Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 1, 89--96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122577

tak že součet řady má tvar

$$S=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$$

nebo

$$S=\frac{n^2}{12}(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

10. Součet pátých mocnin lichých čísel přirozené řady dán vzorcem

$$S=\frac{n^2}{3}(16n^4-20n^2+7).$$

Podobně bychom nalezli součet šestých mocnin atd., čímž bychom obdrželi soustavu sedmi, osmi atd. rovnic prvého stupně. Výpočty ty stávají se čím dále tím více složitými, jelikož čísla jsou stále větší a větší.

Úlohy.

Dodatek k řešení úloh v předešlém ročníku.

Doplňkem ku řešení úloh v předešlém ročníku uveřejněných podáváme tu *jiný způsob řešení* úloh, jež následují.

Úloha 30.

Příčky spojující středy protějších stran čtyrúhelníka ABCD protínají se v bodě S.

Budiž dokázáno, že jest

$$\triangle ABS+\triangle CDS=\triangle BCS+\triangle DAS.$$

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Sukdol,* stud. VIII. tř. gym. v Č. Budějovicích.)

Zvolme bod S počátkem pravoúhlé soustavy souřadnic; souřadnice vrcholů jsou po řadě

$$A(x_1\, y_1),\ B(x_2\, y_2),\ C(x_3\, y_3),\ D(x_4\, y_4).$$

Dle podmínky jsou souřadnice bodu S rovny nulle, tudíž

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}\right)=0,$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3+y_4}{2}\right)=0$$

čili

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$
$$y_1+y_2+y_3+y_4=0.$$

Mimo to jest

$$\triangle\, ABS=\frac{1}{2}(x_1\, y_2-x_2\, y_1),$$
$$\triangle\, CDS=\frac{1}{2}(x_3\, y_4-x_4\, y_3)$$
$$\triangle\, BCS=\frac{1}{2}(x_2\, y_3-x_3\, y_2)$$
$$\triangle\, DAS=\frac{1}{2}(x_4\, y_1-x_1\, y_4).$$

Jelikož

$$x_1+x_3=-(x_2+x_4)$$
$$y_1+y_3=-(y_2+y_4),$$

jest

$$(x_1+x_3)(y_2+y_4)=(x_2+x_4)(y_1+y_3)$$

čili

$$x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3=x_2y_3-x_3y_2+x_4y_1-x_1y_4.$$

Rovnice tato však patrně stvrzuje, že jest

$$\triangle\, ABS+\triangle\, CDS=\triangle\, BCS+\triangle\, DAS.$$

Úloha 31.

V harmonickém čtyrúhelníku ABCD dány jsou úhly

$$\sphericalangle\, DAB=\alpha,\quad \sphericalangle\, ABC=\beta.$$

Který úhel svírají úhlopříčky?

[*Harmonickým slove čtyrúhelník do kruhu vepsaný, v němž součiny protějších stran jsou stejné*].

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Emil Schoenbaum*, stud. VIII. tř. g. v Benešově.)

Označíme-li strany

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d$$

a úhlopříčky

$$AD = n,\ BC = m,$$

jest ve čtyřúhelníku vepsaném

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$$
$$n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta.$$

Odtud

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)},\quad \cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

V harmonickém čtyřúhelníku jest

$$ac = bd;$$

vyloučíme-li d, nalezneme

$$\cos\alpha = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 + c^2)}{2bc(a^2 + b^2)}$$

$$\cos\beta = \frac{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}{2ab(b^2 + c^2)},$$

pročež

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{4ab^2c}.$$

Úhel úhlopříček stanoven jest vzorcem platným pro čtyřúhelník vůbec

$$\cos\omega = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2mn}$$

(Strnad, Geometrie pro realky, I. vydání str. 163.).

Ve čtyřúhelníku harmonickém jest

$$mn = ac + bd = 2ac,$$

$$\cos\omega = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - \frac{a^2c^2}{b^2}}{4ac},$$

kterýž výraz lze upraviti na tvar

$$\cos\omega = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{4ab^2c}.$$

Jest tedy

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\beta.$$

Úloha 39.

V trojúhelníku abc vésti jest příčky

$$a_1a_2 \parallel cb, \quad b_1b_2 \parallel ac, \quad c_1c_2 \parallel ba$$

tak, aby šestiúhelník $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ *byl rovnostranný. Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, x strana šestiúhelníka, jest dokázati, že*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Zahradníček,* stud. VIII. tř. g. v Třebíči.)

Nad stranou $\overline{ab}$ sestrojme rovnostranný šestiúhelník *abdefg*, jehož strany $\overline{bd}$, $\overline{ag}$ jsou v prodloužených stranách $\overline{bc}$, $\overline{ac}$ a jehož dvě a dvě protější strany jsou rovnoběžny. Žádaný šestiúhelník $a_2b_1b_2c_1c_2a_1$ jest šestiúhelníku *abdefg* podoben a s ním v poloze středové dle středu c; paprsky $\overline{cf}$, $\overline{ce}$ stanoví ve straně $\overline{ab}$ vrcholy a_2, b_1.

Poznámka k řešení úlohy 40.

Z rovnice

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

k níž dospěli jsme při řešení úlohy 39.,*) plyne

$$\frac{2\Delta}{x} = v_a + v_b + v_c$$

*) Viz řešení úlohy 39. a 40. v předešlém ročníku.

čili

$$\frac{2\Delta}{c} \cdot \frac{c}{x} = v_a + v_b + v_c.$$

Jest tedy

$$\frac{c}{x} = \frac{v_a + v_b + v_c}{v_c} = \frac{v_c}{l_c},$$

pročež

$$l_c = \frac{v_c^2}{v_a + v_b + v_c}.$$

Hodnoty l_c aneb obdobných hodnot l_a, l_b lze užiti též ku sestrojení šestiúhelníka $a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2$.

Rovněž plynou odtud zajímavé relace

$$l_a : l_b : l_c = v_a^2 : v_b^2 : v_c^2$$

$$l_a + l_b + l_c = \frac{v_a^2 + v_b^2 + v_c^2}{v_a + v_b + v_c}.$$

Úloha 1.

Čísla přirozené řady napsána jsou vedle sebe, aniž jedno od druhého odděleno. Kterak lze ustanoviti číslici stojící na určitém místě této řady? Na př. číslici 74892 hou?

Ing. C. *Vladimír Ibl.*

Úloha 2.

Značí-li $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a_j, \ldots, a_n$ *řadu kmenných čísel od 1 počínajíc, jest dokázati, že rektangulárná rovnice tvaru*

$$xy = \left(\prod_{k=1}^{i} a_k\right) x + \left(\prod_{k=j}^{n} a_k\right) y + 1$$

nemůže míti ani více ani méně než dvě celistvá kladná řešení.

Posl. fil. *Innocenc Hanzlík.*

Úloha 3.

Značí-li π *úhel přímý, jest dokázati, že*

$$\cos^2\frac{\pi}{17}+\cos^2\frac{2\pi}{17}+\cos^2\frac{3\pi}{17}+\cos^2\frac{4\pi}{17}+\dots$$
$$+\cos^2\frac{8\pi}{17}=4-\frac{1}{4}.$$

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Úloha 4.

K logarithmování upraviti jest výrazy

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos 2\beta}-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos 2\beta}-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

i jejich součet a rozdíl.

Posl. fil. *R. Hruša.*

Úloha 5.

Dán jest rovnoramenný trojúhelník abc, jehož úhly při půdici ab mají po 36°. Budiž dokázáno, že příčka $\overline{ad}$ půlící úhel a rovná se dvojnásobné výšce $\overline{cf}$.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Úloha 6.

Sestrojiti jest rovnoramenný trojúhelník abc, dány-li vzdálenosti vrcholů při půdici od středu o kružnice vně vepsané, kteráž dotýká se ramene bc a prodloužených druhých dvou stran.

Učitel *Frant. Jirsák.*

Úloha 7.

Sestrojiti jest čtyrúhelník, jemuž lze kružnici opsati a jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo. Dána jest strana a přilehlé k ní úhly.

Posl. fil. *Rud Hruša.*

Úloha 8.

Do kružnice vepsán čtyřúhelník, jehož úhlopříčky stojí na *sobě kolmo. Dána-li jedna strana a přilehlé k ní úhly, jest vypočítati poloměr kružnice opsané.*

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Úloha 9.

Jsou-li ve čtyrúhelníku abcd tři strany stejné

$$\overline{bc} = \overline{cd} = \overline{da} = b,$$

jest o stranách a úhlech jeho dokázati relace:

$$\sin \alpha - \sin \beta = \sin (\alpha + \delta) = -\sin (\beta + \gamma),$$

$$a : b = \sin \frac{\gamma - \delta}{2} : \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

Úloha 10.

Z kterého místa dráhy zemské viděli bychom Merkura nejdále od slunce? Podáno buď řešení i odůvodnění geometrické!

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Úloha 11.

Úhlopříčný řez komolého čtvercového jehlanu má podobu polovice pravidelného šestiúhelníka o straně a. Jest vypočítati povrch a obsah jehlanu.

Prof. *Th. Schulz.*

Úloha 12.

Rozdělíme-li výšku kužele na n stejných dílů a vedeme dělicími body roviny rovnoběžné se základnou, rozdělí se plášť kužele na části tvořící řadu arithmetickou stupně prvního a kužel na díly tvořící řadu arithmetickou stupně druhého. Které jsou ty řady?

Prof. *Th. Schulz.*

Úloha 13.

V nádobu mající tvar kužele komolého, větší hranou vzhůru obráceného, vložili jsme kouli, která se dotýká kraje i dna nádoby

a ponořila se do $\frac{2}{5}$ *svého poloměru; 39·697 kg vody vyteklo. Kolik vody zbylo v nádobě původně zcela naplněné, je-li poloměr dna roven* $\frac{2}{3}$ *poloměru hořejší hrany?*

Prof. *Th. Schulz.*

Úloha 14.

Dány jsou rovnice tří kružnic:

$$K_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 - 2 - \sqrt{3} = 0$$
$$K_2 \equiv 2x^2 + 2y^2 - 8x + 2 + 3\sqrt{3} = 0$$
$$K_3 \equiv 2x^2 + 2y^2 - 6x - 2y\sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} = 0.$$

Jest dokázati, že kružnice tyto navzájem se dotýkají, a ustanoviti plochu mezi nimi obsaženou.

Prof. *Th. Schulz.*

Úloha 15.

Dvě kuželosečky dotýkají se svými vrcholy přímky T v jediném bodě. Tečny vedené z libovolného bodu přímky T dotýkají se kuželoseček v bodech A, B. Spojnice obou bodů prochází pevným bodem.

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.