Emanuel Klier

Poznámky k relativitě

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 8, 284--299

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122544

Poznámky k relativitě.

Em. Klier.

(Došlo 28. prosince 1933.)

Klasický hyperbolický pohyb se světelnou rychlostí. Hyperbolický pohyb v problému dvou těles je charakterisován rovnicemi[1]):

$$h_1 = \frac{hM}{2a}, \qquad h_2 = \sqrt{hMa(\varepsilon^2 - 1)}, \tag{1}$$

h_1 je konstanta plynoucí z rovnice pro energii

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \Phi = \tfrac{1}{2}v_1^2 + \Phi_1 = h_1, \qquad \Phi = -hM/r, \tag{2}$$

h_2 je dvojnásobná plocha proběhnutá průvodičem za jednotku času

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h_2, \tag{3}$$

Pohybuje-li se bod z nekonečna, přísluním a dále do nekonečna, uchýlí se z původního směru v úhel ϑ daný vztahem

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \tag{4}$$

čili pomocí (1)

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{hM}{h_2}\sqrt{\frac{1}{2h_1}}. \tag{5}$$

Je-li v nekonečnu ($\Phi_1 = 0$) počáteční rychlost $v_1 = c$, dostáváme ze (2)

$$h_1 = \tfrac{1}{2}c^2 \tag{6}$$

a tedy

$$v^2 = c^2 - 2\Phi = c^2\left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right)$$

a velmi přibližně

$$v = c - \frac{\Phi}{c} = c + \frac{hM}{rc}. \tag{7}$$

S dostatečnou přesností bude i v perihelu ($r = \Delta$) rychlost $\Delta\, d\varphi/dt$

[1]) Charlier: Die Mechanik des Himmels.

jen málo rozdílná od c, takže podle (3) bude

$$\Delta^2 \frac{d\varphi}{dt} = \Delta c = h_2. \tag{8}$$

Úhel ϑ bude malý a tudíž podle (5), (6), (8)

$$\vartheta = \frac{2hM}{\Delta c^2}. \tag{9}$$

O tolik měl by se odchýliti i světelný paprsek následkem své energie v gravitačním poli, což je důsledkem jednak věty o setrvačnosti energie a jednak o totožnosti setrvačné a těžké hmoty (Einstein 1911).

Takto vypočítaná hodnota ϑ nevyhovuje však ani pozorování ani principu relativity, neboť byla naměřena dvojnásobná, a podle (7) roste rychlost čím blíže k přísluní, což odporuje principu relativity, podle něhož c je maximální možná rychlost vůbec. Obecná teorie relativity odstraňuje obojí nesouhlas.

Heuristické odvození výrazu ds^2 pro kulově symetrická pole gravitační. Ve speciální relativitě je invariantní výraz

$$(s - s_0)^2 = c^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2.$$

V obecné relativitě bude tento výraz platný pouze pro nekonečně malé okolí bodu (x_0, y_0, z_0, t_0), takže bude nutno položiti

$$ds^2 = c^2 dt_0{}^2 - dx_0{}^2 - dy_0{}^2 - dz_0{}^2. \tag{10}$$

Vzorce pro smršťování délek a dilataci času při pohybu podél osy X jsou:

$$dx_0 = \beta\, dx, \; dt_0 = \frac{dt}{\beta}, \; \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \; dy_0 = dy, \; dz_0 = dz. \tag{11}$$

Proveďme nyní transformaci danou rovnicemi[2]):

$$x = r, \quad dy = r\, d\varphi, \quad dz = r \sin\varphi\, d\psi, \tag{12}$$

rychlost v^2 nahraďme potenciálem podle rovnice platné pro volně padající bod

$$\tfrac{1}{2} v^2 = -\Phi = \frac{hM}{r} \tag{13}$$

a zaveďme obvyklé označení „gravitačního poloměru"

$$m = hM/c^2. \tag{14}$$

Dosadíme-li do (10) hodnoty (11) a dále (12), (13), (14), dosta-

---

[2]) Je to prostorové zobecnění příbuznosti, o níž pojednává p. dr. Ant. Pleskot v článku: Jistá příbuznost související s teorií křivek valících se. Časopis pro pěst. mat. a fys., r. 61, seš. 4 (1932).

neme známý vztah

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{m}{r}\right) c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2\, d\varphi^2 - r^2 \sin^2\varphi\, d\psi^2. \quad (15)$$

Podotýkám výslovně, že uvedený způsob odvození má pouze ilustrovati, nikoliv nahrazovati exaktní způsob odvození.

Poznámka. Podle Keplerova zákona je $av^2 = hM$, tedy $m = hM/c^2$ je ona vzdálenost, ve které je kruhová rychlost rovna světelné rychlosti.

Transformace průvodiče. K zajímavým důsledkům a pohodlnou cestou dospějeme, jestliže v rovnici (15) převedeme výraz pro prostorový oblouk

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2\, d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi\, d\psi^2 \quad (16)$$

na druhý tvar platný v prostoru s kulovou symetrií. Stane se to transformací r při nezměněných úhlech φ a ψ[3])

$$r = (1 + m/2r')^2 r'. \quad (17)$$

Tím dostáváme jednak

$$dr = \left(1 - \frac{m^2}{4r'^2}\right) dr', \quad 1 - 2\frac{m}{r} = \left[\frac{1 - m/2r'}{1 + m/2r'}\right]^2 \quad (17')$$

a jednak

$$ds^2 = \left[\frac{1 - m/2r'}{1 + m/2r'}\right]^2 c^2\, dt^2 -$$
$$- (1 + m/2r')^4 (dr'^2 + r'^2\, d\varphi^2 + r'^2 \sin^2\varphi\, d\psi^2). \quad (18)$$

Podle původního vzorce (15) nastává pro $r = 2m$ výminečný případ, t. zv. Hadamardova katastrofa. Podle (17) nastane v transformovaných souřadnicích pro $r' = \frac{1}{2}m$. V tomto místě muselo by podle (15) nebo (18) být dt nekonečně velké, t. j. čas by plynul nekonečně zvolna. Gravitační radius $m = hM/c^2$ pro Slunce je asi 3 km. Tedy katastrofa nastala by uvnitř sluneční hmoty. Tam však platí jiné zákony.[4]) Měla-li by katastrofa nastati aspoň na povrchu ústřední hmoty, musela by hmota M být tak velká, aby m se rovnalo poloměru tělesa. Tak velké hmoty však vůbec neexistují, neboť příliš velkým světelným tlakem by se rozprchly (Eddington). Tím je zabráněno Hadamardově katastrofě přírodou samou. Abstrahujeme-li od představ Eddingtonových a připustíme možnost libovolně velké hmoty, pak podle teorie relativity nastane — za předpokladu tekutého ústředního tělesa — již při menším poloměru ústředního tělesa, než žádá Hadamardova katastrofa, ten případ,

[3]) Pauli: Relativitätstheorie 1921.
[4]) Viz na př. Weyl: Raum, Zeit, Materie.

že tlak je uvnitř nekonečně velký, čas plyne nekonečně zvolna, t. j. neděje se nic a tudíž nemůže ani žádná změna nastat, která by katastrofu vyvolala.

V dalším budeme se zabývati problémem rovinným, t. j. položíme $d\psi = 0$. V obecném případě dozvěděli bychom se o stáčení roviny dráhy, takto dozvíme se pouze o postupu perihelu.

Transformace (17) značí pro $m/2r'$ $\begin{matrix}\text{velké}\\ \text{malé}\end{matrix}$ proti 1 $\begin{matrix}\text{inversi.}\\ \text{posunutí.}\end{matrix}$
V našem případě bude vždy $m/2r'$ velmi malé, takže čtverec této veličiny proti 1 vynecháme, budeme s ní počítati jako s nekonečně malou veličinou, takže na př. vždy položíme

$$(1 + km/r')^n = 1 + knm/r'.$$

Následkem toho vyjdeme z rovnice (18) takto upravené:

$$ds^2 = (1 - m/r')^2 c^2 dt^2 - (1 + m/r')^2 (dr'^2 + r'^2 d\varphi^2). \qquad (19)$$

V tomto zobrazení je původní neeuklidovský element $d\sigma$ zobrazen euklidovským elementem $d\sigma_E$, neboť je

$$d\sigma^2 = (1 + m/r')^2 d\sigma_E^2. \qquad (20)$$

Lokální křivost. Neeuklidovská geometrie roviny $r\varphi$ je shodná s rovinou na rotačním paraboloidu

$$r^2 = 8m\,(r - 2m).^{5)} \qquad (21)$$

Uvedenou transformací zobrazujeme konformně tuto plochu do roviny $r'\varphi$ a za předpokladu malého $m/2r'$ lze (20) psáti

$$d\sigma^2 = \frac{d\sigma_E^2}{(1 - m/r')^2}, \qquad (22)$$

Lobačevského hyperbolická geometrie je shodná s geometrií na kouli o imaginárním poloměru. Stereografickým promítnutím do roviny dostáváme pro oblouk Lobačevského a oblouk obrazu $d\sigma_E$ vztah

$$d\sigma_L^2 = \frac{d\sigma_E^2}{(1 - r'^2/\alpha^2)^2}, \qquad (23)$$

kde α je parametr Lobačevského prostoru a rovná se dvojnásobné absolutní hodnotě poloměru koule výše zmíněné. Srovnáním (22), (23) shledáváme, že lze položiti

$$\frac{r'^2}{\alpha^2} = \frac{m}{r'},$$

[5]) Flamm: Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Phys. Zeitschr. Bd. 17 (1916).

tedy

$$\alpha = \sqrt{\frac{r'^3}{m}} = c\sqrt{\frac{r'^3}{hM}}. \tag{24}$$

Z rovnice paraboloidu (21) počítejme Gaussovu míru křivosti (vynechávajíce ve výsledku čtverce veličiny m)

$$k^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

kde p, q, r, s, t jsou známé veličiny z teorie ploch. Výsledek počtu je

$$R = i\sqrt{\frac{r^3}{m}} = ci\sqrt{\frac{r^3}{hM}}$$

nebo též dosti přesně

$$R = ci\sqrt{\frac{r'^3}{hM}} = i\alpha. \tag{25}$$

Tedy absolutní hodnota poloměru křivosti rovná se parametru Lobačevského prostoru, který lokálně může nahraditi paraboloid.

Poněvadž pak dále podle Keplerova zákona je

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{hM}{4\pi^2}, \tag{26}$$

bude podle (25)

$$2\pi \,|\, R \,|\, = cT. \tag{27}$$

To znamená: Vzdálenosti r odpovídá podle (26) kruhová dráha o době oběhu T. Téže vzdálenosti odpovídá podle (25) poloměr křivosti R a ten je tak velký, že by bod proběhl světelnou rychlostí za dobu T kruh, jehož poloměr je právě poloměr křivosti.

Zavedením úhlové vychlosti ω dostáváme z (27) zajímavý vztah

$$\omega \,|\, R \,|\, = c. \tag{27'}$$

Dospěli jsme tedy k důležitému poznatku. V gravitačním poli s kulovou symetrií je křivost negativní a ubývá s třetí mocninou vzdálenosti. Považovala-li se až do nedávna křivost prostoru jako celku za kladnou, nebylo možno přejíti od negativní křivosti lokální k positivní celkové. Z posledních úvah de Sitterových a Heckmannových však vyplývá, že nemůžeme rozhodnouti dosud, je-li skutečná křivost kladná či záporná. Předchozí řádky snad jsou příspěvkem k tomu, že, je-li lokální křivost negativní, je i průměrná křivost negativní.

Poznamenejme ještě, přijmeme-li Eddingtonovu hodnotu pro poloměr křivosti $R = 10^9$ světelných roků, že podle (25) pro Slunce nabude stejnou absolutní hodnotu poloměr křivosti ve vzdálenosti asi 55 světelných roků.

Rozpínání vesmíru. Poněvadž křivost je funkcí vzdálenosti, lze říci, že, vzdaluje-li se zdroj gravitačního pole od pozorovatele, bude se křivost pro něho měniti s časem a sice bude (vynecháváme čárky při r)

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}. \tag{28}$$

Podle (25) je

$$\frac{dR}{dr} = \frac{ci}{\sqrt{hm}} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{r} = \frac{3}{2} \frac{R}{r}, \tag{29}$$

takže

$$\frac{dR}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{dr}{dt}$$

čili

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}. \tag{30}$$

Považujeme-li levou stranu za konstantu a sice $1/R \,.\, dR/dt \doteq = 5{,}7 \,.\, 10^{-10}$ roku^{-1},[6]) vyplývá z (30), že rychlost vzdalování dr/dt je úměrná vzdálenosti r, což souhlasí s pozorováním mimogalaktických mlhovin. Ptejme se nyní, jaká bude rychlost ve vzdálenosti 1 megaparsecu $= 10^6$ parsec $\doteq 3{,}08 \,.\, 10^{19}$ km. Tu bude podle (30)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{5{,}7 \,.\, 10^{-10}}{365 \,.\, 24 \,.\, 3600} \,.\, 3{,}08 \,.\, 10^{19} \,.\, \frac{2}{3} = 372 \text{ km/sec},$$

což zhruba se shoduje s hodnotou 465 km/sec. odvozenou z Hubbelových pozorování na Mount Wilsonu,[7]) která mohou míti chybu $\pm 20\%$.

Pro sférický prostor se klade $r = R\chi$, takže $dr/dt = dR/dt\chi$, čili $1/R \,.\, dR/dt = 1/r \,.\, dr/dt$, takže na 1 megaparsec vyjde rychlost $\frac{3}{2}$ krát větší než výše vypočtená, t. j. 557 km/sec. Zdá se, že ve skutečnosti platí $1/R \,.\, dR/dt = \frac{5}{4} \,.\, 1/r \,.\, dr/dt$, čemuž by odpovídalo $R \sim r^{5/4}$ a tím docílil by se úplný souhlas s pozorováním.

Základní případy. Pro statické kulově symetrické pole gravitační platí rovnice[8]):

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{m}{r}\right) c^2 \, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2 \, d\varphi^2,$$

$$\left(1 - 2\frac{m}{r}\right) c \frac{dt}{ds} = \text{konst.} = A, \quad r^2 c \frac{d\varphi}{ds} = \text{konst.} = B.$$

[6]) H. Mineur: L'Univers en expansion 1933, str. 31.
[7]) H. Slouka: O rozměrech vesmíru a jeho instabilitě. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. 61, čís. 8 (1932).
[8]) Weyl: Raum, Zeit, Materie.

Mysleme si na tyto rovnice provedenu naši transformaci (17). Ve výsledcích vynechme čárku při r, považujme opět m/r za velmi malé a dostaneme:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 c^2\, dt^2 - \left(1 + \frac{m}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2\, d\varphi^2),$$

$$\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 c\,\frac{dt}{ds} = A,\quad r^2\left(1 + \frac{m}{r}\right)^2 c\,\frac{d\varphi}{ds} = B.$$

Pro stručnost označme $f = 1 - m/r$, $g = 1 + m/r$, takže bude:

$$ds^2 = f^2c^2\, dt^2 - g^2\, d\sigma^2,\quad f^2c\,\frac{dt}{ds} = A,\quad g^2cr^2\,\frac{d\varphi}{ds} = B. \tag{33}$$

Veličinu r', kterou nyní označujeme r, považujme jaksi za „tu pravou“ velikost průvodiče, kterou opravdu měříme. Opravňují nás k tomu úspěchy, které již při vyšetřování křivosti jsme poznali a které ještě z dalšího budou patrny.

Poznámka. Myslíme-li si v rovnicích (33) r nahrazeno poloměrem R podle (25), pak budou ostatní veličiny vyjádřeny pomocí R. Toť ilustrace relativistické myšlenky. Ústřední hmota vtiskne prostoru geometrii, určitou křivost a jde jen o volbu souřadného systému vhodného k řešení.

Vyjádřeme z rovnic (33) dr/ds, položme

$$\mu = \pm \frac{1}{g}\sqrt{\frac{A^2}{f^2} - \frac{B^2}{r^2g^2c^2} - 1},\quad \frac{d\sigma}{dt} = v \tag{34}$$

a dostaneme z (33) tento kanonický tvar[9])

$$ds = \frac{dr}{\pm\mu} = \frac{d\varphi}{\dfrac{B}{r^2g^2c}} = \frac{dt}{\dfrac{A}{f^2c}} = \sqrt{f^2c^2 - g^2v^2}\, dt. \tag{35}$$

Na základě tohoto systému dosáhneme jednotného, přehledného řešení a roztřídění základních případů. Všechny případy rozdělíme na I. mechanické, pro něž $ds \neq 0$, II. optické, pro něž $ds = 0$. Podle toho, kterou z proměnných volíme za stálou a tím čitatele i příslušného jmenovatele v (35) nulou (v optických případech jsou jmenovatele nekonečně velké a je nutno stanoviti příslušné limity poměrů), přicházíme k tomuto přehledu:

I. $ds \neq 0$.	II. $ds = 0$.
1. Žádná z veličin není konst. Pohyb hmotného bodu.	Pouze $ds = 0$. Šíření světla.

[9]) Srovnej: Dr. A. Dittrich: Methoda Hamilton-Jacobiho v mechanice Einsteinově. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. LIII, č. 1, 2 (1923).

2. $dr = 0$.	Kruhový pohyb.	Kruhový pohyb se světelnou rychlostí.
3. $d\varphi = 0$.	Radiální pohyb.	Radiální pohyb se světelnou rychlostí.
4. $dt = 0$.	Současnost. Měření délek.	Pevný bod v prostoru jakožto místo, jímž prochází světelný paprsek, definován je průsečíkem kruhu $r =$ konst. a přímkou $\varphi =$ konst., neboť ve všech těchto případech je současně $dr = 0$, $d\varphi = 0$.
5. $dr = 0$, $d\varphi = 0$.	Průběh času v daném bodě.	
6. $dr = 0$, $dt = 0$.	Měření délek na kruhu.	
7. $d\varphi = 0$, $dt = 0$.	Měření délek radiálně.	

Vztah energetický a pohyb perihelia. Ze systému (35) zvolme kombinaci

$$\frac{dt}{A/f^2c} = \sqrt{f^2c^2 - g^2v^2}\, dt,$$

z níž úpravou získáme ($m = hM/c^2$, $\Phi_0 = -hM/r = -mc^2/r$)

$$(1 + 6m/r)\, \tfrac{1}{2}v^2 + \Phi_0 = \tfrac{1}{2}c^2\,(1 - 1/A^2) = \text{konst.} \tag{36}$$

V klasické mechanice platí rovnice (2), v níž píšeme v_0 místo v a Φ_0 místo Φ, abychom rozlišili relativistický případ,

$$\tfrac{1}{2}v_0{}^2 + \Phi_0 = h_1. \tag{2}$$

Položme tedy

$$v^2\,(1 + 6m/r) = v_0{}^2,\quad h_1 = \tfrac{1}{2}c^2\,(1 - 1/A^2). \tag{37}$$

Konstanta h_1 klasifikuje dráhy a sice při $h_1 \lesseqgtr 0$ jde o dráhy eliptické, parabolické či hyperbolické. V našem případě tedy rozhoduje o tom veličina A a sice pro tytéž dráhy je $A \lesseqgtr 1$.

Uvažujme nyní pro jednoduchost kruhový pohyb, pro nějž klaďme

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r,\quad v_0 = \frac{2\pi r}{T_0} = \omega_0 r.$$

Poněvadž podle (37)

$$v = v_0\,(1 - 3m/r), \tag{38}$$

bude

$$\omega = \omega_0 - 3m/r\omega_0. \tag{39}$$

T. j.: Skutečná (relativistická) úhlová rychlost ω jeví se složena ze 2 složek a sice: z klasické ω_0 a z rychlosti $\omega_0\,.\,3m/r$, jíž otáčí se nulová (počáteční) poloha pro měření úhlu φ ve směru pohybu uvažovaného bodu. Opíše-li bod úhel φ, postoupí počáteční poloha,

t. j. perihel, o $\varphi \,.\, 3m/r$, tedy za jeden oběh posune se perihel o

$$\Delta\pi = 6\pi m/r.$$

Pro eliptické dráhy s malou výstředností lze za r zavést harmonický střed

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a(1-\varepsilon)} + \frac{1}{a(1+\varepsilon)}\right] = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}, \tag{40}$$

takže

$$\Delta\pi = \frac{6\pi hM}{ac^2(1-\varepsilon^2)}. \tag{41}$$

Doba oběhu T_0 zvětšuje se podle (39), (40) na

$$T = T_0 + T_0 \frac{3m}{a(1-\varepsilon^2)}$$

a z 3. Keplerova zákona v klasickém tvaru $a^3/T_0^2 = hM/4\pi^2$ dostaneme

$$\frac{a^3}{T'^2}\left(1 + \frac{6m}{a(1-\varepsilon^2)}\right) = \frac{hM}{4\pi^2}. \tag{42}$$

Poznámka. Prodloužení doby oběhu o $T_0 \,.\, 3m/a$ pro pohyby kruhové nastane podle 3. Keplerova, zákona prodlouží-li se poloosa a o $2m$, jak se snadno přesvědčíme.

Klasifikace otevřených drah. Pro otevřené dráhy je výhodno zavést rychlost v nekonečnu V a vzdálenost Δ v perihelu. Z (36) plyne

$$\tfrac{1}{2}V^2 = \tfrac{1}{2}c^2(1 - 1/A^2) = h_1 \tag{43}$$

čili

$$A^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2}. \tag{44}$$

Z podmínky $dr = 0$ pro přísluní $r = \Delta$ musí být (pokud není $ds = 0$, o čemž později) podle (34) $\mu = 0$ a z toho

$$B^2 = \left\{\left[\frac{c^2}{(c^2 - V^2)f^2} - 1\right]\Delta^2 g^2 c^2\right\}_{r=\Delta}. \tag{45}$$

Rovnici (36) lze dáti podle (43) tvar

$$v^2(1 + 6m/r) = 2mc^2/r + V^2.$$

Odečteme-li po každé straně výraz $V^2(1 + 6m/r)$, dostaneme

$$v^2 - V^2 = \frac{2m}{r}\,\frac{c^2 - 3V^2}{1 + 6m/r}.$$

Z této rovnice usuzujeme: Pohybuje-li se bod z nekonečna, jeho rychlost v bude proti počáteční V vzrůstat, stejná či klesat, bude-li $c/\sqrt{3} \gtreqless V$.

Klasická mechanika znala pouze případ, že rychlost směrem k perihelu vzrůstala [rovn. (7)]. Měla-li ubývati, pak šlo o síly odpudivé, pak však těleso opisovalo onu větev hyperboly, v jejímž ohnisku není ústřední hmota.[10]) Mimo to dospíváme k možnosti rovnoměrného pohybu s rychlostí $c_1 = c/\sqrt{3}$. Snad je tato rychlost i jinak důležitá, snad šíří se jí gravitace. Poukazovala by k tomu tato okolnost. V rovnici (41) pro postup perihelu zaveďme rychlost c_1, takže:

$$\Delta\pi = \frac{2\pi hM}{ac_1^2}(1 + \varepsilon^2 + \ldots)$$

a tento vzorec je shodný se vzorcem

$$\Delta\pi = \frac{2\pi hM}{au^2}(1 + \varepsilon^2 + \ldots),$$

který koncem minulého století odvodil Tisserand a v němž u byla rychlost šíření gravitačních rozruchů.[11])

Dále je pozoruhodno, že z rovnice (36) lze dospěti k starému zákonu Weberovu, jak ukážeme dále, v němž však opět vyskytne se rychlost c_1, a konečně v rovnici $1/r \,.\, \mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 1/R \,.\, c/\sqrt{3}$ pro rozpínání vesmíru objevuje se rychlost c_1.

Všimněme si ještě této okolnosti: Podle rovnice (38) odpovídá relativistické rychlosti c_1 klasická rychlost

$$v_0 = c_1\left(1 + \frac{hM}{rc_1^2}\right).$$

Je tedy hyperbolický pohyb klasický s počáteční rychlostí c_1 shodný s rovnoměrným pohybem relativistickým s rychlostí c_1.

Křivení světelného paprsku. V tomto případě je předně $\mathrm{d}s = 0$. Pak z rovnice (33) plyne pro světelnou rychlost

$$v = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{f}{g}c = c\left(1 - 2\frac{m}{r}\right) = c\left(1 - 2\frac{hM}{rc^2}\right) =$$
$$= c\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) = c + 2\frac{\Phi}{c}. \qquad (47)$$

Stejný výsledek dává (38), uvážíme-li, že klasická rychlost světelná by měla být podle (7) $v_0 = c\,(1 + m/r)$, takže podle (38) opět

$$v = c\,(1 - 2\,m/r).$$

[10]) Charlier: Die Mechanik des Himmels.
[11]) K. V. Zenger: Světová soustava elektrodynamická (1901).

Patří tedy podle naší klasifikace postup světelného paprsku do oné skupiny otevřených drah, pro něž rychlosti ubývá čím blíže k perihelu.

Poněvadž d$s = 0$, musí v systému (35) být jmenovatele nekonečně velké, takže bude nutno vyšetřiti některé limity. Dosadíme-li ze (44) $A^2 = c^2/(c^2 - V^2)$ do (34), bude

$$\frac{\mu}{B} = \pm \lim_{V=c} \frac{1}{rg^2cf} \sqrt{\frac{r^2g^2c^4}{B^2(c^2 - V^2)} - f^2} =$$
$$= \pm \lim \frac{1}{rg^2cf} \sqrt{r^2g^2c^2 \frac{A^2}{B^2} - f^2}. \tag{48}$$

Podle (35) je však

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{A} \cdot \frac{f^2}{r^2g^2} = \frac{B}{A} \cdot \frac{1 - 4m/r}{r^2}. \tag{48'}$$

Poněvadž v přísluní je $\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)_{r=\Delta} = c\left(1 - 2\frac{m}{\Delta}\right)$ a dále podle (48′) pro přísluní

$$\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)_{r=\Delta} = \frac{B}{A} \cdot \frac{1 - 4m/\Delta}{\Delta^2},$$

je konečně

$$\frac{B}{A} = \left(1 + 2\frac{m}{\Delta}\right)\Delta c$$

a tudíž

$$\frac{\mu}{B} = \pm \frac{1}{rg^2cf} \sqrt{\frac{r^2g^2}{\Delta^2}\left(1 - 4\frac{m}{\Delta}\right) - f^2}.$$

Z (35) máme

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{B}{\mu} \cdot \frac{1}{r^2g^2c}$$

a podle předešlého po dosazení za B/μ po několikeré úpravě

$$d\varphi = \mp \Delta \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{4m}{\Delta}\right) + \frac{4m}{r} - \frac{\Delta^2}{r^2}}}. \tag{49}$$

Volme souřadný systém tak (obr. 1), aby při $r = \Delta$ bylo $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Integrace (49) v mezích $r = \infty$, Δ dává

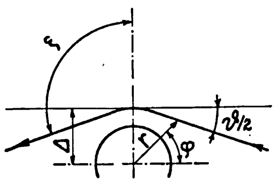
$$\varphi_\Delta - \varphi_\infty = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi_\infty =$$
$$= \pm\left[\arcsin \frac{\Delta/r - 2m/\Delta}{\sqrt{1 - 4m/\Delta}}\right]_\infty^\Delta = \pm\left[\arcsin\left(\frac{\Delta}{r} - \frac{2m}{\Delta}\right)\left(1 + 2\frac{m}{\Delta}\right)\right]_\infty^\Delta =$$

$$= \pm \left[\arc \sin \left(\frac{\Delta}{r} - \frac{2m}{\Delta} + \frac{2m}{r}\right)\right]_{\infty}^{\Delta} = \pm \left[\tfrac{1}{2}\pi + 2\,\frac{m}{\Delta}\right]. \qquad (50)$$

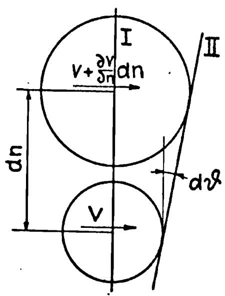
S ohledem na volbu souřadného systému nutno voliti znamení horní. Pak je patrno, že paprsek odchýlí se oproti přímočarému pohybu v nekonečnu o úhel $\frac{1}{2}\vartheta = -\, 2m/\Delta$, takže celková odchylka v průběhu ż nekonečna do nekonečna je

$$\vartheta = \frac{4m}{\Delta} \qquad (51)$$

a sice ve směru k ústřednímu tělesu. Tedy přichází v úvahu taková čára, v jejíž konkávní části je ústřední těleso.



Obr. 1.



Obr. 2.

Úloha z optiky. Je zajímavo, že výraz pro světelnou rychlost stačí na vyšetření křivení paprsku na půdě klasické optiky.

a) Šíří-li se rovinná vlna rychlostí v závislou na místě, tu podle principu Huyghensova je zdrojem elementárních vln, takže za čas dt odkloní se o úhel dϑ podle obr. 2, daný rovnicí

$$d\vartheta = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial n}\,dn\right) dt - v\,dt}{dn} = \frac{\partial v}{\partial n}\,dt.$$

Poněvadž proběhnutá dráha je $d\sigma = v\,dt$, je

$$d\vartheta = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma.^{12}) \qquad (52)$$

---

[12]) Jinak řečeno: Pro křivočarý pohyb je rychlost rovna obvodové rychlosti kolem středu křivosti $v = n \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ a tedy derivováním

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dt} = d\vartheta \cdot \frac{v}{d\sigma}, \text{ takže } d\vartheta = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma.$$

V našem případě $v = c - 2m/r\,c$ a zavedeme-li podle obrazce

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi,$$

takže

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2mc}{r^2}\sin\varphi.$$

Velmi přibližně platí klasické relace:

$$\varDelta c = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = c, \quad v \doteq c$$

a tedy

$$\mathrm{d}\vartheta = \frac{2m}{\varDelta}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

integrováno v mezích $-\frac{1}{2}\vartheta$ a $\pi + \frac{1}{2}\vartheta$ pro φ dává

$$\vartheta = 4\frac{m}{\varDelta}.$$

b) Úlohu lze považovati za řešení refrakce, kde index lomu i je dán vztahem

$$i = \frac{c - 2m/rc}{c} = 1 - 2m/r, \tag{53}$$

Pak zenitová vzdálenost (obr. 1) ζ je dána rovnicí[13])

$$\zeta = z + \int\frac{\sin z}{(ir/i_0r_0)^2 - \sin^2 z}\cdot\frac{\mathrm{d}i}{i}, \tag{54}$$

kde z je zenitová vzdálenost bez refrakce, i_0, r_0 veličiny v místě pozorovatele, tedy v našem případě

$$i_0 = 1 - 2m/\varDelta, \qquad r_0 = \varDelta$$

a přibližně:

$$\frac{ir}{i_0r_0} = \frac{r}{\varDelta}, \quad z = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \sin\varphi = \frac{\varDelta}{r},$$

takže

$$\zeta = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{2m}{\varDelta}\int_{\vartheta/2}^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{2m}{\varDelta}.$$

V případech *a*) i *b*) odchylka nastává v tom směru, ve kterém rychlost světla klesá, tedy opět ústřední hmota je uvnitř křivky.

Rudý posuv. Nechť přichází světelný paprsek ze zdroje světla, na němž je gravitační potenciál Φ_c, do místa tak vzdáleného, že

[13]) Ball: Lehrbuch der sphärischen Astronomie.

gravitační potenciál je téměř nula. Pak bude se rychlost světla měniti od $c + 2\Phi_c/c$ do c. Střední rychlost bude

$$\bar{c} = \frac{\int\limits_{\Phi_c}^{0} (c + 2\Phi/c)\,\mathrm{d}\Phi}{\int\limits_{\Phi_c}^{0} \mathrm{d}\Phi} = c + \frac{\Phi_c}{c} = c - \frac{hM}{\Delta c}. \tag{55}$$

Je to tedy tak, jakoby se zdroj světelný vzdaloval od pozorovatele (pro nějž je rychlost světla c) rychlostí $c_2 = -hM/\Delta c$. Musí se tedy objevit Dopplerův efekt a sice změní se frekvence ν_0 vysílaného světla na ν podle vzorce

$$\frac{\delta\nu}{\nu_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{c_2}{c - c_2} \doteq \frac{c_2}{c} = -\frac{hM}{\Delta c^2}.$$

Naměří tedy pozorovatel frekvenci $\nu < \nu_0$, takže nastává posuv spektrálních čar k červenému konci.

Weberův zákon. Nejprve několik historických poznámek.[14]) V roce 1846 uveřejnil Heinrich Weber svůj zákon, podle něhož odpudivá síla dvou elektrických množství e, e' ve vzdálenosti r je dána výrazem

$$P = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right]\right\}, \tag{57}$$

a upozornil, užije-li se obdobného zákona pro zjevy gravitační, že budou rozdíly mezi výpočtem a pozorováním nepostřehnutelné. Hodnoty pro postup perihelu Merkura počítané podle této rovnice vycházely příliš malé. Přenesení svého zákona na zjevy gravitační odůvodnil Weber (1877) takto: Náboj $+ e$ nechť je vázán na množství hmoty ε, $- e$ na $\alpha\varepsilon$. Jednotku hmoty volíme tak, že číselně bude e a ε stejné. Pak neutrální částice o celkové hmotě $m = (1 + \alpha)\,\varepsilon$ působí na jinou o hmotě $m' = n\,(1 + \alpha)\,\varepsilon$ odpudivými silami elektrickými

$$f = \frac{ee}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right]\right\} = \frac{\varepsilon\,.\,n\varepsilon}{r^2}\left[\ldots\right],$$

$$f' = \frac{-e\,.\,-e}{r^2}\left[\ldots\right] = \frac{\varepsilon\,.\,n\varepsilon}{r^2}\left[\ldots\right] = f$$

[14]) H. Weber: Elektrodynamische Maassbestimmung. Abhandlungen d. k. sächsischen Gesellschaft d. Wissensch. zu Leipzig 1846.

Friedrich Zöllner: Erklärung d. universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen d. Elektrizität und d. allgemeine Bedeutung des Weberschen Gesetzes. Leipzig 1882.

Hattendorf: Schwere, Elektrizität u. Magnetismus 1876.

Poincaré: Elektrizität u. Optik 1892.

Dr. A. Seydler: Základové theoretické fysiky 1880.

a přitažlivými, jež pro obecnost položíme rovné μf. Předpokládáme-li $\alpha = 1$, bude výsledná síla $= -\frac{\mu - 1}{2}\frac{mm'}{r^2}[\ldots]$. Je-li hmota v obvyklé míře M gramů $= N \,.\, m$, bude konečně síla

$$P = -\frac{\mu - 1}{2N^2}\cdot\frac{MM'}{r^2}\left\{\ldots\right\},$$

kde výraz $(\mu - 1)/2N^2$ je gravitační konstanta.

Zákon Weberův vyhovuje principu o zachování energie, neboť perpetuum mobile je znemožněno tím, že síla P má potenciál $=$

$$\Phi_0\left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2\right], \tag{59}$$

kde Φ_0 je klasický potenciál.

Vraťme se nyní k rovnici (36), přepišme ji do tvaru

$$v^2 + 2\Phi_0\,(1 - v^2/c_1{}^2) = 2h_1$$

a zaveďme „relativistický potenciál"

$$\Phi = \Phi_0\,(1 - v^2/c_1{}^2). \tag{60}$$

Tím ocitáme se ihned ve styku s Weberovým zákonem, jak patrno ze srovnání (59) se (60). Potenciál Φ skládá se podle (60) jednak z klasického a jednak z potenciálu příslušejícího odpudivé síle. S ohledem na to, že může být $v \gtreqless c_1$ a nemá-li gravitační účinek stát se odpudivým, musíme definovati sílu (působící na jednotku hmoty)

$$P = \mp\frac{\delta\Phi}{\delta r} \text{ pro } v \lessgtr c_1.$$

Pro $v = c_1$ je $\Phi = 0$, $P = 0$ a máme dříve uvažovaný případ rovnoměrného pohybu.

Pro kruhové pohyby položme v korekčním členu za v^2 hodnotu známou z klasické mechaniky, totiž $v^2 = -\Phi_0 = \frac{hM}{r}$, takže dostředivá síla bude

$$P = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{hM}{r^2}\left(1 - \frac{2hM}{rc_1{}^2}\right), \tag{61}$$

která co do absolutní hodnoty je rovna odstředivé $r\omega^2$, takže srovnáním se (60) a po úpravě dostaneme třetí Keplerův zákon

$$r^3\omega^2\left(1 + \frac{2hM}{rc_1{}^2}\right) = hM.$$

z něhož jako dříve je patrno, že klasická úhlová rychlost

$$\omega_0 = \omega\left(1 + \frac{hM}{rc_1^2}\right),$$

jež vykládá postup perihelu.

Pro pohyb se světelnou rychlostí můžeme s dostatečnou přesností položiti v korekčním členu v rovnici (60) $v = c$. Pak je

$$\Phi = -2\Phi_0 = +\frac{2hM}{r}.$$

Z toho je patrno, že je to tak, jako by se gravitační konstanta oproti klasické zdvojnásobila[15]) a změnila svoje znamení. Následkem toho však rychlosti bude k perihelu ubývat, odchylka bude dvakrát větší než podle (9), a poněvadž definujeme v tomto případě $P = +\partial\Phi/\partial r$, bude se pohyb díti po větvi, v níž leží ústřední hmota, tudíž v úplném souhlase s relativitou.

Pro bod volně padající z nekonečna je $v = -\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ tedy podle (60)

$$\Phi = -\frac{hM}{r}\left[1 - \frac{1}{c_1^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]$$

a síla

$$P = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{hM}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c_1^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2r\,\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right]\right\},$$

což je Weberův zákon, v němž však místo $2c^2$ vystupuje rychlost $c_1 = c/\sqrt{3}$.

*

Quelques remarques sur la théorie de la relativité.

(Extrait de l'article précédent.)

La théorie classique du mouvement hyperbolique explique la moitié de la déflexion du trajet de la lumière dans un champ gravifique. La théorie large de la relativité donne la valeur précise. Par une méthode élémentaire on peut venir de la théorie spéciale à la théorie large. Par la transformation $r = (1 + 2m/r')\,r'$ on arrive à la forme très utile pour $\mathrm{d}s^2$. Le rayon de la courbure du plan non-euclidien est proportionel au temps de la révolution au cercle. L'expansion de l'univers se rattache à la courbure locale. Un système canonique des équations permet une solution unifique des cas fondamentaux. Le mouvement du périhel, une classification des orbites ouvertes, l'inflexion du trajet de la lumière, la déplacement rouge et la loi de Weber sont les suits aisement déduites du précédent.

---

[15]) B. Hostinský: Einsteinovy přednášky o teorii relativity. Časopis pro pěst. matem. a fys., roč. LIII, čís. 3 (1924).