení kuželosečky oskulující danou kružnici v daném bodě ve stupni vyšším.

Bod ten musí býti dle úvahy právě předcházející vrcholem kuželosečky, pro který znám jest střed křivosti. Parabola Steinerova zvrhne se v tomto případu v osu kuželosečky daným vrcholem procházející (osa ta jest zároveň vrcholovou tečnou i řídící přímkou paraboly) a v nekonečnou přímku roviny. Úlohu lze provésti jednoduše dle úvahy plynoucí z obr. 3. i 4. Pozorujeme-li totiž paprsky q procházející bodem P oskulace, seznáváme, že mají společný pól Q na společné tečně p pro všechny



OBR. 7.

kuželosečky svazku; pólem tím prochází společná kolmá reciproká polára jako tečna společné paraboly Steinerovy. Patrně platí tato projektivní vlastnost svazku kuželoseček i pro čtyřbodový dotyk kružnice a kuželosečky ve vrcholu této.

Je-li dána v obr. 7. kuželosečka k (ellipsa neb hyperbola) vrcholem P, příslušným středem křivosti C a dalším bodem O, sestrojíme ji takto: Ku spojnici $PO \equiv q$ sestrojíme pól Q vzhledem k oskulační kružnici k_0. Pak QO jest tečnou o kuželosečky k v bodě O a spojnice pólu Q s rozpolovacím bodem U tětivy PO vytíná na ose $a \perp p$ střed kuželosečky. Dle velikosti poloměru křivosti u srovnání s poloosou SP zjistíme (u ellipsy), kterou osou *a* jest a pak rýsujeme kuželosečku již známými konstrukcemi.

Pro kuželosečku určenou oskulační kružnicí ve vrcholu a tečnou o možno vyvoditi konstrukci z téhož obrazce. Sestrojí se $QP = QO_0$, $PO_0 \equiv q$ protíná tečnu o v bodě dotyčném O.

Parabolu danou oskulační kružnicí ve vrcholu můžeme též rýsovati dle souvislosti s konstrukcemi předešlými, máme-li jen na paměti, že $QU \parallel a$. Konstrukci pomíjíme, ježto přímo známe tu ohnisko půlící úsečku PC.

Konstrukce tyto jsou ovšem totožny s konstrukcemi oskulačních kružnic dle zákona kollineace, zakládajíce se na téže vlastnosti projektivní.

III. Strojení kuželoseček oskulujících danou kuželosečku ve stupni vyšším, není-li bod oskulace předem určen.

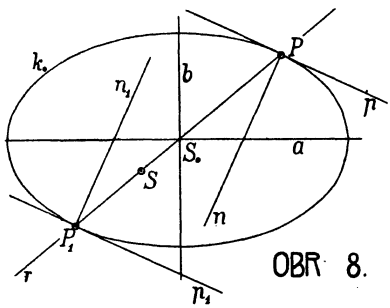
11. Vzhledem k tomu, že na dané kuželosečce není předem znám bod dotyku čtyřbodového, dlužno stanoviti oskulující kuželosečku ještě dvěma dalšími prvky bodovými neb tečnovými nebo určením tomuto aequivalentním.

Uvážíme-li, že kuželosečky o společném dotyku čtyřbodovém mají společnou Steinerovu parabolu tomu bodu příslušnou, a že následkem toho každý bod nacházející se na tečně dotyku čtyřbodového má vzhledem ke všem těm kuželosečkám společnou poláru (čl. 10.), můžeme konstrukce sem spadající provésti t. j. můžeme z dané podmínky určiti body oskulace čímž konstrukce převedou se na známé pro daný bod oskulace čtyřbodové.

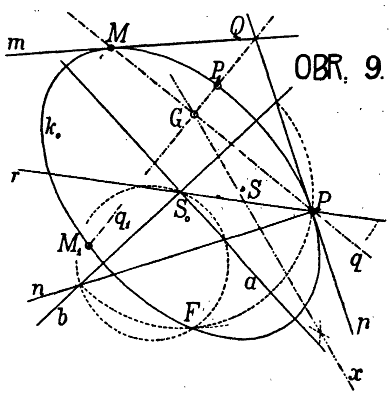
12. *Oskulační kuželosečka dotyku čtyřbodového určena středem.*

Danou kuželosečku k_0 určíme osami a a b (Obr. 8.) a poněvadž nejde nám v tomto ani v následujících případech již o detailní řešení, nýbrž toliko o způsob stanovení bodů dotyčných, předpokládejme ji plně narýsovánu; její střed budiž S_0. Pro kuželosečku oskulující znám jest střed S.

Jak z dřívějších úvah plyne, jest spojnice $r \equiv SS_0$ středů obou kuželoseček oskulujících se ve vyšším stupni řídící přímkou pomocné paraboly bodu dotyčného, jímž prochází. Protíná tedy průměr r danou kuželosečku k_0 ve dvou bodech P a P_1, v nichž dotýkají se jí kuželosečky k a k_1 o společném středu S dotykem čtyřbodovým. Úloha jest dvojznačnou, obě řešení jsou reálná. Průsečíky P a P_1 možno snadno sestrojiti kvadraticky, ať určena již kuželosečka k_0 jakkoli.



Nachází-li se střed S na kuželosečce k_0, redukuje se jedno řešení na tento bod.



13. *Oskulační kuželosečka dotyku čtyřbodového určena ohniskem.*

Daná kuželosečka k_0 určena jako v čl. 12., ohnisko kuželosečky ji oskulující buď G (Obr. 9.).

Pro oskulující kuželosečku platí, že její pomocná parabola má za tečnu kolmici vztyčenou v ohnisku na spojnici jeho s bodem oskulace. Jest to patrně jedna dvojina involuce pravoúhlé, indukované kuželosečkou v jejím ohnisku. Dle čl. 10. jsou tyto kolmé reciproké poláry rovněž sdruženými přímkami vzhledem ke kuželosečce dané k_0, i sestrojíme je jako pravoúhlou dvojinu qq_1 involuce indukované kuželosečkou k_0 v bodě G; konstrukci v obrazci neprovádíme. Přímky q a q_1 protínají kuželosečku k_0 v bodech M a P, resp. M_1 a P_1, jež vyhovují jako dotyčné body žádané oskulace. Úloha jest čtyřznačnou, dvě řešení mohou býti imaginární, ježto jedna z obou kolmých sdružených polár kuželosečky může býti nesečnou.

Dospějeme-li známými konstrukcemi k bodům oskulace, na př. k bodu P, jest již konstrukce kuželosečky oskulující k snadnou. Příslušná parabola Π určena osami a a b kuželosečky k_0, tečnou p a normálou n v bodě P, mimo to sestrojena pátá její tečna q_1. Sestrojíme-li ohnisko F paraboly na př. dle vlastnosti, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému třemi tečnami paraboly prochází jejím ohniskem, a sestrojíme-li druhou tečnu x procházející bodem G ku parabole, jest tato již hlavní osou oskulující kuželosečky a protíná řídící přímku $r \equiv PS_0$ paraboly v středu S kuželosečky úplně již určené.

Oskulační vztah uvažovaný v tomto článku můžeme vysloviti jednoduchou větou:

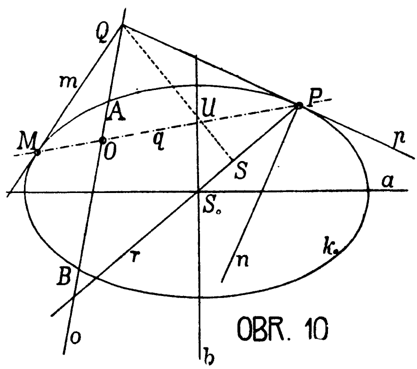
Průsečík kolmých sdružených přímek kuželosečky jest společným ohniskem čtyř kuželoseček, jež dotýkají se kuželosečky v průsečících jejích se sdruženými přímkami dotykem čtyřbodovým.

14. *Oskulační kuželosečka dotyku čtyřbodového určena tečnou s bodem dotyčným.*

Vedle dané kuželosečky k_0 osami určené zvolme libovolně tečnu o s bodem dotyčným O kuželosečky oskulující, již hledáme (Obr. 10.).

Vrátíme-li se k úlohám řešeným v obr. 3. a 4., kdy oskulační kuželosečka dotyku čtyřbodového určena dalším bodem O nebo tečnou o, seznáváme tu, že tečna o bodu O protíná v obou případech tečnu p v pólu Q přímky $q \equiv PO$ obou kuželoseček. Protíná tedy q kuželosečku danou k_0 v bodě M a QM jest její tečnou. I postupujeme při konstrukci takto:

Tečna o protíná danou kuželosečku k_0 v bodech A a B. Sestrojíme k bodu O vzhledem k základním bodům A a B čtvrtý harmonický Q, nebo (při nesečně o) sestrojíme na o bod Q jako sdružený s O. Polára q bodu Q, sestrojená vzhledem ku k_0, prochází bodem O, jest i polárou bodu Q vzhledem ke kuželosečce oskulující a protíná tedy k_0 v bodech P a M, jež jsou dotyčnými body kuželoseček výsledných. Střed S kuželosečky oskulující danou k_0 na př. v bodě P obdržíme na PS_0 jako průsečík se spojnicí QU, je-li $OU = PU$.



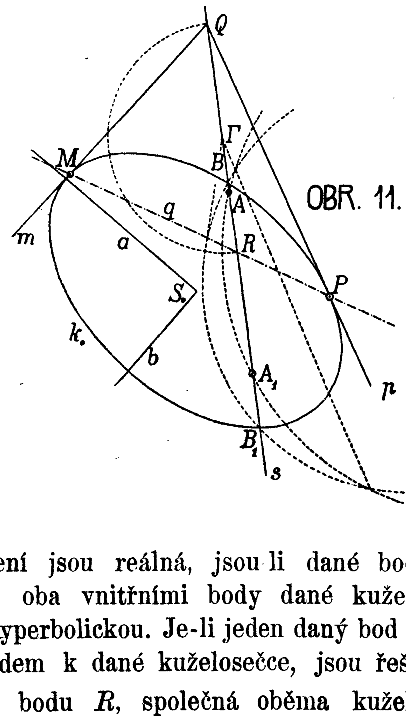
OBR. 10

Úloha jest dvojznačná. Je-li o sečnou a bod O vnitřním bodem kuželosečky k_0, jsou obě řešení reálná, rovněž je-li o nesečnou. Je-li o sečnou a O vnějším bodem kuželosečky, jsou obě řešení imaginární.

Oskulační paraboly dotyku čtyřbodového určeny směrem osy. Průměr dané kuželosečky, rovnoběžný s daným směrem osy oskulující paraboly, určuje na kuželosečce body oskulace. Obě řešení jsou vždy reálná. Jednoduchý výsledek plyne z applikace řešené předcházejícího i z úvahy, že daný směr osy určuje v nekonečnu střed paraboly (čl. 12.).

15. *Oskulační kuželosečka dotyku čtyřbodového určena dvěma body.*

Danou kuželosečku k_0 předpokládejme jako úplně známou narýsovanu, body, jimiž oskulační kuželosečka má procházeti, buďtež AA_1 (Obr. 11.). Spojnice $s \equiv AA_1$ protíná k_0 v bodech B a B_1. Pokládáme-li dvojiny AA_1, BB_1 za dvojiny bodové involuce na s a sestrojíme-li v této involuci dvojné body Q a R — třeba užitím svazku kruhového, jehož jedna kružnice prochází body AA_1 a druhá BB_1; Γ jest středem involuce —, oddělují body Q a R dvojinu AA_1 i BB_1 harmonicky. Prochází tedy polára bodu Q vzhledem ke kuželosečce dané i oskulující bodem R. Sestrojíme-li poláru q bodu Q vzhledem ku k_0, jsou jejich společné body P a M dotyčné body žádaných kuželoseček oskulujících. Úloha jest dvojznačná. Uplné sestrojení stalo by se nyní užitím kteréhokoli z daných bodů dle čl. 7



OBR. 11.

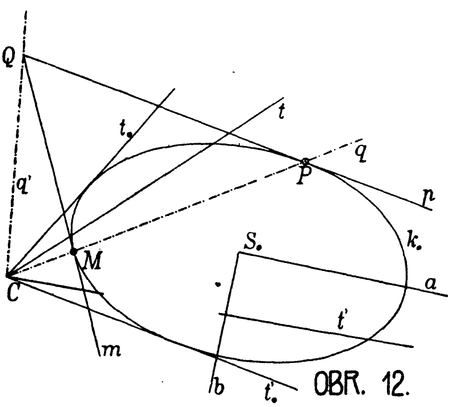
Obě řešení jsou reálná, jsou-li dané body A a A_1 oba vnějšími nebo oba vnitřními body dané kuželosečky a tedy involuce na s hyperbolickou. Je-li jeden daný bod vnějším a druhý vnitřním vzhledem k dané kuželosečce, jsou řešení imaginární.

Polára r bodu R, společná oběma kuželosečkám, dané i oskulující, jsouc nesečnou vede nás k druhým dvěma řešením, vždy imaginárním.

16. *Oskulační kuželosečka dotyku čtyřbodového určena dvěma tečnami.*

Úplně známá daná kuželosečka buď k_0, obě tečny kuželoseček, oskulujících ji ve vyšším stupni, buďtež t a t' (Obr. 12.).

Sestrojíme průsečíkem C obou tečen daných tečny t_0 a t'_0 ke kuželosečce k_0 a pokládajíce paprskové dvojiny tt' a $t_0t'_0$ za dvojiny involuce o vrcholu C, sestrojíme její dvojné paprsky q a q'. Tyto dvojné paprsky jsou pak sdruženými přímkami vzhledem ku k_0 i vzhledem ke kuželosečkám výsledným, jsouce odděleny harmonicky tečnami t_0 a t'_0 resp. t a t'. Sestrojíme-li nyní pól Q přímky q vzhledem ku k_0, jest i jejím pólem vzhledem ke kuželosečkám oskulujícím. Proto průsečíky P a M paprsku q vyhovují jako oskulační body hledaných kuželoseček. Obdobně i průsečíky q' s k_0, ovšem imaginární, ježto z obou paprsků q a q' jest jeden sečnou a druhý nesečnou.



OBR. 12.

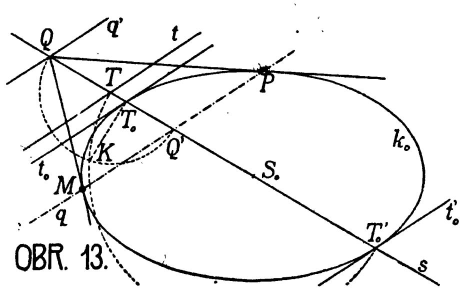
Kdyby průsečík C obou daných tečen t a t' byl vnitřním bodem kuželosečky k_0, byly by sice tečny t_0 a t'_0, jakožto dvojné paprsky involuce indukované kuželosečkou k_0, imaginární, dvojné paprsky q a q' byly by však oba sečnami kuželosečky k_0 a tedy všecka čtyři řešení byla by reálná.

Máme-li dospěti v tomto případu k řešením reálným, musí obě tečny t a t' býti buď sečnami nebo nesečnami. Pro případ, že jedna tečna jest sečnou a druhá nesečnou, oddělují se dvojiny tt' a $t_0t'_0$, i jsou dvojné paprsky q a q' a tedy všecka řešení imaginární.

Oskulační paraboly dotyku čtyřbodového určeny tečnou.

Označíme-li t danou tečnu, která dle předchozí úvahy musí býti pro reálná řešení nesečnou dané kuželosečky k_0

(Obr. 13.), a $_\infty t'$ tečnu nekonečně vzdálenou, sestrojíme ku k_0 tečny t_0 a t'_0 rovnoběžné s t. Paprsková involuce určená těmito dvěma dvojinami má střed v nekonečnu, její dvojné elementy sestrojíme nejlépe užitím bodové involuce $T_\infty T'$, $T_0 T'_0$ na průměru s dané kuželosečky, sdruženém se směrem t. Bod T



OBR. 13.

jest středem této involuce, její dvojné body Q a Q' sestrojeny dle relace

$$TT_0 \,.\, TT'_0 = \overline{TK}^2 = \overline{TQ}^2 = \overline{TQ'}^2.$$

Paprsek q, jehož pól Q, protíná k_0 v bodech žádané oskulace.

1$^{\prime\prime}$. *Oskulační kuželosečka dótyku čtyřbodového určena pólem a příslušnou polárou.*

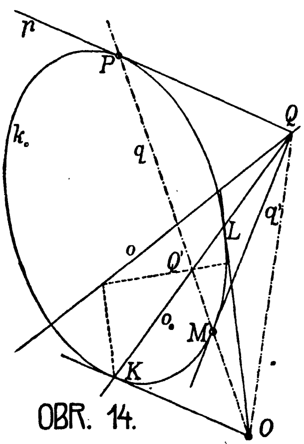
Budiž k_0 kuželosečka, jíž má se dotykem čtyřbodovým dotýkati kuželosečka k určená ještě pólem O a sdruženou polárou o (Obr. 14.). Jde nám o sestrojení bodu, jehož poláry vzhledem k oběma kuželosečkám se stotožňují. Sestrojíme-li poláru o_0 bodu O vzhledem ku k_0, jest tato geometrickým místem pólů přímek procházejících bodem O vzhledem ku k_0. Obdobně jest o geometrickým místem pólů těchže přímek vzhledem ku k. I jest průsečík Q obou polár o_0 a o bodem, jehož poláry vzhledem ku k_0 i k procházejí bodem O. Sestrojíme-li poláru q bodu Q vzhledem ku k_0, protíná tuto kuželosečku v bodech P a M, jež patrně vyhovují jako body žádané oskulace vyššího stupně. Polára q sestrojena v obr. jako čtvrtý harmonický paprsek oddělující s paprskem $q' \equiv OQ$ tečny OK a OL, pomocí harmonické čtveřiny bodové na přímce o_0, jejíž čtvrtý bod Q' jest pólem přímky q'; $OQ' \equiv q$.

Nachází-li se bod O uvnitř kuželosečky k_0, jsou obě přímky q a q' jejími sečnami a úloha podává čtyři řešení reálná.

Je-li průsečík Q vnitřním bodem kuželosečky k_0, určuje na ní spojnice OQ žádané body oskulace.

Oskulační kuželosečka dotyku čtyřbodového určena průměrem a směrem sdruženého.

Řešení této úlohy jest totéž jako v případě předcházejícím, označíme-li daný průměr o a směr sdruženého $_\infty O$. Bod Q vychází jako průsečík průměru kuželosečky dané a průměru o, sdružených se směrem $_\infty O$.



OBR. 14.

Určuje-li daná podmínka sdružených průměrů zároveň směr jedné dvojiny sdružených průměrů kuželosečky k_0, vychází $o \parallel o_0$, tedy Q v nekonečnu; i jsou koncové body průměru kuželosečky k_0, rovnoběžného se směrem $_\infty O$, body oskulace žádané.

18. *Oskulační kuželosečka dotyku čtyřbodového určena tečnou a bodem.*

Daná kuželosečka buď k_0, tečna kuželosečky oskulující m a její bod O. Při konstrukci bylo by si počínati takto:

V bodě O sestrojíme tři libovolné paprsky a, b, c a pokládajíce je za tečny kuželoseček bodem O procházejících a danou kuželosečku k_0 ve vyšším stupni oskulujících, sestrojíme příslušné body oskulace A_2, B_2, C_2, resp. A'_2, B'_2, C'_2. Dále zvolíme na dané tečně m tři body A_1, B_1, C_1 tak, aby řada bodová $A_1 B_1 C_1 \ldots$ byla projektivní se svazkem paprskovým $abc \ldots$; A_1 jest průsečík přímky m se spojnicí jejího pólu M a pólu A paprsku a, obdobně B_1 a C_1. Nyní pokládáme body A_1, B_1, C_1 za dotyčné body kuželoseček přímky m se dotýkajících a danou kuželosečku k_0 ve vyšším stupni oskulujících a sestrojíme příslušné body oskulace A_3, B_3, C_3 resp. A'_3, B'_3, C'_3. Křivé řady bodové $A_2 B_2 C_2 \ldots$ a $A'_2 B'_2 C'_2 \ldots$ jsou patrně projektivními s křivou řadou bodovou $A_3 B_3 C_3 \ldots$ i $A'_3 B'_3 C'_3 \ldots$ Celkem obdržíme čtyři projektivní vztahy těchto křivých soumístných řad. Sestrojíme-li jich samodružné body, dospíváme k bodům oskulace žádané. Obecně jest úloha tato osmiznačnou.

Ke Kummerovým pracím o Fermatově větě.

Dr. E. Schoenbaum.

Známá věta Fermatova o nemožnosti řešení rovnice $u^n + v^n + w^n = 0$ v celých číslech pro $n \geqq 3$ není dosud dokázána. Fermat pronesl svou větu těmito slovy: „Cubum autem in duos cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere. Cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“ *) Fermat tedy tvrdí přímo, že zná důkaz své věty. Byl spor o tom, možno-li Fermatovi věřiti. Faktum jest, že všechny cesty, které byly od r. 1670 k správnému provedení důkazu nastoupeny, týkají se buď jednotlivých případů věty **), anebo vyžadují prostředků, jichž neovládá dnešní mathematika, a jichž neznal pravděpodobně ani Fermat před 250 lety. Tak

---

*) Fermatova věta poprvé byla uveřejněna roku 1670 ve vydání Bachetova Diophanta, jakožto poznámka »ad quaestion. VIII. Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri II.« Opis Bachetova Diophanta doprovázel totiž Fermat poznámkami na okraji. Vydání obstaral F-ův syn.

**) Pro $n = 3, 4, 5, 7, 14$ byla F. věta dokázána Eulerem, Fermatem samotným, Legendrem, Lamé-em, Dirichletem.