Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Hoza

O složitém úrokování a počtu důchodovém. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 6, 261--274

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122452`

O složitém úrokování a počtu důchodovém.

Pro žáky středních škol píše

prof. F. Hoza.

(Dokončení.)

12. Amortisace dluhu.

Má-li někdo zaplatiti dluh C po čase t, může zaplacením částky C_0 ihned se dluhu zbaviti. Avšak místo celého kapitálu C_0 lze též skládati částky rovné R buď na počátku aneb na konci každé doby. V každém případě musí učiněné splátky převedené na konec času t dáti součet C. Tudíž řídí se veličiny C_0, C a R dle týchže výrazu, jako vklad, konečná hodnota a důchod u počtu důchodového. Úlohy sem připadající řeší se pomocí vzorců (45) až (56).

Identičnost úlohy amortisace dluhu s úlohou stanovení renty bije do očí, představíme-li si, že věřiteli dáme rentu R, jejíž čas t souhlasí s časem dluhovým a která má konečnou hodnotu C rovnou kapitálu dlužnému a vklad C_0 rovný nynější hodnotě našeho dluhu.

13. Hodnota renty po čase t'.

Má-li renta nyní hodnotu C_0, bude po čase t míti hodnotu C', jež převedena na konec času $t - t'$ jí zbývajícího rovná se rozdílu mezi konečnou hodnotou všech splátek rentových a konečnou hodnotou splátek do času t' splacených.

Je-li renta R splatna na počátku každé doby kapitalisační, musí tedy

$$C' \,.\, q^{t-t'} = R \,.\, \frac{q^{t+1} - q}{q - 1} - R \,.\, \frac{q^{t'+1} - q}{q - 1} \,.\, q^{t-t'}$$

a tudíž

$$C' = R \frac{q^{t-t'} - 1}{q^{t-t'} - q^{t-t'-1}} \,.$$

Kdyby byla renta R splatna na konci každé doby, měla by po čase t' hodnotu

$$C' = R \frac{q^{t-t'} - 1}{q^{t-t'+1} - q^{t-t'}} \,.$$

Ovšem předpokládáme, že t a t' jsou čísla celistvá.

14. Ustanoviti zbytek renty.

Stává se, že trvání t renty R stanovené vzorci (48) a (53) nevyjde ve tvaru čísla celistvého.

Napotom značí t pouze část celistvou žádaného čísla a nastává úloha určiti zbytek renty, t. j. hodnotu její ku konci tohoto času t. Nazveme-li zbytek tento písmenem R', bude, když renta splatna na počátku každé doby,

$$R' = C_0 q^t - R \frac{q^{t+1} - q}{q - 1}, \qquad (57)$$

kdež C_0 značí vklad (mise) této renty. Podobně, je-li renta na konci každé doby splatná, obdržíme

$$R' = C_0 q^t - R \frac{q^t - 1}{q - 1}. \qquad (58)$$

Nevyzvedne-li se zbytek R' ihned na konci času t, nýbrž až na konci následující doby, bude činiti $R'q$.

15. Proměniti rentu na jinou.

Chceme-li rentu R o p procentech po čas t na počátku každé doby splatnou proměniti v jinou rentu R_1 zúročenou p_1 procenty po čas t_1 trvající a rovněž na počátku každé doby splatnou, jest třeba, mají-li obě renty býti rovnomocné, aby měly stejnou hodnotu C_0 počátečnou a tudíž obdržíme dle vzorce (46)

$$C_0 = R \frac{q^t - 1}{q^t - q^{t-1}} = R_1 \frac{q_1^{t_1} - 1}{q_1^{t_1} - q_1^{t_1 - 1}}.$$

Jsou-li obě renty na konci dob splatné, bude dle vz. (51)

$$C_0 = R \frac{q^t - 1}{q^{t+1} - q^t} = R_1 \frac{q_1^{t_1} - 1}{q_1^{t_1+1} - q_1^{t_1}}.$$

Jsou-li procenta při obou rentách stejná, bude $q = q_1$, načež přijmou obě poslední rovnice tvar

$$R\left(1 - \frac{1}{q^t}\right) = R_1\left(1 - \frac{1}{q^{t_1}}\right), \qquad (59)$$

z kteréhož každou z veličin R, R_1, q, t a t_1, lze ostatními vyjádřiti.

Rovněž snadno lze proměnu předsevzíti, když jedna renta na počátku a druhá na konci dob splatná.

16. Renta na věčné časy.

Je-li trvání renty nekonečné, t. j. $t = \infty$, bude

$$lim \frac{1}{q^t} . = 0 .$$

Jedná se předně o rentu splácenou počátkem dob. Dle vzorce (46) jest

$$C_0 = R \frac{q^t - 1}{q^t - q^{t-1}} = R \frac{1 - \frac{1}{q^t}}{1 - \frac{1}{q}} .$$

Má-li tato renta trvati věčně, musí tedy

$$C_0 = R \frac{q}{q-1} . \tag{60}$$

O rentě splatné koncem dob platí vzorec (51)

$$C_0 = R \frac{q^t - 1}{q^{t+1} - q^t} = R \frac{1 - \frac{1}{q^t}}{q-1} .$$

Aby však trvala věčně, musí

$$C_0 = \frac{R}{q-1} . \tag{61}$$

Patrně není renta R napotom nic jiného, než jednoduchý úrok vybíraný buď na počátku aneb na konci každé doby.

17. Renta o různých občasích.

Dejme tomu, že na počátku vybereme rentu R_0, po uplynutí času t_1 pak R_1, po t_2 opět R_2, atd. až po čase t_n vybereme poslední část R_n.

Časy t_1, t_2, ... t_n jdou od společného počátku.

Nazveme-li nynější hodnotu této renty různo-periodické C_0, musí

$$C_0 = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{R_k}{q^{t_k}} , \tag{62}$$

kdežto $t_0 = 0$.

Učiníme-li $R_k = R$, bude

$$C_0 = R \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{q^{t_k}} .$$

Budiž

$$t_k = t_1 + (k-1)\tau,$$

to jest, nechať prvá lhůta t_1 a ostatní o násobek času τ větší, kdež τ značí číslo celistvé.

Napotom obdržíme

$$\frac{1}{q^{t_k}} = \frac{q^{(n-k)\tau}}{q^{t_1+(n-1)\tau}}$$

a tudíž

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{q^{t_k}} = \frac{1}{q^{t_1+(n-1)\tau}} \cdot \sum_{k=0}^{k=n} q^{k\tau}$$
$$= \frac{1}{q^{t_1+(n-1)\tau}} \cdot \frac{q^{(n+1)\tau}-1}{q^\tau - 1},$$

pročež bude

$$C_0 = R\frac{q^{(n+1)\tau}-1}{(q^\tau-1)\,q^{t_1+(n-1)\tau}}. \tag{63}$$

Je-li však ještě k tomu $R_0 = 0$, bude

$$C_0 = R\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{q^{t_k}} = \frac{R}{q^{t+(n-1)\tau}}\sum_{k=0}^{k=n-1} q^{k\tau}$$

a tudíž

$$C_0 = R\frac{q^{n\tau}-1}{(q^\tau-1)\,q^{t_1+(n-1)\tau}}. \tag{64}$$

Kdyby dále $\tau = t_1$, přešel by tento vzorec v následující

$$C_0 = R\frac{q^{n\tau}-1}{q^{n\tau}(q^\tau-1)}. \tag{65}$$

Konečně kdyby množství n period τ bylo nekonečné, měli bychom rentu na věčné časy a sice při zvláštní lhůtě prvé t_1

$$C_0 = \frac{R\,q^{\tau-t_1}}{q^\tau-1} \tag{66}$$

a při lhůtách vesměs stejných

$$C_0 = \frac{R}{q^\tau - 1}. \tag{67}$$

18. Úrokování nepřetržité.*)

Při úrokování složitém klademe úroky vzešlé v určitém občasí ku kapitálu, čili kapitalisujeme úroky. Občasí, po uply-

*) Viz o témž předmětu článek prof. dr. F. J. Studničky v II. ročníku tohoto časopisu na str. 85.

nutí jehož úroky kapitalisujeme, volíme za míru čili jednotku časovou. V praxi jest to rok, pololetí, čtvrtletí, ba i jeden měsíc.

Náleží-li věřiteli úrok za čas, v němž dlužník kapitál zužitkoval a nevyplatí-li dlužník tento úrok po čase náležitém, náleží věřiteli též podíl na zisku, jenž pošel dlužníkovi z úroku zadrženého. Zásada tato, již přijali právníci novější doby, má v zápětí konsekvenci veleváznou. Dopustíme-li totiž úroky z úroků vůbec, musíme je dopustiti též vzhledem k době zúročení sebe menší. Jelikož dlužník nejenom kapitál, nýbrž i zisk z něho vzešlý stále zužitkuje, což se stává nepřetržitě, může býti jenom takové úrokování úplně spravedlivým, ve kterém se kapitalisují úroky po občasích nekonečně malých. Takovéto úrokování nazveme nepřetržitým, jelikož nepřetržitě úroky kapitalisuje.

Pokusíme se naznačiti, kterak tento nový způsob úrokování vede k výsledkům jak theoreticky dokonalým tak i prakticky užitečným, jež jednoduchostí a rozsahem moci své daleko předčí úrokování posavadní.

19. Základní výrazy úrokování nepřetržitého.

Nechať π značí úrok ze 100 jednotek peněžných za jednu dobu zúročení vzešlý, počítáme-li úroky jednoduché. Ovšem, dlužno doložiti, není tato doba nyní dobou kapitalisace úroků, nýbrž jest to libovolná míra časová, na př. jeden rok.

Napotom značiž C hodnotu, kterou kapitál nepřetržitě úročený dosáhne, když byl po čas t uložen.

Vzroste-li čas o Δt, vzroste kapitál o ΔC, kdež ΔC značí úroky z kapitálu C za čas Δt. Počítáme-li v čase Δt úroky jednoduché, bude

$$\Delta C = C \cdot \frac{\pi}{100} \cdot \Delta t$$

a tudíž

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{\pi}{100} \cdot C.$$

Aby úročení bylo nepřetržitým, musí čas Δt býti nekokočně malým. Napotom budou i úroky ΔC nekonečně malé a poměr differenční $\frac{\Delta C}{\Delta t}$ přejde v poměr differencialný

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\pi}{100} C. \tag{68}$$

Tato rovnice vyjadřuje princip nepřetržitého úrokování. Jelikož

$$\frac{dC}{C} = \frac{\pi}{100} dt,$$

obdržíme integrováním

$$lC = \frac{\pi}{100} t + k,$$

značí-li k stálou veličinu.

Přejdeme-li od logarithmu k číslu a obdržíme

$$C = e^{\frac{\pi}{100} t + k} = e^k . e^{\frac{\pi}{100} . t}$$

Pro $t = 0$ budiž $C = C_0$, napotom bude

$$C_0 = e^k$$

a tudíž

$$C = C_0 . e^{\frac{\pi}{100} t}. \tag{69}$$

Tento vzorec vyjádřuje vztah uloženého kapitálu C_0 na počátku s kapitálem C vzrostlým za čas t a slouží za základ nepřetržitého úrokování. Z něho vychází na jevo, že poměr $\frac{C}{C_0}$ v němž kapitál roste, jest číslo, jehož přirozený logarithmus $\frac{\pi}{100} . t$.

Nazveme-li písmenem q hodnotu, kterou bude míti jednotka kapitálu po uplynulé jednotce časové při úrokování nepřetržitém, bude

$$t = 1, \quad C_0 = 1, \quad C = q$$

a dle vzorce (69)

$$q = e^{\frac{\pi}{100}}. \tag{70}$$

Napotom lze (69) psáti ve tvaru

$$C = C_0 q^t \tag{71}$$

úplně identickém se vzorcem (1). Odtud patrno, že úrokování nepřetržité vede k algebraickým formám úplně identickým s oněmi úrokování složitého, jenom v tom spočívá podstatný rozdíl, že čas t dříve byl číslem celistvým, nyní však libovolným číslem může býti vyjádřen.

20. **O úročiteli** q.

Vycházejíce od procent π jednoduchého úrokování obdržíme dle vzorce (70)

$$lq = \frac{\pi}{100}.$$

Máme-li tedy tabulky přirozených logarithmů pokračující od tisíciny k tisícině čísla,*) snadno k danému π nalezneme příslušné q.

π	q	π	q	π	q
1	1·0100	3	1·0304	5	1·0513
1·5	1·0151	3·5	1·0356	5·5	1·0565
2	1·0202	4	1·0408	6	1·0618
2·5	1·0253	4·5	1·0460		

Je-li tedy kapitál při jednoduchých úrocích na 6 procent uložen a přejdeme-li k úrokování nepřetržitému, vzroste jednotka kapitálu na 1·0618, 100 jednotek na 106·18, pročež činí vlastně úrok 6·18, to jest o 0·18 více než při úrokování jednoduchém. Jelikož při praktickém počítání jest zvykem bráti za míru úrokovou úroky ze 100 jednotek peněžných vzešlé za jednotku časovou (za rok), zaveďmež vzorcem

$$q = 1 + \frac{p}{100} \qquad (72)$$

veličinu p, jež značí, mnoho-li 100 jednotkám peněžným přibude za jednotku časovou a nazveme p procenty úrokování nepřetržitého.

π	p	$p - \pi$	π	p	$p - \pi$
1	1	0	4	4·08	0·08
1·5	1·51	0·01	4·5	4·60	0·10
2	2·02	0·02	5	5·13	0·13
2·5	2·53	0·03	5·5	5·65	0·15
3	3·04	0·04	6	6·18	0·18
3·5	3·56	0·06			

*) Viz na př. „Hertzer, Fünfstellige Logarithmen-Tafeln, Berlin, 1872. Verlag von Gaertner“ na str. 82.

Z této tabulky vysvítá, že pro počty praktické rozdíl $p - \pi$ jest nepatrný a proto budeme raději na základě daného p než π počítati. Napotom tvoří vzorce (71) a (72) základ počítání úroků nepřetržitých právě tak, jako tvořily dříve základ úrokování složitého, jenom že nyní může číslo t býti buď celistvé aneb i lomené. V této okolnosti spočívá hlavně theoretická dokonalost úrokování nepřetržitého. Konečně můžeme, je-li toho zapotřebí, snadno určiti π ze vzorce

$$\pi = 100\, l \left(1 + \frac{p}{100}\right). \tag{73}$$

21. Tabulka pro q^t.

Mocnina q^t představuje hodnotu jednotky kapitálu po čase t. Rozdíl $q^t - 1$ není tedy nic jiného, než úrok z jednotky kapitálu za čas t. K snadnému počítání sestaví se tabulky pro q^t srovnané dle argumentů p a t. Procenta p mohou jíti od desetiny k desetině a čas t ode dne ke dni. Rozumí se samo sebou, že při výpočtu mocniny q^t užiti dlužno logarithmů Briggsových a nikoliv Napierových, neb není dáno π, anobrž p, pročež nelze se říditi bezprostředně dle vzorce (70), nýbrž dle (71) a (72).

Aby však procenta dána byla číslem π, jež se vztahuje k úrokování jednoduchému, máme za nepraktické, poněvadž π nerepraesentuje skutečné úroky ze 100 jednotek kapitálu za jednotku času, jelikož neúrokujeme jednoduše, nýbrž nepřetržitě.

Pročež nechať p značí skutečné úroky ze 100 jednotek za 1 rok při úrokování nepřetržitém a $q = 1 + \frac{p}{100}$, dále nechť t značí čas vyjádřený roky, n pak týž čas vyjádřený dny; budeť tedy

$$t = \frac{n}{365},$$

když počítáme 365 dní do roka.

Napotom ustanovíme úroky z kapitálu C za čas t vzešlé, když jej činitelem $q^t - 1$, jejž z tabulky vyčteme, znásobíme.

Je-li

$$Q = q^t = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{n}{365}},$$

musí

$$log\, Q = \frac{n}{365}\, log\left(1 + \frac{p}{100}\right). \qquad (74)$$

Na ukázku podáváme část takové tabulky.

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{n}{365}}$$

n	$p = 5$	$p = 5{\cdot}1$	$p = 5{\cdot}2$	$p = 5{\cdot}3$
38	1·005,092	1·005,192	1·005,292	1·005,391
39	227	329	431	533
40	361	466	571	676
41	496	603	710	818
42	630	740	850	960

Příklady. Na mnoho-li vzroste 3628 zl. za 42 dní na 5·1 procent? Na

$$1{\cdot}005740 \times 3628 = 3648{\cdot}825 \text{ zl.}$$

Aneb: Mnoho-li úroků vynese 1500 zl. za 40 dní na 5·2 procent? Odpověď:

$$0{\cdot}005571 \times 1500 = 8{\cdot}357 \text{ zl.}$$

Podobně lze zříditi tabulku pro podíl $\frac{1}{q^t}$ k účeli, abychom převedli kapitál C splatný po čase t na počátek tohoto času.

22. O srážce úrokové.

Srážka úroková čili diskont ustanoví se jak v odstavci 4. vyloženo, dle výrazu (9)

$$d = C\frac{q^t - 1}{q^t}.$$

Tato srážka rovná se součtu všech úroků z kapitálu C za čas t vzešlých a na počátek času t převedených. Neb za čas Δt budou úroky

$$\Delta J = C\frac{\pi}{100}\,.\,q^{-t}\Delta t$$

a tudíž

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{C\pi}{100}\,.\,q^{-t}.$$

Má-li úrokování býti nepřetržitým, musí

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{C\pi}{100} \cdot q^{-t}$$

a tudíž

$$J = \int_0^t \frac{C\pi}{100} q^{-t}\, dt$$

aneb

$$J = \frac{C\pi}{100} \frac{1 - q^{-t}}{lq} .$$

Jelikož podlé předešlého

$$\frac{\pi}{100} = lq ,$$

bude

$$J = C \frac{q^t - 1}{q^t} = d.$$

Kdybychom počítali pouze jednoduché úroky, měli bychom

$$H = 1 + \frac{\pi}{100}$$

a

$$d = C\left(1 - \frac{H-1}{H^t} t\right).$$

Že tato srážka nespravedliva, vysvítá z toho, že se nerovná součtu úroků z kapitálu C vzešlých a na počátek času t převedených, neb

$$J = C \frac{\pi}{109}\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H^2} + \ldots + \frac{1}{H^t}\right)$$
$$= C \frac{H^t - 1}{H^t} .$$

K snadnějšímu ustanovení diskonta poslouží tabulka pro $\frac{q^t - 1}{q^t}$ uspořádaná dle argumentů p a t a podávající diskont z jednotky peněžné.

22. Redukce částečných splátek.

Co povědíno v odstavci (5), platí též pro úrokování nepřetržité s tím připomenutím, že časy $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ mohou nyní býti též vyjádřeny čísly lomenými. Následkem toho odpadávají samy sebou výrazy, v nichž čas vyjádřen ve formě čísla smíšeného $t + \tau$, a sice (19) až (22).

Chceme-li částečné splátky C_1 činěné ve lhůtách τ vždy na počátku každého občasí τ, převésti na konec času $t = n\tau$, užijeme vzorce

$$C = C_1 \frac{q^{(n+1)} - q^{\tau}}{q^{\tau} - 1}. \qquad (15)$$

Činíme-li částečné splátky na konci každého občasí τ, bude

$$C = C_1 \frac{q^{n\tau} - 1}{q^{\tau} - 1}. \qquad (18)$$

Vzorce tyto, jež jsme odvodili v odstavci (5), nahradí nám nyní úplně vzorce (21) a (22). Na př. pro splátky měsíční, berouce rok za jednotku, máme $n = 12$ a $\tau = \frac{1}{12}$, pročež platí buď vzorec

$$C = C_1 \frac{q^{\frac{13}{12}} - q^{\frac{1}{12}}}{q^{\frac{1}{12}} - 1}$$

aneb vzorec

$$C = C_1 \frac{q - 1}{q^{\frac{1}{12}} - 1}.$$

24. Ukládání a vybírání kapitálu.

Ukládáme-li při úrokování nepřetržitém kapitál v jednotkách časových, platí i zde, co v odstavci 7. praveno, ovšem s doložením, že t značí i lomené číslo. Splátky částečné konané mezi jednotkou dobovou převedeme nyní na konec této jednotky dle vzorců (15) aneb (18).

Co se pak dotýče ukládání ve lhůtách různých, platí výraz (31) pro časy t, t_k zcela libovolné. Veškeré výrazy, v nichž přichází čas ve formě $t + \tau$, nyní odpadnou.

Pro ukládání ve stejných lhůtách poslouží opět vzorce (15) a (18). Vybíráme-li z kapitálu uloženého, pokračujeme, jak v odstavci 9. vyloženo a to i tehdá, když t číslo lomené. Jmenovitě užijeme v případech praktických vzorců (37), (38), (15) a (18).

Děje-li se jak ukládání, tak vybírání zároveň a sice ve lhůtách libovolných, užijeme vzorce (40) pro všecky případy. Výrazy od (41) do (44) odpadnou.

Řešení úlohy v odstavci 10. podané plyne nyní z výrazu (40), když postavíme za jednotku časovou půl roku a učiníme

$$t_k = r + (k-1)\tau, \quad t'_k = r' + (k-1)\tau',$$

načež obdržíme

$$K = \sum_{k=1}^{k=m} A_k q^{t-r-(k-1)\tau} - \sum_{k=1}^{k=n} R_k q^{t-r'-(k-1)\tau'}$$

Jsou-li

$$A_k = A, \quad R_k = R,$$

bude

$$K = A \sum_{k=1}^{k=m} q^{t-r-(k-1)\tau} - R \sum_{k=1}^{k=n} q^{t-r'-(k-1)\tau'}$$

$$\frac{K}{q^t} = \frac{A}{q^{r-\tau}} \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{q^{k\tau}} - \frac{R}{q^{r'-\tau'}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{q^{k\tau'}}.$$

Provedeme-li sečítání naznačené, obdržíme rovnici výslednou

$$\frac{K}{q^t} = \frac{A}{q^{(m-1)\tau+r}} \cdot \frac{q^{m\tau}-1}{q^\tau - 1} - \frac{R}{q^{(n-1)\tau'+r'}} \cdot \frac{q^{n\tau'}-1}{q^{\tau'}-1}. \qquad (75)$$

V příkladu numerickém máme

$$K = 0, \quad p = 3, \quad m = 15, \quad t = 30, \quad r = \frac{5}{6}$$

$$R = 1000, \quad q = 1{\cdot}03, \quad n = 3, \quad \tau = 2, \quad r' = 9\tfrac{4}{6}$$

$$\tau' = 10,$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do výrazu (75), obdržíme

$$\frac{A}{q^{28\frac{5}{6}}} \cdot \frac{q^{30}-1}{q^2-1} = \frac{R}{q^{29\frac{4}{6}}} \cdot \frac{q^{30}-1}{q^{10}-1}$$

a tudíž

$$A = \frac{R}{q^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{q^2-1}{q^{10}-1}$$

$$= \frac{1000}{1{\cdot}03^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{1{\cdot}03^2-1}{1{\cdot}03^{10}-1}$$

$$= 172{\cdot}77.$$

Z uvedeného příkladu nejlépe patrno, jak snadno lze při úrokování nepřetržitém veškeré úlohy řešiti.

25. Počítání renty.

Přihlédněme konečně k tomu, kterak budeme počítati renty při nepřetržitém úrokování. Za jednotku časovou zvolíme občasí, v němž se renta R a to buď na jeho počátku aneb konci vyplácí.

Napotom podrží veškeré výrazy odstavce 11. svou platnost. Kdyby však občasí, v němž se renta R vyplácí, bylo τ a celé trvání renty $t = n\tau$, mohli bychom pomocí vzorců (15) aneb (18) postaviti pro případ placení renty na počátku každého občasí rovnici rentovou

$$C_0 q^t = R \frac{q^{(n+1)\tau} - q^\tau}{q^\tau - 1} \tag{76}$$

a pro případ placení renty na konci každého občasí

$$C_0 q^t = R \frac{q^{n\tau} - 1}{q^\tau - 1}. \tag{77}$$

Písmeno n znamená, kolikráte renta R placena. Je-li τ aliquotní díl času t, jak výše podotknuto, lze $n = \frac{t}{\tau}$ z obou rovnic odstraniti, načež obdržíme

$$C_0 q^t = R \frac{q^{t+\tau} - q^\tau}{q^\tau - 1} \tag{78}$$

a

$$C_0 q^t = R \frac{q^t - 1}{q^\tau - 1}. \tag{79}$$

Rovnic (78) a (79) lze nyní užiti i v oněch případech, jež dříve vyžadovaly ku pomoci zvláštní vzorce (55) a (56), jež nyní odpadnou.

Z uvedených výrazů základních odvoditi specielní, jako v odstavci 11., ponecháváme laskavému čtenáři. Rovněž máme za to, že leží na bíledni, kterak při úrokování nepřetržitém ustanovíme hodnotu renty R po čase t', kterak se ustanoví po čase t zbytek její a kterak proměniti jednu rentu na druhou. Co se dotýče renty na věčné časy, tu třeba postaviti $\frac{t}{\tau} = n = \infty$ načež z rovnic (78) a (79) plynou rovnice

$$C_0 = R \frac{q^\tau}{q^\tau - 1}, \tag{80}$$

$$C_0 = \frac{R}{q^\tau - 1}. \tag{81}$$

Renty v různých občasích konečně bychom počítali dle obecného vzorce (62), z něhož veškeré případy snadno plynou.

Tím doufáme, že jsme dostatečně výhodu nepřetržitého úrokování vylíčili a zároveň pohodlnou cestu k zavedení jeho naznačili. K výrazům, jež by v praxi častého měly užitku, zhotovily by se tabulky, dle nichž i nemathematik by se mohl v případech praktických říditi.

Nepochybujeme, že přijde doba, kde nepřetržité úrokování i od právníků za jedině spravedlivé přijato bude.

O některých poučkách trigonometrických.

Pro žáky středních škol napsal

Augustin Pánek.

Značí-li a, b, c strany a α, β, γ úhly protilehlé trojúhelníka ABC, a opíšeme-li z bodu C stranou b jakožto poloměrem kružnici, vzniknou body D a E, takže bude $CD = CE = CA = b$, a tedy $BD = a + b$, $BC = a - b$. (viz obr. 1.)

Nyní veďme bodem E rovnoběžku EJ k spojnici DA a bodem B rovnoběžku k spojnici EA, načež bude především

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAC = \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle JEB,$$

tedy

$$\sphericalangle CEA = 90^0 - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \sphericalangle CAE = \sphericalangle CBF$$

a pak

$$\sphericalangle FBA = \sphericalangle EAB = \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Způsobem geometrickým lze odvoditi z obrazce tohoto známé vzorce Mollweide-ovy, větu tangentovou a Carnotovu.

Z trojúhelníka BFA a BFD plyne