Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

O některých poučkách trigonometrických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 6, 274--276

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122453

$$C_0 = \frac{R}{q^\tau - 1}. \tag{81}$$

Renty v různých občasích konečně bychom počítali dle obecného vzorce (62), z něhož veškeré případy snadno plynou.

Tím doufáme, že jsme dostatečně výhodu nepřetržitého úrokování vylíčili a zároveň pohodlnou cestu k zavedení jeho naznačili. K výrazům, jež by v praxi častého měly užitku, zhotovily by se tabulky, dle nichž i nemathematik by se mohl v případech praktických říditi.

Nepochybujeme, že přijde doba, kde nepřetržité úrokování i od právníků za jedině spravedlivé přijato bude.

O některých poučkách trigonometrických.

Pro žáky středních škol napsal

Augustin Pánek.

Značí-li a, b, c strany a α, β, γ úhly protilehlé trojúhelníka ABC, a opíšeme-li z bodu C stranou b jakožto poloměrem kružnici, vzniknou body D a E, takže bude $CD = CE = CA = b$, a tedy $BD = a + b$, $BC = a - b$. (viz obr. 1.)

Nyní veďme bodem E rovnoběžku EJ k spojnici DA a bodem B rovnoběžku k spojnici EA, načež bude především

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAC = \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle JEB,$$

tedy

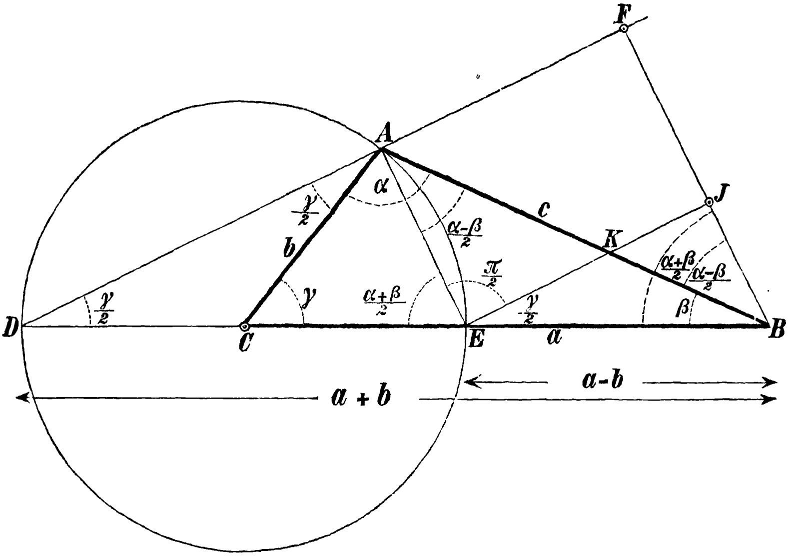
$$\sphericalangle CEA = 90^0 - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \sphericalangle CAE = \sphericalangle CBF$$

a pak

$$\sphericalangle FBA = \sphericalangle EAB = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Spůsobem geometrickým lze odvoditi z obrazce tohoto známé vzorce Mollweide-ovy, větu tangentovou a Carnotovu. Z trojúhelníka BFA a BFD plyne

Obr. 1.



$$BF = c \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad (1)$$

$$BF = (a + b) \sin \frac{\gamma}{2},$$

tudíž

$$c \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = (a + b) \sin \frac{\gamma}{2}; \qquad \text{(I)}$$

z trojúhelníka BFA a BJE jde

$$AF = c \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$AF = EJ = (a - b) \cos \frac{\gamma}{2}, \qquad (2)$$

tudíž

$$c \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = (a - b) \cos \frac{\gamma}{2}. \qquad \text{(I')}$$

Vzorce (I) a (I') slují *Mollweide-ovy* a též *Gauss-ovy* analogie.*)

*) Tyto vzorce, které plynou, jak povědomo, z věty sinusové, a jsou obdobné Gaussovým rovnicím ve sférické trigonometrii, uveřejnil Mollweide v Zach's monatliche Correspondenz, 1808.

Srovnej na př. „Šanda, Měřictví pro vyšší třídy středních škol. Díl 1. V Praze, 1876."

Z trojúhelníka BDF plyne úměra

$$\frac{BD}{BE} = \frac{FD}{FA},$$

a poněvadž

$$FD = BF \,.\, \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = BF \cot\frac{\gamma}{2}$$

$$FA = BF \,.\, \tan\frac{\alpha-\beta}{2},$$

obdrží táž tvar

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}, \tag{II}$$

což jest známá věta tangentová,*) kterou též dělením Mollweideových vzorců obdržeti lze.

Abychom větu Carnotovu odvodili, pozorujeme $\varDelta\ AFB$, v němž jest

$$c^2 = \overline{BF}^2 + \overline{AF}^2,$$

a dle (1) a (2),

$$c^2 = \left[(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}\right]^2 + \left[(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^2$$

čili

$$c^2 = a^2\left(\cos^2\frac{r}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right) + b^2\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$-\,2ab\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\right)$$

a konečně $$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma\,. \tag{III.}$$

Z toho patrno, že větu Carnotovu z Mallweide-ových vzorců odvoditi lze.

Zároveň poznáváme souvislost týchž vzorců, na jejímž základě možno z jednoho z nich ostatní odvoditi.

---

*) Tato věta dokázaná z téhož obrazce ve spise majora Unterbergera „Anfangsgründe der Mathematik.“ Wien, 1780., 2. Bd. pag. 29, v Šandově měřictví a j.

Větu tuto možno odvoditi též z $\triangle\ ABD$ a sice z úměry $\frac{BD}{BE} = \frac{DA}{EK}$, jak Zehender „Anfangsgründe der Mathematik 5. Theil, Bern 1838, pag. 28 udává a totéž odvození vyskytuje se později v Grunertově archivu, sv. 7., pag. 440. Wolf „Beiträge zu den Elementen der Geometrie“.