Josef Šolín

Počátkově arithmografie. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 3, 116--133

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122567`

Počátkové arithmografie.

Píše

prof. Josef Šolín.

(Dokončení.)

IX. Řešení rovnic stupně čtvrtého.

Dvě involuční řady bodové $\ddot{P}_{1.2}$, $\ddot{P}'_{1.2}$ buďtež soumístné a projektivné. Úplná družina $m_1 \,.\, m_2$, $m'_1 \,.\, m'_2$ složeného útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\ \ddot{P}'_{1.2})$ skládá se z dvojiny $m_1 \,.\, m_2$ řady $\ddot{P}_{1.2}$ a z příslušné dvojiny $m'_1 \,.\, m'_2$ řady $\ddot{P}'_{1.2}$.

Vytknouce na přímce P určitý počátek o, stanovme body m_1, m_2, m'_1, m'_2 úsečkami $om_1 = x_1$, $om_2 = x_2$, $om'_1 = x'_1$, $om'_2 = x'_2$; společnou známkou prvních dvou buďiž x, druhých dvou x'. Pak souvisí proměnné x, x' rovnicí, která je co do x i co do x' stupně druhého, majíc dále tu zvláštnost, že její kořeny x a x' odpovídají si na vzájem dva a dva, t. j. že obě hodnoty x'_1 a x'_2, jež náležejí k určité hodnotě x_1 proměnné x, náležejí také k jiné ještě hodnotě x_2 této veličiny. Jak patrno, vyhovuje této podmínce každá rovnice, v níž mohou se rozloučiti obě proměnné, a kterouž tedy psáti lze ve formě

$$\varphi(x) = \psi(x'),$$

kde $\varphi(x)$ a $\psi(x')$ jsou vůbec lomené racionalné funkce, jichž čítatelé i jmenovatelé nepřekročují stupně druhého. Položíme-li zajisté

$$\varphi(x) = \psi(x') = m,$$

kdež znamená m libovolnou stálou veličinu, dávají rovnice

$$\varphi(x) = m, \quad \psi(x') = m,$$

jsouce stupně druhého, dvě dvojiny x_1, x_2; x'_1, x'_2 kořenů, jež odpovídají si vzájemně spůsobem výše vytčeným. *)

Sjednocuje-li se v určité družině $e_1 \,.\, e_2$, $e'_1 \,.\, e'_2$ jeden z obou bodů jedné dvojiny s některým bodem dvojiny druhé,

*) Přirovnej „Chasles, Construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré“ (Liouville, Journal des Mathématiques t. XX.).

máme samodružný bod složeného útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\ \ddot{P}'_{1.2})$. Takovým bodům svědčí podmínka $x = x'$, kterouž rovnice svrchu dotčená mění se v rovnici stupně čtvrtého co do veličiny x, určujíc tedy čtyři samodružné body útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\ \ddot{P}'_{1.2})$, jež mohou býti buď vesměs realné neb dva reálné a dva idealné aneb všecky čtyři idealné.

Dána-li naopak rovnice čtvrtého stupně

$$x^4 + ax^3 + bb'x^2 + cc'c''x + dd'd''d''' = 0, \qquad (1)$$

kdež jednotliví součinitelé znamenají dané úsečky, lze ji bráti za rovnici samodružných bodů složeného útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\ \ddot{P}'_{1.2})$, jehož rovnice musí tedy jednak vésti k rovnici (1), jinak i hověti podmínce svrchu dotčené. Grafické řešení rovnice (1) záleží pak v tom, že se strojí samodružné body útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\ \ddot{P}'_{1.2})$, což vykonati lze spůsobem obdobným k řešení rovnic stupně třetího. Promítáme-li totiž útvar $(\ddot{P}_{1.2}\ \ddot{P}'_{1.2})$ na čáru Γ druhého stupně z kteréhokoli jejího bodu s, obdržíme na ní útvar bodový $(\ddot{\Gamma}_{1.2}\ \ddot{\Gamma}'_{1.2})$, skládající se z dvou projektivných řad involučních stupně druhého. Paprsky $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{m}_2, \ldots$, stanovené dvojinami $\mathfrak{m}_1 . \mathfrak{m}_2$ involuční řady $\ddot{\Gamma}_{1.2}$, náležejí k určitému svazku paprskovému $\bar{s}_0$; obdobně tvoří paprsky $\mathfrak{m}'_1\ \mathfrak{m}'_2, \ldots$, stanovené dvojinami $\mathfrak{m}'_1 . \mathfrak{m}'_2$ řady $\ddot{\Gamma}'_{1.2}$, určitý svazek paprskový $\bar{s}'_0$. Svazky $\bar{s}_0$, $\bar{s}'_0$ jsouce projektivné vytvořují vzájemným se protínáním paprsků sdružených čáru Δ stupně druhého, jež prochází oběma středy s_0, s'_0 a t. d. Průsečíky čar Γ, Δ jsou pak samodružnými body složeného útvaru $(\ddot{\Gamma}_{1.2}\ \ddot{\Gamma}'_{1.2})$ i promítají se z bodu s na přímku P v žádaných samodružných bodech útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\ \ddot{P}'_{1.2})$.

Řešení úlohy vyžaduje tedy opět sestrojení průsečíků dvou čar Γ, Δ, z nichž Γ je dána úplným obrazem svým, Δ však pěti body. Poněvadž konstrukce tato podrobně byla vyložena v předešlém článku VIII., kdež jednalo se o řešení rovnic stupně třetího, můžeme zde přestati na stručném vyložení některých případností zvláštních.

Za rovnici útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\ \ddot{P}'_{1.2})$, z níž nechť vyšla rovnice (1), berme n. př.

$$x^2(x'^2 + ax' + bb') + cc'c''x' + dd'd''d''' = 0 \qquad (2)$$

aneb rozloučíme-li proměnné,

$$x^2 + \frac{cc'c''\,x' + dd'd''d'''}{x'^2 + ax' + bb'} = 0. \tag{3}$$

Jak z těchto rovnic vysvítá, jest $\ddot{P}_{1.2}$ involuční řadou *souměrnou*, majíc počátek o za jeden, úběžný bod u_∞ přímky P pak za druhý bod dvojný (samodružný).

Abychom obdrželi případně tři úplné družiny útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\ddot{P}'_{1.2})$, položme za prvé

$$x^2 = 0\,,$$

což dává dvojinu hodnot $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, a vloží-li se do rovnice (2), vede dále k hodnotám

$$x'_1 = -\frac{dd'd''d'''}{cc'c''}\,,\; x'_2 = \infty\,;$$

tím stanovili jsme jednak dvojinu $o_{1.2}$, jejíž oba body sjednocují se v počátku o, jinak dvojinu $o'_1 \,.\, o'_2$ (jejíž druhý bod o'_2 jest úběžný).

Za druhé vytkněme

$$x^2 = \infty,$$

i obdržíme

$$x'^2 + ax' + bb' = 0\,; \tag{4}$$

tím dána jest úplná družina $u^\infty_{1.2}$, $u'_1 \,.\, u'_2$; první její dvojina sjednocuje se v bodě úběžném u_∞ přímky P; dvojina druhá odvodí se pak řešením rovnice (4). Jak jsme v předešlém článku (viz stanovení dvojiny $v_1 \,.\, v_2$ z rovnice $xx' + bc = 0$, obr. 14.) seznali, nezávisí konstrukce nikterak na tom, jsou-li kořeny této rovnice realné neb idealné. *).

Za třetí můžeme voliti

$$bb'x^2 + dd'd''d''' = 0\,,$$

což dávajíc dvojinu $d_1 \,.\, d_2$ (realnou neb idealnou) vede dále k rovnici

$$x'\left(x' + a - \frac{bb'cc'c''}{dd'd''d'''}\right) = 0,$$

---

*) Jak známo, promítnou se body u'_1, u'_2 později z bodu s na čáru Γ do $\mathfrak{u}'_1$, $\mathfrak{u}'_2$, a přímka $\mathfrak{u}'_1\,\mathfrak{u}'_2$ bude paprskem U'_0 svazku s'_0. O tento paprsek U'_0 vlastně jde; užijeme-li pak ku grafickému řešení rovnice (4) křivky Γ co pomocné čáry druhého stupně (viz řešení rovnic stupně druhého, obr. 11.), je příslušná přímka S (osa projektivnosti) žádaným paprskem U'_0, i nezáleží na tom, jsou-li průsečíky její s čarou Γ (body $\mathfrak{u}'_1$, $\mathfrak{u}'_2$) realné neb idealné.

kteráž stanoví příslušnou dvojinu $d'_1 . d'_2$, jejíž jeden bod patrně se sjednocuje s počátkem o.

Čarou Γ budiž *ellipsa* pro příčiny vyložené v čl. VIII.; tato mějž k útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\, \ddot{P}'_{1.2})$ na př. touž polohu, kterou měla v obr. 13. Na ni promítejme útvar $(\ddot{P}_{1.2}\, \ddot{P}'_{1.2})$ z bodu jejího s, který nechť má také polohu vytčenou v obr. 13. Tak obdržíme tři úplné družiny $(\mathfrak{o}_{1.2}, \mathfrak{o}'_1 . \mathfrak{o}'_2)$, $(\mathfrak{u}_{1.2}, \mathfrak{u}'_1 . \mathfrak{u}'_2)$, $(\mathfrak{d}_1 . \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}'_1 . \mathfrak{d}'_2)$ útvaru $(\ddot{\Gamma}_{1.2}\, \ddot{\Gamma}'_{1.2})$, z nich pak tři dvojiny (O_0, O'_0), (U_0, U'_0), (D_0, D'_0) sdružených paprsků svazkův $\bar{s}_0, \bar{s}'_0$. Tyto dávají pět bodů čáry $\varDelta$ a sice s_0^∞, s'_0, 1, 2, 3; bod s_0^∞ jest úběžný, a čára $\varDelta$ bude vůbec *hyperbolou*. Druhý úběžný bod t^∞ čáry $\varDelta$ můžeme odvoditi buď z daných pěti bodů na základě věty Pascalovy (užijíce náležitě na př. šestiúhelníka $s_0^\infty\, t^\infty\, 1\, s'\, 2\, 3$) aneb bezprostředně ze součinitelů rovnice dané (tak jako v čl. VIII. bod 4_∞), vložíce do rovnice (2) hodnotu $x^2 = -\alpha^2$, je-li α poloosa oa ellipsy Γ, obsažená v přímce P. Hodnota vytčená stanoví totiž idealnou dvojinu $i_1 . i_2$, jež promítá se na ellipsu Γ v idealných průsečících této čáry s úběžnou přímkou U_∞; příslušná dvojina $i'_1 . i'_2$ vychází pak z rovnice

$$x'^2 + \left(a - \frac{c\,c'\,c''}{\alpha^2}\right)x' + \left(bb' - \frac{d\,d'\,d''\,d'''}{\alpha^2}\right) = 0;$$

sestrojíme-li spůsobem známým paprsek $\mathfrak{i}'_1\,\mathfrak{i}'_2$ čili J'_0, jest úběžný jeho bod druhým bodem úběžným čáry $\varDelta$.

Tečnu v bodu s_0^∞ (asymptotu) můžeme sestrojiti buď z daných pěti bodů, užijíce věty Pascalovy (na př. šestiúhelníka $s_0^\infty\, s_0^\infty\, 1 . s'\, 2\, 3$), aneb také bezprostředně ze součinitelů dané rovnice; sestrojení druhé asymptoty $t_\infty\ t_\infty$ je pak prací snadnou.

Nyní lze postupovati spůsobem vyloženým v čl. VIII.: celá soustava rovinná přetvoří se po zákoně affinity tak, aby přetvořený svazek $(\Gamma'\varDelta' \ldots)$ obsahoval kružnici K' *), jejíž střed odvodí se spůsobem v čl. VIII. vytčeným. Středem tím není však kružnice K' ještě stanovena, poněvadž zde neprochází

*) V tom zvláštním případě, kde by se sjednotily úběžné body s_0^∞, t_∞ čáry $\varDelta$ a tato byla tedy *parabolou*, není potřebí žádného přetvořování, poněvadž — jak snadně se poznává — čára středová svazku $(\Gamma\varDelta \ldots)$ je pak hyperbolou pravoúhelnou.

bodem s, jako v případě rovnice stupně třetího; obecný způsob odvození středu, neužívá-li se totiž asymptot čáry $\varDelta'$, vede však zároveň k bodům oné kružnice, jakož vychází z následující úvahy.

Buďtež 1', 2', 3' tři neúběžné body čáry $\varDelta'$ v soustavě přetvořené. Přímky 1'2', 1'3' sekou svazek $(\Gamma'\varDelta'\ldots)$ v involučních řadách, jichž středy σ, σ' stanoviti lze způsobem známým; přímka $\sigma\sigma'$ je pak, jak v čl. VIII. již vyloženo, společnou sečnou svazku kružnic, který seče přímky 1'2', 1'3' v týchž řadách involučních, a v kterém kružnice žádaná K' jest obsažena. Kružnice 1' 2' 3' náležejíc patrně k dotčenému svazku kružnic protíná společnou sečnou $\sigma\sigma'$ v týchž dvou bodech jako hledaná kružnice K', která tedy rejsovati se může, nechť jsou ony průsečíky realné neb idealné. Další konstrukce jsou známy z článku VIII.

X. Grafické differencování.

Bereme-li v rovnici

$$y = F(x) \tag{1}$$

veličiny x, y za souřadnice bodů v soustavě Cartesiově, je rovnicí tou dána určitá čára Φ; naopak je čára tato měřickým representantem oné funkce. Rovnice (1) vyjadřuje tu souvislosť obou řad bodových $(m m_1 \ldots)$, $(n n_1 \ldots)$ (obr. 15.), jež promítají se z úběžných bodů y_∞, x_∞ os souřadnicových Y, X osnovami y_∞ $(mm_1\ldots)$, x_∞ $(nn_1\ldots)$, jichž sdružené paprsky vzájemným se protínáním vytvořují čáru Φ. Čarou touto co útvarem bodovým $(pp_1\ldots)$ dán je zároveň svazek paprskový $(PP_1\ldots)$ tečen jejích, a tento seče úběžnou přímku U_∞ své roviny v úběžné řadě, kterouž promítejme svazkem paprskovým, jehož střed budiž na př. na ose X a mějž úsečku $x = of = -f$. (Písmenem f znamenejme tu jednak bod, jinak i prostou délku sečky of.) Svazek $(P'P'_1\ldots)$ seče osu Y v řadě bodové $(n'n'_1\ldots)$, jež promítá se z bodu x_∞ osnovou x_∞ $(n'n'_1\ldots)$. Osnovy y_∞ $(mm_1\ldots)$, x_∞ $(n'n'_1\ldots)$ stanoví pak novou čáru $(p'p'_1\ldots)$ čili Φ', o níž lze dovoditi, že jest geometrickým výrazem první derivace $F'(x)$ funkce $F(x)$.

Bereme-li totiž libovolný prvek čáry Φ (na př. prvek obsahující bod p) za jednu stranu trojúhelníka, jehož ostatní dvě strany jsouce rovnoběžné s osami X, Y vyjadřují differencialy dx, dy, jest elementárný tento trojúhelník podoben trojúhelníku fon', tak že

$$\frac{dy}{dx} = \frac{on'}{fo}.$$

Znamenáme-li krátce

$$on' = y', \ fo = f,$$

máme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{f},$$

t. j. differencialný poměr souřadnic čáry Φ rovná se poměru příslušné pořadnice čáry Φ' k stálé délce f. Rovnice křivky Φ' je tedy

$$y' = f \frac{dy}{dx} = f F'(x). \text{*)} \tag{2}$$

Grafické differencování, záležejíc v odvození čáry Φ' z čáry Φ, vyžaduje patrně toliko strojení tečen dané křivky Φ. —

Než dále pokročíme, přihlédněme k jistému *případu zvláštnímu.* Dejme tomu, že by čára Φ byla *parabolou* majíc bod y_∞ za úběžný svůj střed. Pak stanoví svazek $(PP_1 \ldots)$ tečen jejích na úběžné přímce U_∞, jež sama náleží k tomuto svazku, řadu bodovou projektivnou k svazku $(PP_1 \ldots)$, kterýž je tedy projektivný i k svazku $(P' P'_1 \ldots)$, jímž promítá se ona řada úběžná z bodu f, a dále k řadě $(n'n'_1 \ldots)$, v kteréž tento svazek seče osu Y. S druhé strany je však svazek $(PP_1 \ldots)$ tečen paraboly projektivný k řadě $(pp_1 \ldots)$ bodů dotyčných, a — poněvadž bod y_∞ náleží parabole — také k osnově y_∞ $(pp_1 \ldots)$ jakož i k řadě $(mm_1 \ldots)$ na ose X. Řady $(mm_1 \ldots)$, $(n'n'_1 \ldots)$ jsou tedy projektivné; poněvadž však úběžnému bodu jedné odpovídá úběžný bod druhé, jsou *podobny.*

---

*) Nemají-li veličiny v rovnici (1) význam úseček, nýbrž znamenají-li čísla, lze položiti $f = 1$ a psáti

$$y' = F'(x).$$

Čára Φ' jest proto *přímá* *). Jeli p_1 kterýkoli jiný bod paraboly, P_1 jeho tečna, t průsečík tečen P, P_1, je paprsek tr osnovy $\bar{y}_\infty$ průměrem sdruženým s tetivou pp_1; pročež $mr = rm_1$. Vytkneme-li tímto způsobem ještě jiné body a jejich tečny, obdržíme lomenou čáru opsanou parabole a mající tu zvláštnost, že *úsečka každého vrcholu jejího jest arithmetickým středem úseček obou sousedních bodů dotyčných.* Čehož užijeme v článku následujícím.

XI. Grafické integrování.

Grafické integrování záleží v sestrojení čáry Φ, dána-li Φ'. Jde patrně o to, aby se odvodil svazek $(P P_1 \ldots)$ z řad $(m m_1 \ldots)$, $(n' n'_1 \ldots)$ aneb z řady $(m m_1 \ldots)$ a svazku $(P' P'_1 \ldots)$; pokud pak ku grafickému stanovení svazku vyšší třídy stačí přiměřené množství jednotlivých paprsků jeho, jde o sestrojení lomené čáry opsané křivce Φ. K řešení této úlohy potřebí znáti souvislosť úseček vrcholů této lomené čáry s úsečkami dotyčných bodů příslušných stran.

Jsou-li P, P_1 (obr. 15.) dvě tečny čáry Φ, dále p, p_1 jich body dotyčné, mající souřadnice x a y, x_1 a y_1, náležejí oněm tečnám v soustavě XY rovnice

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) = \frac{y'}{f}(\xi - x)$$

$$\eta - y_1 = \frac{y'_1}{f}(\xi - x_1).$$

Průsečík t obou tečen má tedy úsečku

$$\xi = x + y'_1 \frac{\Delta x}{\Delta y'} - f \frac{\Delta y}{\Delta y'}, \qquad (3)$$

znamenáme-li

$$x_1 - x = \Delta x, \quad y_1 - y = \Delta y, \quad y'_1 - y' = \Delta y'.$$

---

*) Souvislosť tato vysvítá také bezprostředně z toho, že rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x + \beta$$

odpovídá rovnice

$$y = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Neznajíce napřed veličiny Δy nemůžeme bezprostředně užívati této rovnice, i nezbývá nežli rozděliti v mysli čáru Φ na oblouky dosti malé a bráti je za díly *určitých* křivek. Vytkneme-li na ose X díly mm_1, $m_1m_2, \ldots$ tak malé, že každé tři pořadné body p', p'_1, p'_2; p'_1, p'_2, $p'_3 \ldots$ dosti přibližně jsou na přímce, můžeme příslušné oblouky čáry Φ bráti za díly parabol majících bod y_∞ za střed. Pak jsou úsečky vrcholů opsané čáry lomené arithmetickými středy úseček sousedních bodů dotyčných, a strojení opsaného mnohoúhelníka je prací velmi snadnou. Díly mm_1, $m_1m_2, \ldots$ jež volíme na ose X tak, aby vyhověno bylo podmínce svrchu vytčené, mohou býti tam, kde čára Φ' má křivost skrovnou, věčší než tam, kde křivost ta jest značná; pro usnadnění práce zvolme však vždy jisté množství pořadných dílů *rovných*, nemůžeme-li voliti rovné všecky. Abychom obešli rozpolování, přenášejme tu ihned polovice mr, rm_1, m_1r_1, $r_1m_2, \ldots$ těchto dílů. K bodům m, $m_1, \ldots$ odvodí se z obrazu křivky Φ'*) příslušné body n', $n'_1, \ldots$ osy Y; přiložíce pak pravídko na body f, n' veďme tečnu P, průsečíkem jejím t s přímkou rt dále tečnu P_1 a t. d.

Ku zkoušce přesnosti a po případě k opravě užiti lze rovnice (3), jež snadně se strojí. Berme tetivu $p'p'_1$ za jednu úhlopříčnou rovnoběžníka, jehož strany jsou rovnoběžné s osami X, Y; druhá úhlopříčná $q'q'_1$ seče pak osu X v bodu s tak, že

$$\frac{ms}{mq'} = \frac{p'q'_1}{p'q'}$$

aneb

$$ms = y'_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y'}$$

a sice co do velikosti i znaménka; protož

$$os = x + y'_1 \frac{\Delta x}{\Delta y'} .$$

Přeneseme-li dále

$$ss_1 = nn_1 = \Delta y ,$$

*) Není-li čára Φ' zobrazena, nýbrž dána-li svou rovnicí, lze odvoditi jednotlivé hodnoty veličiny y' bezprostředně z této rovnice. V kterémž případě soudíme z rozdílů každých dvou pořadných hodnot Δy, Δy_1 o tom, vyhovuje-li délka dílů $m\,m_1$, $m_1m_2 \ldots$ podmínce svrchu vytčené.

vedouce pak $st_0 \parallel fn'$, $s_1 t_0 \parallel fn'_1$, obdržíme tím bod t_0, který náleží pořadnici $r't$ vrcholu t, poněvadž

$$\frac{rs}{ss'} = \frac{fo}{n'n'_1}$$

čili

$$rs = f\frac{\Delta y}{\Delta y'}$$

a tedy

$$sr = -f\frac{\Delta y}{\Delta y'} .$$

Pro lepší přehled vztahovali jsme obě čáry Φ, Φ' k téže soustavě souřadnicové; stačí však, mají-li obě soustavy osy rovnoběžné. Co se týče čáry Φ, může ostatně kterýkoliv paprsek osnovy $\overline{x}_\infty$ bráti se za osu X, což souvisí patrně s neurčitou stálou integrační.

Křivka Φ představuje integrál neomezený; omezený integrál dán je rozdílem pořadnic téže čáry, náležejících k úsečkám, jež vyjadřují příslušné meze.

Obr. 16. ukazuje grafické stanovení funkce

$$y = \int \frac{\cos x}{x}\, dx ,$$

kdež tedy

$$y' = \frac{\cos x}{x}, \quad f = 1 .$$

K stanovení jednotlivých hodnot veličiny y' slouží kružnice K opsaná poloměrem $r = 1$ z počátku o soustavy.

Desetiny tohoto poloměru přenášeny na osu X a zároveň na kružnici; promítnutím příslušných bodů kružnice na osu X odvozeny hodnoty $\cos x$, načež sestrojovány hodnoty y' dle úměry

$$\frac{y'}{1} = \frac{\cos x}{x} .$$

Z těchto hodnot y' sestrojeua křivka Φ', ač jí dále se neužívalo. Ostatní výkony byly svrchu vyloženy.

V obr. 16. sestrojen také omezený integrál

$$\int_1^3 \frac{\cos x}{x}\, dx = \overline{I\, III_0} .$$

Připomenutí 1. Vytkneme li místo bodu f osy X, majícího úsečku $-f$, bod osy Y mající pořadnici $-f$, seče svazek $\bar{f}$ osu X v řadě $(m'm'_1 \ldots)$, o níž platí souvislost

$$\frac{x'}{f} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{F'(x)}.$$

Řady této lze výhodně užívati místo řady $(n'n'_1 \ldots)$, dána-li první derivace analyticky, a strojí-li se reciproká její hodnota snadněji nežli derivace sama, na př. dáno-li

$$y' = \frac{a}{x}.$$

Připomenutí 2. Dosud stanovili jsme čáru Φ průsekem svazku $(P P_1 \ldots)$ s osnovou y_∞ $(m m_1 \ldots)$. Jak patrno, můžeme místo této osnovy bráti také osnovu x_∞ $(n n_1 \ldots)$ skládajíce pak čáru Φ z obloučků parabol majících bod x_∞ za střed. Výměna tato prospívá zvláště tam, kde hodnoty derivace jsou veliké, v kterémž případě užívá se zároveň řady $(m'm'_1 \ldots)$ místo řady $(n'n'_1 \ldots)$*).

Dodatek.

XII. O grafickém stanovení obsahu obrazců rovinných.

Grafickým stanovením obsahu jakéhokoli obrazce rozumí se vyšetření druhého hlavního rozměru obdélníka, jehož jeden hlavní rozměr má určitou velikost, a jehož obsah rovná se obsahu obrazce daného, jak to vyjadřuje rovnice

$$P = p x,$$

kde znamená P obsah daného obrazce, p daný hlavní rozměr obdélníka, x pak druhý hlavní rozměr, který stanoviti se má. Nazývejme p *půdicí*, x *úsečkou určovací*, vyšetření této úsečky pak *uvedením obsahu P na půdici p.***)

Všeliké výkony týkající se obsahů plošných lze pomocí uvádění na půdici nahraditi operacemi, jichž předmětem jsou

---

*) V příčině grafického integrování rovnic differencialných [viz „*Šolín* Über graphische Integration.“

**) Jak patrno, vychází z toho počtářské stanovení obsahu, položíme-li $p = 1$; x odpovídá pak číslu, jímž obsah plošný se vyjadřuje.

úsečky. Každý obsah plošný nahradí se součinem dvou úseček, z nichž jedna — půdice — často co společný činitel čítatele i jmenovatele vyloučiti aneb co společný činitel jistých členů vysaditi se může. Často namítá se případ, kde výkony, jimž podrobiti se mají obsahy P_1, $P_2, \ldots P_n$, jsou vyjádřeny funkcí *rovnoměrnou*

$$F(P_1, P_2, \ldots P_n)$$

r-tého rozměru; jsou-li x_1, $x_2, \ldots x_n$ příslušné úsečky určovací, odvozené uvedením oněch obsahů na půdici p, platí, jak známo, rovnice

$$F(P_1, P_2, \ldots P_n) = p^r F(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Podrobíme-li tedy dotčeným výkonům místo obsahů úsečky jejich určovací, přistupuje k výsledku toliko ještě činitel p v mocnosti r-té.

Připomenutí 1. Tak jako úsečkám téže řady lze přisuzovati i obsahům obrazců téže rovinné soustavy určitý *smysl* a tedy určité *znaménko*. Obvod obrazce může zajisté vytvořiti se pohybem bodu m v dvojím smyslu protivném, což naznačiti lze pořádkem písmen na obvodě. (Tak lze na př. čtyrúhelník v obr. 19. zobrazený bráti buď ve smyslu 1 2 3 4 aneb ve smyslu 1 4 3 2). Promítáme-li pak tvořící bod m paprskem om ze středu o vytčeného kdekoli uvnitř obrazce neb také na obvodě samém, točí se při tom paprsek tento v jednom neb druhém smyslu, kterýž smysl přisuzujme také obsahu obrazce. Bereme-li půdici p za veličinu prostou znaménka, náleží znaménko plochy úsečce určovací.

Připomenutí 2. Ač všeliké výkony týkající se obsahů plošných nahraditi lze vůbec operacemi, jichž předmětem jsou úsečky, sluší zmíniti se také o *bezprostředném sčítání plošných obsahů*. Obsahy dvou obrazců téže rovinné soustavy sčítají se bezprostředně, mají-li obrazce společnou část obvodu a možno-li — šetříc v tom smyslu — napsati je tak, by první písmeno jednoho bylo posledním druhého a naopak; píšeme-li společnou část obvodu toliko písmeny bodů krajních, potřebí tu jen sepsati dohromady písmena obou obrazců bez proměny pořádku a vynechati ze dvou pořadných stejných písmen vždy jedno. Tak je na př. co do velikosti i smyslu

$$abcde + emna = abcdemn,$$

nechť jsou *abcde*, *emna* obrazce jakékoli, mající společnou část *ae* obvodu.

Položíce totiž střed *o* tvořícího paprsku do jednoho krajního bodu společné části obvodové, na př. do *a*, přesvědčujeme se snadně, že vytčená svrchu podmínka možnosti bezprostředného sčítání žádá $\left\{\begin{matrix}\text{souhlasný}\\ \text{protivný}\end{matrix}\right\}$ smysl obou obrazců, $\left\{\begin{matrix}\text{nekryjí-li}\\ \text{kryjí-li}\end{matrix}\right\}$ se částečně, tak že skutečně vynecháním společné části obvodové obdržíme $\left\{\begin{matrix}\text{součet}\\ \text{rozdíl}\end{matrix}\right\}$ obou obsahů. Obě tyto případnosti shledáváme na př. v obr. 18. a 19.; v obou jest

$$123 + 341 = 1234.$$

Co do *uvádění na půdici* rozeznávejme následující dva případy.

a) Dány-li bezprostředně dvě úsečky a, b, jichž součinem vyjadřuje se obsah toho kterého obrazce, jest nám toliko proměniti obdélník $a \cdot b$ v obdélník $p \cdot x$. Úloha tato, vyjádřená rovnicí

$$x = \frac{ab}{p},$$

záleží patrně v sestrojení čtvrté úměrné ke třem úsečkám daným i vykonává se známým spůsobem.

Sem náleží uvádění obdélníka, rovnoběžníka, trojúhelníka a jiných. Obr. 17. ukazuje na př. uvedení trojúhelníka 123 na půdici p. Bereme-li stranu $\overline{12} = a$ za podstavu a je-li v příslušná výška, jde o sestrojení rovnice

$$\frac{av}{2} = px,$$

aneb chceme-li se vyhnouti rozpolování,

$$av = 2p \cdot x,$$

t. j. o uvedení obsahu $a \cdot v$ na půdici $2p$. V obr. 17. vzato tedy $\overline{14} = 2p$ i vedeno $\overline{25} \,//\, \overline{43}$; $\overline{56}$ je žádaná úsečka určovací.

Máme-li *několik* obsahů plošných, z nichž je každý vyjádřen dvěma úsečkami, *sčítati* neb *odčítati*, můžeme s prospěchem užiti spůsobu vyloženého v čl. III. co *„vysazování činitelů."*

b) Nejsou-li bezprostředně dány dvě úsečky a, b, jichž součin vyjadřuje plochu danou, odvoďme si je dle známých vět planimetrických.

Vycházejme tu od libovolného *čtyrúhelníka* 1234 (obr. 18.). Vedouce vrcholem 1 přímku L zatím jakkoli, promítněme do ni úhlopříčnou $\overline{24}$ směrem úhlopříčné $\overline{13}$. Posouváme-li vrcholy 2, 4 trojúhelníků 123, 134 na přímkách $\overline{22'}$, $\overline{44'}$ rovnoběžných se společnou stranou 13, nemění se tím obsahy jejich; trojúhelník 2′34′ má proto týž obsah jako daný čtyrúhelník 1234. Obsah trojúhelníka 2′34′ dán je však polovicí součinu délky 2′4′ a vzdálenosti přímky L od vrcholu 3. Rovná-li se tedy jedna z těchto délek dvojnásobné půdici, je druhá úsečkou určovací. Z toho vycházejí následující dva spůsoby uvádění čtyrúhelníka na danou půdici:

1. Opišme dvojnásobnou půdicí co poloměrem z jednoho vrcholu co středu (2) oblouk kruhový a veďme k němu protějším vrcholem (1) tečnou L; na tuto tečnou promítněme pak úhlopříčnou druhou (24) ve směru úhlopříčné první (13). Průmět ten (2′4′) jest úsečkou určovací.

Abychom odvodili spůsob druhý, veďme bodem 2 přímku $24'' \parallel L$; pak jest $\overline{2'4'} = \overline{24''}$. Lze tedy řešiti úlohu i takto:

2. Veďme jedním vrcholem (4) rovnoběžku (44′) s druhou úhlopříčnou (13) a protněme ji obloukem kruhovým, opsaným z vrcholu protějšího (2) dvojnásobnou půdicí; žádanou úsečkou určovací je pak průmět druhé úhlopříčny (13) na kolmici ku přímce 24″, (kterýž tedy obdržíme vedouce jedním krajním bodem oné úhlopříčné rovnoběžku 13′, druhým pak kolmici 33′ ku přímce 24″).

Jak patrno, nehodí se $\left\{\begin{matrix}\text{první}\\ \text{druhý}\end{matrix}\right\}$ spůsob, je-li $2p$ $\left\{\begin{matrix}\text{věčší}\\ \text{menší}\end{matrix}\right\}$ než $\left\{\begin{matrix}\text{delší}\\ \text{kratčí}\end{matrix}\right\}$ úhlopříčná daného čtyrúhelníka. Oba spůsoby doplňují se tedy vzájemně, i lze jimi vystačiti ve všech případech.

Připomenutí. Obě konstrukce mají platnosť nejen co do velikosti ale i co do znaménka; neboť dotčeným posouvnutím vrcholů nezměnil se smysl žádného z obou trojúhelníků, z nichž čtyrúhelník daný se skládá.

V obr. 18. mají oba trojúhelníky smysl souhlasný a berou se additivně; v obr. 19. mají však smysl protivný a musí se bráti subtraktivně. V skutku je v posledním případě určovací úsečka 2′4′ čtyrúhelníka 1 2 3 4 v užším smyslu *rozdílem* určovacích úseček 1 4′, 1 2′ obou trojúhelníků 1 2 3 1 3 4. Totéž platí, je-li čtyrúhelník vyššího řádu, jako na př. 1 5 3 4 v obr. 19.; konstrukce dává tu rozdíl obou trojúhelníků 1 4 *m*, *m* 5 3, jež mají skutečně co díly čtyrúhelníka 1 5 3 4 smysl protivný.

Máme-li uvesti na danou půdici *mnohoúhelník o více než čtyřech stranách*, přetvořme jej v čtyrúhelník vyloučením nadbytečných vrcholů. Vylučování to zakládá se opět na tom, že obsah trojúhelníka se nemění, posouváme-li vrchol na rovnoběžce s protější stranou. Dán-li na př. sedmiúhelník 1 2 3 4 5 6 7 (obr. 20.), nemění se obsah trojúhelníka 1 2 3, posouváme-li vrchol 2 na rovnoběžce se stranou 1 3; posouvne-li se až do polohy 2′ na stranu 7 1, objeví se vrcholy 7, 1, 2′ na přímce jediné, i můžeme vynechati vrchol střední*) 1, čímž obdržíme šestiúhelník 2′ 3 4 5 6 7. Posouváme-li dále vrchol 3 na rovnoběžce se stranou 2′4, nemění se obsah trojúhelníka 2′ 3 4; posouvne-li se pak vrchol 3 na stranu 7 2′ do polohy 3′, objeví se tři vrcholy 7 2′ 3′ na společné přímce, i odpadne vrchol 2′, čímž obdržíme pětiúhelník 3′ 4 5 6 7. Vyloučíme-li týmž způsobem ještě vrchol 3′, obdržíme konečně čtyrúhelník 4′ 5 6 7, kterýž pak jedním z obou způsobů svrchu vyložených na půdici se uvede. (Obr. 20. představuje profil náspu dráhy, je-li průřezem povrchu půdy čára lomená.)

Dán-li *obrazec smíšenočarý*, hleďme přetvořiti jej v přímočarý. Velmi snadné jest přetvořování *obrazců kruhových:* výseče a úseče.

Výseč lze co do obsahu nahraditi trojúhelníkem, jehož podstava rovná se oblouku a příslušná výška poloměru. Rektifikaci oblouku můžeme pak graficky tím vykonati, že vedeme libovolnou tečnu a pojmouce v kružidlo délku tak malou, by ne-

*) co do pořádku číslic ve vzorci 1 2′ 3 4 5 6 7, ne však co do nahodilé polohy na společné přímce dotčených vrcholů.

bylo patrného rozdílu mezi ní co tetivou a mezi příslušným obloukem, přenášíme ji na oblouk od krajního bodu *a* až do vůkolí bodu dotyčného *t* (obr. 21.). Koncový bod posledního dílu nesjednotí se vůbec s bodem dotyčným *t**), ale vzdálenost obou nebude nikdy přes polovici dílu přenášeného; je li díl ten dosti malý, můžeme také velmi příbližně přisuzovati onen koncový bod (v obr. 21. je to bod 6) zároveň tečně a vycházejíce od něho přenesti na tuto tečnu rovné množství dílů ve směru náležitém. Rektifikace tato je velmi přesná a pohodlná; neboť pracujeme tu jediným a to do jisté míry libovolným otevřením kružidla i nepotřebujeme měřiti a přenášeti žádné určité délky. Učiníme-li totéž i s druhé strany, obdržíme podstavu *a' b'* trojúhelníka, za jehož vrchol na př. střed *o* zvoliti se může.

Obsah *úseče* rovná se rozdílu obsahů výseče *atbo* a příslušného trojúhelníka *abo* (obr. 21.) aneb — podlé toho, co o smyslu obsahů plošných bylo vytčeno — také součtu

$$atbo + oba.$$

Nahradíme-li výseč *atbo* trojúhelníkem *a'b'o*, potřebí stanoviti

$$U = a'b'o + abo = a'b'oabo.$$

Úseč přetvořena tedy v šestiúhelník *a'b'oabo*, který lze spůsobem známým přetvořiti dále v čtyrúhelník na př. *a'b'o''o'* (posouvnutím obou vrcholů *o* v rovnoběžkách s úhlopříčnými *bb'*, *aa'* na stranu *ba*.

Ještě snadnější je přetvoření *úseče parabolické.* Je-li totiž *ab* (obr. 22.) jakákoli tetiva paraboly, rovná se obsah úseče *atb* dvěma třetinám obsahu obdélníka neb rovnoběžníka majícího *ab* za podstavu, výšku pak rovnou výšce úseče — aneb čtyřem třetinám obsahu trojúhelníka téže podstavy a téže výšky. Chceme-li vyhnouti se dělení na 3 díly, postupujme takto. Přenesouce na přímku *ab* od bodu *a* čtyři díly rovné, veďme k parabole tečnu rovnoběžně s přímkou *ab*, protněme ji obloukem opsaným z bodu *a* poloměrem *a*3 v bodu 3', a konečně přenesme na přímku *a*3' délku *a*4 do *a*4'. Bod 4' lze vzíti za vrchol trojúhelníka *a*4'*b*, jehož obsah rovná se obsahu dané úseče parabolické.

*) Dělení oblouku *at na rovné díly* bylo by naprosto nepraktické.

Snadnosť této úlohy vede nás k tomu, abychom *oblouky jiných křivek brali přibližně za parabolické.* Tak přetvořen v obr. 23. čtyrúhelník smíšenočarý *abcdt* v čtyrúhelník přímočarý *abcd'* tím, že úseč *dta*, vzatá přibližně za parabolickou, nahradila se trojúhelníkem *dd'a*.

Pokud by toho žádal tvar oblouku *dta*, museli bychom jej rozděliti na dva neb i více dílů, jež by se přisoudily vůbec různým parabolám. Což by bylo nezbytné zvlášť tehdy, kdy by oblouk *dta* byl zkřiven v rozličném smyslu.

Dán-li jakýkoli *obrazec křivočarý* (obr. 24.) tak sice, že zákona výtvarného obvodové křivky snad ani neznáme, rozdělme jej rovnoběžkami případně vedenými v proužky rovné šířky; toliko proužek první a poslední budou míti vůbec šířku jinou a to menší.

Proužky vnitřní jsou smíšenočaré lichoběžníky a mohou se přetvořiti v lichoběžníky přímočaré tím, že příslušné oblouky beřeme přibližně za parabolické a nahradíme je přímkami způsobem známým; proužky krajní berou se pak za úseče parabolické a přetvoří se v trojúhelníky týmž způsobem. Obsah každého přetvořeného proužku vnitřního dán je pak součinem šířky a a střední pořadnice $y = m_1 m_2, \ldots$; abychom nemuseli šířku rozpolovati, přenášejme na přímku L případně vedenou ihned polovice šířky. Uvádíme-li na půdici p, bude úsečka určovací každého proužku dána výrazem

$$x = \frac{ay}{p},$$

což snadně se strojí. Výhodno je tu bráti šířku $a = \frac{p}{n}$, je-li n celistvé číslo; pak

$$x = \frac{y}{n}.$$

Trojúhelníky, jimiž se nahradily proužky krajní, musí uvesti se na danou půdici spůsobem obecným. Konečně sečtou se úsečky určovací veškerých proužků.

Připomenutí. Je-li šířka a dosti malá, lze nevšímati si křivosti jednotlivých obloučků, tvořících pobočné omezení proužků vnitřních, a stanoviti obsah každého takového proužku součinem ze šířky a střední pořadnice, pokud je omezena jednotlivými obloučky samými.

XIII. O grafickém stanovení obsahů tělesných.

Grafickým stanovením obsahu daného tělesa rozumí se vyšetření třetího hlavního rozměru rovnoběžnostěnu pravoúhelného, jehož dva hlavní rozměry jsou dány, a jehož obsah rovná se obsahu tělesa daného, jak to naznačuje rovnice

$$T = p\,q\,z,$$

kde znamená T obsah tělesa daného, p a q dané hlavní rozměry pravoúhelného rovnoběžnostěnu, z pak třetí hlavní rozměr, jenž stanoviti se má. Nazývejme opět p, q *půdicemi*, obdélník z obou sestrojený pak *základnicí*, dále z *úsečkou určovací*, vyšetření této úsečky pak *uvedením tělesa T na půdice p, q* aneb *na základnici pq*.*)

Všeliké výkony, jichž předmětem jsou obsahy tělesné, lze pomocí uvádění na základnici nahraditi výkony týkajícími se úseček. Každý z obsahů daných nahradí se součinem tří úseček, z nichž dvě — půdice — často vyloučiti neb vysaditi se mohou. Nezřídka namítá se případ, kde obsahy $T_1, T_2, \ldots T_n$ podrobiti se mají výkonům vyjádřeným funkcí rovnoměrnou

$$F(T_1, T_2, \ldots T_n)$$

r-tého rozměru; pak mohou se nahraditi prostě příslušnými úsečkami určovacími na základě vzorce

$$F(T_1, T_2, \ldots T_n) = p^r q^r F(z_1, z_2, \ldots z_n),$$

a k výsledku přistupují toliko ještě činitelé q^r, p^r.

Uvedení na základnici vyžaduje dvojího uvedení na půdici. Dány-li bezprostředně tři úsečky a, b, c, jichž součinem vyjádřuje se předložený obsah tělesný, uveďme nejprv plochu ab na půdici p, a je-li x příslušná úsečka určovací, dále plochu xc na půdici q, odvodíce tak úsečku z. Jest pak zajisté

$$T = abc = pxc = pqz.$$

---

*) Jak patrno, vychází z toho počtářské stanovení obsahu tělesného, bereme-li $p = q = 1$; z odpovídá pak číslu, jímž obsah tělesný se vyjadřuje.

Nejsou-li úsečky a, b, c dány bezprostředně, potřebí užiti jednak známých vět stereometrických, jinak konstrukcí vyložených v čl. XII. Máme-li na př. stanoviti obsah *prismatoidu* t. j. tělesa, jehož stěnami základními jsou jakékoli mnohoúhelníky v rovinách rovnoběžných, a jehož stěnami pobočními jsou trojúhelníky mající tedy vrcholy své ve vrcholech oněch mnohoúhelníků základních, užijme známého vzorce

$$T = \left[2P_0 + \frac{1}{2}\left(P_1 + P_2\right)\right]\frac{h}{3},$$

kde značí P_1, P_2, P_0 obsahy obou stěn základních a průřezu středního (vyvozeného rovinou rovnoběžnou se základními uprostřed obou), h pak kolmou výšku. Zobrazen-li prismatoid jako v obr. 25. půdorysem a nárysem aneb dán-li na př. půdorysem a výškou, lze snadně sestrojiti průřez střední $P_0 = mnpqrstuv$ i uvesti pak obrazce P_1, P_2, P_0 na půdici p spůsobem známým, tak že

$$P_1 = px_1, \quad P_2 = px_2, \quad P_0 = px_0.$$

Pak

$$T = p\left[2x_0 + \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right)\right]\frac{h}{3},$$

a stanovíme-li

$$2x_0 + \frac{x_1 + x_2}{2} = y,$$

zbývá sestrojiti

$$\frac{1}{3}yh = qz,$$

načež

$$T = pqz.$$

Z toho, co dosud vyloženo, vysvítá také, jak by se graficky stanovily *veličiny více než tří rozměrů.*