Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

O jednom rozšíření rozvoje Clebsch-Gordanova

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 3, 243--251

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122593

Střed průsečíků přímky B s křivkou (1) plyne z rovnice

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \dots b_n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \dots - a_n = 0,$$

z níž dostaneme

$$\xi = -\frac{b_1 - a_1}{n}. \qquad (\beta)$$

Z rovnice (α) a (β) plyne

$$\sum \frac{\psi(x_k)}{f'(x_k)} = a_1.$$

Větu, kterou jsme zde dokázali, mohli bychom také přímo z theoremu Newtonova o asymptotách odůvodniti, jak jsme na jiném místě ukázali.

O jednom rozšíření rozvoje Clebsch-Gordanova.

Napsal **K. Petr.**

1. Rozvoj Clebsch-Gordanův vztahuje se ku formě o dvou řadách binárních proměnných (x_1, x_2), (y_1, y_2). Takovou formu lze totiž rozvinouti v řadu tvaru

$$f\binom{m\ \ n}{x, y} = A_0 + (xy) A_1 + (xy)^2 A_2 + \dots + (xy)^n A_n, \quad m \geqq n, \qquad (1)$$

kde $f\binom{m\ \ n}{x, y}$ značí formu v (x_1, x_2) stupně m-tého, v (y_1, y_2) stupně n-tého a kde $(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Výrazy A_k pak jsou formy o dvou řadách proměnných*) (x), (y) a jsou to poláry forem o jedné řadě proměnných. Jestliže jest ku př. $G(x)$ forma r-tého stupně v (x) (kterážto forma obsahovati může i jiné řady proměnné ku př. (y)), jest operace vytvořující poláru této formy dle proměnné (x) s pólem (y) takto definována

$$D_{xy} G(x) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial G}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} y_2\right), \qquad (2)$$

*) Místo (x_1, x_2), (y_1, y_2) ... užívati budu v násl. obvyklého zkrácení (x), (y) ...

Na základě tohoto označení lze dle svrchu uvedeného o výrazech A_k psáti

$$A_k = D_{xy}^{n-k} F_k(x), \tag{3}$$

kde $F_k(x)$ jest forma v (x) *nezávislá na proměnné* (y). Polára (3) hoví této rovnici differenciální

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_2 \partial y_1} = 0, \tag{4}$$

a lze také snadno naopak dokázati, že forma, která této rovnici differenciální vyhovuje, vznikla polarisováním z formy, v níž dvě řady proměnných (x), (y) jsou nahrazeny pouze jedinou řadou.

Podobně lze, jak rovněž známo, provésti rozvoj forem závislých na několika řadách proměnných, ku př. formy $f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}, \overset{p}{z}\right)$. Stačí v tomto případě nejprve pokládati za proměnné jenom (x) a (y) a rozvinouti dle (1). Pokládáme-li potom též (z) za proměnné, jsou výrazy $F_k(x)$ určené ve (3) formy ve dvou řadách proměnných (x), (z) a tyto lze opět dle téže formule (1) rozvinouti. Dostáváme tak řadu postupující dle mocnin determinantů (xy), (yz), (zx). *) Než koefficienty v této řadě, jež jak patrno, jsou rovněž poláry forem o jedné řadě proměnných, nejsou určeny jednoznačně, jakož plyne z okolnosti, že mezi determinanty těmito jsou vztahy

$$x_1(yz) + y_1(zx) + z_1(xy) = 0, \quad x_2(yz) + y_2(zx) + z_2(xy) = 0. \tag{5}$$

Avšak lze vždy předepsati tvar rozvoje tak (ku př. tím, že stanovíme, že některé členy $(xy)^\alpha . (yz)^\beta . (zx)^\gamma . P_{\alpha,\beta,\gamma}$ se vhodně stanovenými α, β, γ nemají se v rozvoji vyskytovati), že příslušný rozvoj jest jednoznačně určen. Koefficienty v rozvoji jednoznačném formy o několika řadách poskytují nám bezprostředně úplný systém základních invariantních forem**) na sobě lineárně nezávislých a k dané formě příslušných, ze kteréžto okolnosti vysvítá důležitost takovýchto rozvojů. Ku výsledkům zvláště jednoduchým a tvarem svým pozoruhodným dospí-

*) Viz Gordan, Über das Formensystem bin. Formen, Leipzig, 1875, str. 8.

**) t. j. takových, že každý invariantní útvar dané formy o několika proměnných jest invariantním útvarem toho systému a naopak.

váme v případě, že stupeň v jedné řadě proměnných ku př. v (x) jest větší anebo rovný součtu stupňů v ostatních řadách (y), (z), (u), ... Případem tím v následujícím chci se zabývati, při čemž omezuji se, aby označení nestalo se nepřehledným, v provedení na čtyři proměnné, čímž však nečiní se pražádná ujma obecnosti výsledků, jichž platnost bezprostředně se rozšiřuje pro libovolný počet proměnných.

2. Forma $f\begin{pmatrix} m & n & p & q \\ x, & y, & z, & u\end{pmatrix}$, ve které $m \geqq n + p + q$, dá se vždy rozvinouti v řadu postupující dle mocnin determinantů (yx), (zx), (ux); tedy tvaru

$$f\begin{pmatrix} m & n & p & q \\ x, & y, & z, & u\end{pmatrix} = \Sigma A_{\lambda,\,\mu,\,\nu} \,.\, (yx)^{\lambda}\, (zx)^{\mu}\, (ux)^{\nu},$$
$$\begin{aligned} \lambda &= 0,\ 1,\ 2, \ldots n, \\ \mu &= 0,\ 1,\ 2, \ldots p, \\ \nu &= 0,\ 1,\ 2, \ldots q, \end{aligned} \tag{6}$$

kde $A_{\lambda,\,\mu,\,\nu}$ jest polára formy závislé toliko na jedné řadě proměnných.

Neboť vyskytuje-li se v rozvoji pro $f\begin{pmatrix} m & n & p & q \\ x, & y, & z, & u\end{pmatrix}$ člen $B\,(xy)^{\lambda}\,(zx)^{\mu}\,(uy)^{\nu}\,(zy)^{\varrho} \ldots$, kde $\varrho > 0$, musí dle předpokladu $(m \geqq n + p + q)$ forma B obsahovati (x) ve stupni $a \geqq 2\varrho + \ldots$ a můžeme tudíž identicky psáti (majíce zřetel k identitám (5))

$$B\,.\,(zy) = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial B}{\partial x_1}\, x_1 + \frac{\partial B}{\partial x_2}\, x_2\right).(zy) =$$
$$\frac{1}{a}\left(\frac{\partial B}{\partial x_1}\, y_1 + \frac{\partial B}{\partial x_2}\, y_2\right).(zx) - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial B}{\partial x_1}\, z_1 + \frac{\partial B}{\partial x_2}\, z_2\right).(yx); \tag{7}$$

dosadíme-li pak za $B.(zy)$ dle této identity do daného členu, obdržíme místo něho členy, jež obsahují (zy) v mocnině s mocnitelem o jednu menším. Tuto a podobné operace můžeme tolikrát opakovati, až člen daný nahrazen jest členy mající tvar $B'\,(yx)^{\lambda'}\,(zx)^{\mu'}\,(ux)^{\nu'}$, kde, jak ze (7) patrno, jest B' odvozeno z B opětovaným polarisováním dle proměnné (x) a dle pólů (y), (z), (u). Lze tedy každý rozvoj pro $f\begin{pmatrix} m & n & p & q \\ x, & y, & z, & u\end{pmatrix}$, o němž v odst. 1. zmínka se stala, upraviti tak, že má tvar (6), při čemž vlastnost součinitelů, jež původnímu rozvoji přísluší, že jsou to formy vzniklé polarisováním z formy o jedné řadě proměnných, zůstává úpravou tou zcela nedotčena; i jsou $A'_{\lambda,\mu,\nu}$ v rozvoji (6) takovéto formy. Jest tedy pro $A_{\lambda,\mu,\nu}$ platna rovnice (4) jakož i rovnice utvořené analogicky vzhledem k ostatním dvojicím řad proměnných. Tyto rovnice můžeme jednodušeji psáti, zavedeme-li pro příslušné operace derivační tato označení

$$[xy] = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1}, \quad [xz] = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial z_1}, \ldots;$$

užívajíce tohoto označení, můžeme ony rovnice diff., jež splňuje $A_{\lambda,\mu,\nu}$ takto psáti:

$$[xy]\, A_{\lambda,\mu,\nu} = 0, \quad [xz]\, A_{\lambda,\mu,\nu} = 0, \quad [xu]\, A_{\lambda,\mu,\nu} = 0, \ldots$$

Jako snadné důsledky těchto rovnic a věty Eulerovy o homogenních funkcích vyplývají pro poláru $D^i_{yx} D^k_{zx} D^l_{ux} F(x)$ *) formy $F(x)$, kterážto forma jest závislá toliko na řadě (x) a ne na řadách (y), (z), (u), tyto vzorce a věty platné vesměs za podmínky, že $i + k + l$ jest nejvýše rovno stupni $F(x)$ v (x):

1. $D_{yx} \,.\, D^i_{xy} D^k_{xz} D^l_{xu} F(x) = D^{i-1}_{xy} D^k_{xz} D^l_{xu} F(x)$.

2. $D_{yz} \,.\, D^i_{xy} D^k_{xz} D^l_{xu} F(x) = D^{i-1}_{xy} D^{k+1}_{xz} D^l_{xu} F(x)$.

3. Jestliže jest $D^i_{xy} D^k_{xz} D^l_{xu} F(x) = D^{i'}_{xy} D^{k'}_{xz} D^{l'}_{xu} G(x)$ identicky (t. j. při proměnných (x), (y), (z), (u)), jest též identicky $F(x) = G(x)$.

4. Položíme-li v $D_{xy} D^k_{xz} D^l_{xu} F(x)$ místo (y), (z), (u) vesměs (x), dostaneme $F'(x)$. Tento výrok lze psáti takto:

$$\overline{D^i_{xy} D^k_{xz} D^l_{xu} F(x)} = F(x). \tag{8}$$

Čára nad výrazem značí tudíž tu, jakož i v následujícím, že ve formě příslušné místo jednotlivých řad proměnných (y), (z), ... dosaditi se má řada (x). Vztah (8) lze nahraditi větou obecnější, že operace D_{xx}, D_{yy}, ... nemají vlivu na formu, na níž se používají, a lze je prostě vynechati.

3. Rozvoj (6) pozměníme poněkud zavedením numerických činitelů, což pro následující poskytuje jistou výhodu, i budeme jej psáti ve tvaru (při čemž nezměníme označení koefficientů,

---

*) Operace D_{xy}, D_{xz}, D_{xu} jsou záměnné (vždy).

jelikož to nemůže býti příčinou nějakého nedorozumění):

$$f\left(\overset{m}{x},\ \overset{n}{y},\ \overset{p}{z},\ \overset{q}{u}\right) = \Sigma A_{\lambda,\mu,\nu} \frac{(yx)^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{(zx)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{(ux)^\nu}{\nu!}, \tag{6'}$$

$$\lambda = 0,\ 1,\ 2, \ldots n,$$
$$\mu = 0,\ 1,\ 2, \ldots p,$$
$$\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots q.$$

Dle předcházejícího pak jest

$$A_{\lambda,\mu,\nu} = D_{xy}^{n-\lambda} D_{xz}^{p-\mu} D_{xu}^{q-\nu} F_{\lambda,\mu,\nu}(x). \tag{9}$$

Běží o to, nyní vypočísti $F_{\lambda,\mu,\nu}(x)$ a dokázati, že formy tyto jsou jednoznačně určeny. Pro $F_{0,0,0}$ bezprostředně to plyne z rovnice (6′), píšeme-li místo (y), (z), (u) vesměs (x). Dostaneme

$$F_{0,0,0}(x) = \overline{f\left(\overset{m}{x},\ \overset{n}{y},\ \overset{p}{z},\ \overset{q}{u}\right)}. \tag{10}$$

Abychom vypočetli další $F_{\lambda,\mu,\nu}$, vezměme v úvahu formy $[yx]f\left(\overset{m}{x},\ \overset{n}{y},\ \overset{p}{z},\ \overset{q}{u}\right)$, $[yz]f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right), \ldots$; i tyto formy připouštějí rozvoj tvaru (6′), jelikož u nich jest rovněž stupeň v (x) větší anebo rovný součtu stupňů v (y), (z), (u). Dostáváme tak bezprostředně pro $[yx]f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)$:

$$[yx]f\left(\overset{m}{x},\ \overset{n}{y},\ \overset{p}{z},\ \overset{q}{u}\right) = \Sigma A_{\lambda,\mu,\nu}^{[yx]} \frac{(yx)^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{(zx)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{(ux)^\nu}{\nu!},$$

$$\lambda = 0,\ 1, \ldots n-1,$$
$$\mu = 0,\ 1, \ldots p\quad ,$$
$$\nu = 0,\ 1, \ldots q\quad ;$$

$$A_{\lambda,\mu,\nu}^{[yx]} = D_{xy}^{n-\lambda-1} D_{xz}^{p-\mu} D_{xu}^{q-\nu} F_{\lambda,\mu,\nu}^{[yx]}(x);$$

a podobný tvar mají i rozvoje pro ostatní formy $[yz]f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)$. Avšak formy $A_{\lambda,\mu,\nu}^{[yx]}$, $A_{\lambda,\mu,\nu}^{[yz]}, \ldots$ na pravé straně těchto rozvojů se vyskytující lze snadno vyjádřiti pomocí $A_{\lambda,\mu,\nu}$; stačí na pravou stranu rozvoje (6′) provésti derivační operace $[yx]$, $[yz], \ldots$ a uspořádati. Obdržíme tyto vztahy:

$$\begin{aligned} A_{\lambda,\mu,\nu}^{[yx]} &= (m+n-\lambda) A_{\lambda+1,\mu,\nu} + (n-\lambda) \Delta A_{\lambda,\mu+1,\nu} \\ &\quad + (n-\lambda) \Delta' A_{\lambda,\mu,\nu+1}, \\ A_{\lambda,\mu,\nu}^{[yz]} &= (p-\mu) \Delta'' A_{\lambda+1,\mu,\nu} - (n-\lambda) \Delta''' A_{\lambda,\mu+1,\nu}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

kde Δ, Δ', Δ'', .. značí jisté operace polarisační, jež netřeba podrobněji popisovati.

Z rovnic (11) vyplývá ihned dle důsledku 3. v odst. 2. (str. 246)

$$\begin{aligned} F^{[yx]}_{\lambda,\mu,\nu}(x) &= (m+n-\lambda)\, F_{\lambda+1,\mu,\nu}(x) + (n-\lambda)\, F_{\lambda,\mu+1,\nu}(x) \\ &\quad + (n-\lambda)\, F_{\lambda,\mu,\nu+1}(x), \\ F^{[yz]}_{\lambda,\mu,\nu}(x) &= (p-\mu)\, F_{\lambda+1,\mu,\nu}(x) - (n-\lambda)\, F_{\lambda,\mu+1,\nu}(x), \\ F^{[yu]}_{\lambda,\mu,\nu}(x) &= (q-\nu)\, F_{\lambda+1,\mu,\nu}(x) - (n-\lambda)\, F_{\lambda,\mu,\nu+1}(x), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{12}$$

odkudž, značíme-li $m+n+p+q=s$, $\lambda+\mu+\nu=\sigma$,

$$(s-\sigma)\, F_{\lambda+1,\mu,\nu}(x) = F^{[yx]}_{\lambda,\mu,\nu}(x) + F^{[yz]}_{\lambda,\mu,\nu}(x) + F^{[yu]}_{\lambda,\mu,\nu}(x),$$

a podobně

$$\begin{aligned} (s-\sigma)\, F_{\lambda,\mu+1,\nu}(x) &= F^{[zx]}_{\lambda,\mu,\nu}(x) + F^{[zy]}_{\lambda,\mu,\nu}(x) + F^{[zu]}_{\lambda,\mu,\nu}(x), \\ (s-\sigma)\, F_{\lambda,\mu,\nu+1}(x) &= F^{[ux]}_{\lambda,\mu,\nu}(x) + F^{[uy]}_{\lambda,\mu,\nu}(x) + F^{[uz]}_{\lambda,\mu,\nu}(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Vztahy (13) a (10) dovolují nám postupně všecky formy $F_{\lambda,\mu,\nu}(x)$ stanoviti. Z (10) máme ihned jednoznačně

$$F^{[yx]}_{0,0,0}(x) = \overline{[yx] f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)}, \quad F^{[yz]}_{0,0,0}(x) = \overline{[yz] f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)}, \ldots,$$

což dává dosazením do (13)

$$s\, F_{1,0,0}(x) = \overline{[yx] f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)} + \overline{[yz] f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)} + \overline{[yu] f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)},$$

aneb

$$F_{1,0,0}(x) = \frac{1}{s}\, \overline{([yx]+[yz]+[yu])\, f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)}$$

a obdobné výsledky dostáváme pro $F_{0,1,0}(x)$, $F_{0,0,1}(x)$. Označíme-li k vůli stručnosti operace

$$[yx]+[yz]+[yu] = T_y, \quad [zx]+[zy]+[zu] = T_z,$$
$$[ux]+[uy]+[uz] = T_u,$$

máme

$$\begin{aligned} F_{1,0,0}(x) &= \frac{1}{s}\, \overline{T_y f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)}, \quad F_{0,1,0}(x) = \frac{1}{s}\, \overline{T_z f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)}, \\ F_{0,0,1}(x) &= \frac{1}{s}\, \overline{T_u f\left(\overset{m}{x}, \ldots\right)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Užívajíce nyní (14) při rozvojích

$$[yx]\,f\left(\overset{m}{x},\ldots\right),\quad [yz]\,f\left(\overset{m}{x},\ldots\right),\ldots,$$

známe $F^{[yx]}_{1,0,0}(x)$, $F^{[yz]}_{0,1,0}(x)$, ... a pomocí (13) dostáváme tyto vztahy pro formy $F_{2,0,0}(x)$, $F_{1,1,0}(x)$, ... jednoznačně ty formy stanovící

$$F_{2,0,0}(x)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\,\overline{T_y^2 f\left(\overset{m}{x},\ldots\right)},$$

$$F_{1,1,0}(x)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\,\overline{T_y T_z f\left(\overset{m}{x},\ldots\right)},$$

. . . .

Jest jasno, že takovýmto způsobem lze neomezeně pokračovati, a vyplývá z toho nejprve ta okolnost, že rozvoj (6′) jest jednoznačný, t. j. máme-li dva takové rozvoje pro touž formu jednou o koefficientech $A_{\lambda,\mu,\nu}$, po druhé o koefficientech $A'_{\lambda,\mu,\nu}$, že jest identicky $A_{\lambda,\mu,\nu}=A'_{\lambda,\mu,\nu}$.

Lze však na základě (13) odvoditi obecně tvar pro $F_{\lambda,\mu,\nu}(x)$. Jest totiž

$$F_{\lambda,\mu,\nu}(x)=\frac{1}{(s-\sigma+1)(s-\sigma)(s-\sigma-1)\ldots(s-2\sigma+2)}\,\overline{T_y^{\lambda}T_z^{\mu}T_u^{\nu}f\left(\overset{m}{x},\ldots\right)}. \tag{15}$$

Výsledek tento dokážeme úplnou indukcí. Nechť tento výsledek jest platný pro všecka $F_{\lambda',\mu',\nu'}(x)$, pro něž $\lambda'+\mu'+\nu'=\sigma'<\sigma$. Budiž ku př. $\lambda>0$; pak platí též pro $\lambda'=\lambda-1$, $\mu'=\mu$, $\nu'=\nu$. Užijeme-li ho v tomto případě na rozvoj forem $[yx]\,f\left(\overset{m}{x},\ldots\right),\ldots$, máme (kladouce hned $\sigma'=\sigma-1$, $s'=s-2$)

$$F^{[yx]}_{\lambda-1,\mu,\nu}(x)=\frac{1}{(s-\sigma)(s-\sigma-1)\ldots(s-2\sigma+2)}\,\overline{T_y^{\lambda-1}T_z^{\mu}T_u^{\nu}[yx]\,f\left(\overset{m}{x},\ldots\right)},$$

$$F^{[yz]}_{\lambda-1,\mu,\nu}(x)=\frac{1}{(s-\sigma)(s-\sigma+1)\ldots(s-2\sigma+2)}\,\overline{T_y^{\lambda-1}T_z^{\mu}T_u^{\nu}[yz]\,f\left(\overset{m}{x},\ldots\right)},$$

$$F^{[yu]}_{\lambda-1,\mu,\nu}(x)=\frac{1}{(s-\sigma)(s-\sigma+1)\ldots(s-2\sigma+2)}\,\overline{T_y^{\lambda-1}T_z^{\mu}T_u^{\nu}[yu]\,f\left(\overset{m}{x},\ldots\right)},$$

z čehož dosazením do (13) vyplývá vskutku (15). Poněvadž pak (15) jest platno pro $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ dle (10), jest vztah (15) obecně dokázán.

Z rovnice (15) plynou ihned koefficienty v rozvoji Clebsch-Gordanově

$$f\begin{pmatrix} m & n \\ x, & y \end{pmatrix} = \Sigma A_\lambda \frac{(yx)^\lambda}{\lambda!}; \; \lambda = 0, 1, \ldots n, \; n \leqq m;$$

$$A_\lambda = D_{xy}^{n-\lambda} F_\lambda(x),$$

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{(m+n-\lambda+1)(m+n-\lambda)\ldots(m+n-2\lambda+2)} [yx]^\lambda f\begin{pmatrix} m & n \\ x, & y \end{pmatrix}.$$

Formule Clebsch-Gordanova připomíná tvarem svým rozvoj Taylorův*); ještě více však tato analogie vyniká, srovnáme-li větu Taylorovu pro několik proměnných se vzorci (6′) a (15).

Jako důsledek rozvoje (6′) a (15) lze uvésti větu: Souhrn invariantních útvarů formy $f\begin{pmatrix} m & n & p & q \\ x, & y, & z, & u \end{pmatrix}$, kde $m \geqq n + p + q$, shoduje se souhrnem invariantních útvarů systému forem o jedné řadě proměnných

$$T_y^\lambda T_z^\mu T_u^\nu f\begin{pmatrix} m & n & p & q \\ x, & y, & z, & u \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} &\lambda = 0, 1, \ldots n, \\ &\mu = 0, 1, \ldots p, \\ &\nu = 0, 1, \ldots q, \\ &\lambda + \mu + \nu \leqq m. \end{aligned}$$

Při obecné formě $f\begin{pmatrix} m & n & p & q \\ x, & y, & z, & u \end{pmatrix}$ jsou všecky formy tohoto systému na sobě nezávisly a od nully různy.

4. Obecnější předpoklad, nežli o který jsme se právě opírali ($m \geqq n + p + q + \ldots$), by byl $m + n \geqq p + q + \ldots$**). I v tomto případě snadno lze udati rozvoje, jichž koefficienty (poláry forem o jedné řadě proměnných) jsou jednoznačně stanoveny. K vůli stručnosti uvádím zde rozvoj pouze pro případ tří proměnných řad, tu dostáváme ($m \geqq n$, $m + n \geqq p$)

*) Dle Gordana lze dokonce rozvoj Clebsch-Gordanův v jistém smyslu pokládati jako rozšíření Taylorovy věty; (uvádím dle Encycl. der math. W. I. díl, str. 373, pozn. 296; příslušné místo v publikacích Gordanových tu neuvedeno a mně jest neznámo).

**) a tak dále.

$$f\binom{m\ n\ p}{x,y,z} = \Sigma \frac{(yx)^\lambda}{\lambda!}\frac{(zx)^\mu}{\mu!} A_{\lambda,\mu} + \Sigma (yx)^\lambda (zx)^\mu (zy)^\varrho B_{\lambda,\mu,\varrho},$$

$$\lambda = 0, 1, 2, \ldots n,$$
$$\mu = 0, 1, 2, \ldots p,$$
$$\varrho = 1, 2, 3, \ldots;$$

zároveň pak jest v prvém součtu $\lambda + \mu \leq m$, v druhém pak součtu $\lambda + \mu = m$, $\lambda + \varrho \leq n$, $\mu + \varrho \leq p$.

Koefficienty $A_{\lambda,\mu}$ jsou stanoveny týmž vztahem (15) jako $A_{\lambda,\mu,\nu}$ v (6′) (stačí klásti $q = 0$, $\nu = 0$ a $A_{\lambda,\mu} = A_{\lambda,\mu,0}$); k určení forem $B_{\lambda,\mu,\varrho}$ by bylo třeba podniknouti zvláštní vyšetřování.

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Když jsme takto stanovili některé výrazy pro úplný differenciální poměr vektoru $\mathbf{v}$ dle $\mathbf{r}$, chceme znázorniti jej geometricky; k tomu hodí se vektor, který obdržíme, násobíme-li úplný differenciální poměr jednotkovým vektorem $\mathbf{s}_1$, při čemž vektor ten může býti postfaktorem anebo praefaktorem. Jako jsme v poli skalárním poznali součin $\frac{dv}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$, rovnající se dle (37) skaláru $\frac{dv}{ds}$, tak jest důležitý v poli vektorovém součin $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$ anebo $\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, který jest dle (21a) vektorem.

Srovnajíce rovnici (59a), totiž

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s} = \frac{d\mathbf{v}}{ds}\, \mathbf{s}_1,$$

s rovnicí (62c)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1\right) \mathbf{s}_1,$$

obdržíme

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{d\mathbf{v}}{ds}. \tag{70}$$