Antonín Libický

Základové geometrického počtu Grassmannova. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 5, 321--341

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122435

Základové geometrického počtu Grassmannova.

Podává A. Libický, professor v Roudnici.

(Dokončení.)

Interní součin dvou bodů jednoduchých. Předpokládáme, že pro interní násobení dvou bodů platí všechny zákony, které jsme poznali při interním násobení dvou vektorů. Intern. součinu $[A \mid B]$ můžeme dáti tvar, jehož později užijeme, uvážíme-li, že jest

$$(A + B)^2 = A^2 + 2[A \mid B] + B^2 \text{ *)},$$
$$(-A + B)^2 = A^2 - 2[A \mid B] + B^2;$$

odečtením těchto rovnic obdržíme:

$$(A + B)^2 - (-A + B)^2 = 4[A \mid B]$$

aneb, protože $A + B = 2C$ a $-A + B$ se rovná vektoru $2p$,

$$[A \mid B] = C^2 - p^2. \tag{29}$$

Z toho jde, že hodnota intern. součinu dvou bodů se nezmění, zůstávají-li oba body protějšími body plochy kulové, jejíž střed jest bod C a poloměr vektor p.

Bod C nazývá se dle Grassmanna *střední hodnotou* součinu $[A \mid B]$. Střední hodnotou dvojmoci A^2 jest dle rovnice $C = \frac{A + B}{2}$ jednoduchý bod A a střední hodnotou dvojmoci αA^2 mnohoná-

*) Obdobná rovnice pro vektory, totiž $(a + b)^2 = a^2 + 2[a \mid b] + b^2$ neb, položíme-li $c = a + b$, též $c^2 = a^2 + 2[a \mid b] + b^2$, představuje patrně větu cosinovou.

sobný bod αA. Poněvadž lze vektor pokládati za bod, jehož součinitel jest nullou, rovná se střední hodnota vektora nulle.

Podobně najdeme pro interní součin bodu jednoduchého a vektora výraz:

$$[A \mid b] = \frac{1}{4}(C^2 - D^2), \tag{30}$$

kde jsou body C a D určeny rovnicemi

$$A + b = C, \quad A - b = D.$$

Vedeme-li tedy bodem A v obou směrech vektory rovnoběžné a stejně dlouhé s násobitelem b, obdržíme koncové body C a D, jichž součtem jest bod 2A. Střední hodnotou součinu $[A \mid b]$ jest pak polovice vektora b. Neboť za $[A \mid b]$ lze také psáti $[A \mid (-A + C)] = -A^2 + [A \mid C]$ a střední hodnotou tohoto součtu jest $-A + E$, značí-li E bod uprostřed A a C položený; vektor ten rovná se pak $\frac{b}{2}$.

Budiž zde ještě poznamenáno, že hodnota součinu bodu A a vektora b se nemění, pošineme-li bod A do polohy A′, která se nalézá v rovině, bodem A kolmo ku b vedené. Neboť kladouce $-A' + A = r$, obdržíme

$$[A \mid b] = [(A' + r) \mid b] = [A' \mid b] + [r \mid b] = [A' \mid b],$$

ježto intern. součin dvou na sobě kolmých vektorů r a b se rovná nulle.

Konečně ustanovíme týmž způsobem pro interní součin dvou vektorů hodnotu:

$$[a \mid b] = \frac{1}{4}(c^2 - d^2), \tag{31}$$

kde jest $c = a + b$, $d = a - b$. Střední hodnota tohoto součinu jest nulla.

Externí dělení. Hledáme-li z extern. součinu dvou geom. veličin a jednoho jeho činitele činitel druhý, provádíme lytický výkon, který nazýváme *externím dělením*. Poněvadž není externí násobení výkonem záměnným, obdržíme obecně dva různé podíly dle toho, je-li daný činitel v součinu na prvním neb na druhém místě. Je-li na př. dělencem extern. součin dvou vektorů $[ab] \equiv \mathbf{A}$, může býti dělitelem buď vektor a neb b; v prvním případě označíme s Grassmannem hledaný podíl $\frac{\mathbf{A}}{a\,.}$, ve druhém $\frac{\mathbf{A}}{.\,b}$. Připojená tečka v děliteli nám tedy udává, na které místo vzhledem ku děliteli jest klásti podíl, abychom obdrželi dělence. V příkladě tuto vytknutém jsou oba podíly co do absolutní hodnoty stejny a líší se toliko znaménkem; v jiných případech mohou oba podíly býti stejny i co do znaménka. Tak na př. je-li dělencem externí součin tří vektorů $[abc] \equiv \mathbf{B}$ a dělitelem součin $[bc] = \mathbf{C}$, jest $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}\,.} = \frac{\mathbf{B}}{.\,\mathbf{C}}$, poněvadž $[bc\,.\,a] = [a\,.\,bc]$. Obecně mají oba podíly protivná znaménka, je-li dělenec geometrickou veličinou stupně sudého a dělitel stupně lichého; v ostatních případech jsou oba podíly stejně označeny.

Ale ještě jinak rozeznává se externí dělení od dělení algebraického. Poznáme to nejlépe na uvedených již příkladech. Externí součin $[ab]$ rovná se patrně součinu $[a(b + a')]$, značí-li a' nějaký vektor rovnoběžný s a, tedy jest též

$$\frac{\mathbf{A}}{a\,.} = b + a'\,;$$

a podobně v příkladě druhém

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}\,.} = a + a'',$$

je-li a'' vektor rovnoběžný s rovinou, danou vektory b a c. Ježto za těchto podmínek $[aa'] = 0$ neb $[bca''] = 0$, můžeme všechny vektory a' vyznačiti podílem $\frac{0}{a\,.}$ a všechny vektory a'' podílem $\frac{0}{\mathbf{C}\,.}$; tudíž píšeme:

$$\frac{\mathbf{A}}{a.} = b + \frac{0}{a.},$$

a v druhém případě

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}.} = a + \frac{0}{\mathbf{C}.}.$$

Již z těchto příkladů jest zřejmo, že při extern. dělení má podíl nesčíslné množství hodnot, které však jsou všechny geom. veličinami téhož druhu; k jedné z těchto hodnot musí se jako při integraci připojiti všeobecná stálá, aby se obdržel podíl úplný. Jakožto doklad k tomu buď zde uvedeno, že jsou neurčitými úlohy geometrické jako na př. z dané plochy rovnoběžníka a jedné strany ustanoviti stranu druhou, neb z obsahu rovnoběžnostěnu a podstavy ustanoviti třetí jeho hranu a pod.

Neurčitost tuto odstraníme, určíme-li nějakou danou geometrickou veličinou místo, které přísluší hledanému podílu; veličina ta musí býti nezávislá na děliteli a zároveň s dělitelem nižšího stupně než jest dělenec. Tak na př. obě uvedené úlohy jsou určité, připojíme-li podmínku, že druhá strana rovnoběžníka neb třetí hrana rovnoběžnostěnu má býti rovnoběžná s daným vektorem, který však nesmí býti rovnoběžný v prvém případě s vektorem udávajícím dělitele a v druhém případě s rovinou, v níž leží podstava rovnoběžnostěnu. Buď obecně $\mathbf{A}$ dělencem, $\mathbf{B}$ dělitelem, $\mathbf{C}'$ zmíněná veličina, ustanovující místo podílu, nezávislá na $\mathbf{B}$; pak lze vždy nalézti takovou veličinu $\mathbf{B}'$ stejnorodou s $\mathbf{B}$, aby

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}'\mathbf{C}'.$$

Tudíž jest hledaný podíl:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}.} = \frac{\mathbf{B}'\mathbf{C}'}{\mathbf{B}.}$$

Místo výrazu na pravé straně této rovnice píše Grassmann $\frac{\mathbf{B}'}{\mathbf{B}}\mathbf{C}'$ a zabývá se v prvním vydání své „Ausdehnungslehre“ (pag. 95—109) podrobně podílem dvou stejnorodých geom. veličin $\frac{\mathbf{B}'}{\mathbf{B}}$, dokazuje o něm, že má všechny vlastnosti čísla (veličiny stupně nulltého), zejména, že platí pro spojení takových podílů pospolu i s veličinami geometrickými pravidla arithmetiky obecné. Jest tedy podíl $\frac{B'}{B}$ totéž, co jsme již dříve označovali malými písmeny řeckými a za extern. podíl dvou geom. veličin můžeme psáti:

$$\frac{A}{B.} = \alpha C'.$$

Počítání geometrickými veličinami stupně druhého a třetího.

Sečítání. Je-li sečítati n daných *externích součinů* o dvou činitelích: $[a_1 b_1]$, $[a_2 b_2]$, ... $[a_n b_n]$, sečteme jejich doplňky; doplněk vektora takto určeného jest hledaným součtem.

Sečítání rotorů. a) Osy všech sčítanců tvoří svazek paprsků o středu O. Dáme-li daným rotorům tvary $[OA_1]$, $[OA_2]$, ... $[OA_n]$, obdržíme

$$[OA_1] + [OA_2] + \ldots + [OA_n] = [O(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)]$$

aneb, kladouce

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = nS,$$
$$\Sigma [OA_k] = n [OS]. \qquad (32)$$

Z toho plyne pro $n = 2$, že součtem dvou rotorů o osách se protínajících jest rotor, jehož osa i délka jsou stanoveny úhlopříčnou rovnoběžníka, sestrojeného z délek obou sčítanců vnesených na osách jejich od společného průsečíku.

b) Osy všech sčítanců tvoří osnovu paprsků. Teď pišme za dané rotory výrazy $\alpha_1 [A_1 a]$, $\alpha_2 [A_2 a]$, ... $\alpha_n [A_n a]$; součet jejich jest

$$[(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n) a],$$

což jest rotor, jehož osa jest rovnoběžná s osami sčítanců a prochází bodem $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n$; délka jeho rovná se součtu délek daných rotorů.

Jest-li tu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$, jest součet $\Sigma\alpha_k A_k$ roven nějakému vektoru a součet $\Sigma\alpha_k [A_k a]$ rovná se externímu součinu dvou vektorů.

Tak na př. pro součet dvou rotorů [AB] a [CD] o osách rovnoběžných a délkách stejných, ale protivně označených, obdržíme:

$$[AB] + [CD] = [A(-A + B)] + [C(-C + D)]$$

aneb, protože

$$-C + D = -(-A + B),$$

též

$$\begin{aligned}[AB] + [CD] &= [A(-A + B)] - [C(-A + B)] \\ &= [(-C + A)(-A + B)];\end{aligned}$$

tudíž má příslušný rovnoběžník základnu rovnou společné délce daných rotorů na kterékoli ose vnesené a výšku rovnou vzdálenosti obou rovnoběžných os.

c) Osy všech rotorů leží v jedné rovině. Zvolíme-li v této rovině dva vektory i a j, můžeme dáti každému z daných rotorů $[A_k a_k]$ podobu $[A_k(x_k i + y_k j)]$; i bude součet jejich

$$\sum_1^n [A_k a_k] = \sum_1^n [A_k(x_k i + y_k j)] = \sum_1^n [x_k A_k i] + \sum_1^n [y_k A_k j].$$

Oba součty na pravé straně lze dle oddílu (b) stanoviti; i obdržíme

$$\sum_1^n [x_k A_k i] = x[Si], \quad \sum_1^n [y_k A_k j] = y[Tj],$$

značí-li $x = \sum_1^n x_k$, $y = \sum_1^n y_k$. Pošiňme nyní každý z rotorů $[Si]$, $[Tj]$ ve své ose až k průsečíku O obou os; tím nabudeme:

$$\sum_1^n [A_k a_k] = [O(xi + yj)] = [Or].$$

Jest tedy součtem takových rotorů opět rotor, jehož osa se nalézá v rovině os daných sčítanců; polohu její v této rovině jakož i délku součtového rotoru určíme snadno na základě předcházející úvahy.

d) Osy rotorů jsou mimoběžné. Dle rovnice (20) lze každý z daných rotorů $[M_k N_k]$ vyjádřiti výrazem

$$p_{12}^{(k)}[AB]+p_{23}^{(k)}[BC]+p_{31}^{(k)}[CA]+p_{14}^{(k)}[AD]+p_{24}^{(k)}[BD]+p_{34}^{(k)}[CD];$$

platí tedy

$$\sum_1^n [M_k N_k] = q_{12}[AB]+q_{23}[BC]+q_{31}[CA]+q_{14}[AD)$$
$$+ q_{24}[BD] + q_{34}[CD], \tag{33}$$

značí-li $q_{ij} = \sum_1^n p_{ij}^{(k)}$.

Ve výraze tom můžeme součet tří rotorů, majících bod A za jeden činitel, nahraditi jediným rotorem, neboť

$$q_{12}[AB]+q_{31}[CA]+q_{14}[AD] = [A(q_{12}B - q_{31}C + q_{14}D)] = [AS].$$

Osy ostatních tří rotorů: $q_{23}[BC]$, $q_{24}[BD]$, $q_{34}[CD]$ leží v téže rovině, body B, C a D položené; dle c) jest součtem jejich rotor [TU], mající osu svou též v této rovině.

Rovnici tím způsobem odvozenou

$$\sum_1^n [M_k N_k] = [AS] + [TU] \tag{34a}$$

lze vysloviti takto: Součet rotorů, jichž osy jsou libovolně v prostoru položeny, jest rovnomocný součtu dvou rotorů o osách mimoběžných; osu jednoho z těchto rotorů lze vésti tak, aby procházela libovolným bodem A a osu druhého tak, aby ležela v libovolné rovině, která však neprochází bodem A.

Tento součet upravíme ještě v jiné podobě. Buď [AV] rotor, jehož osa jest rovnoběžná s osou rotoru [TU] a který má s tímto rotorem stejnou délku; i můžeme vzorec (34a) také psáti:

$$\Sigma [M_k N_k] = [AS] + [AV] + [TU] - [AV].$$

Za součet $[AS]+[AV]$ položíme jediný rotor $[Ar]$, jenž dle (a) snadno sestrojíme; rozdíl $[TU]-[AV]$ rovná se dle (b) externímu součinu dvou vektorů $[(-A+T)(-T+U)]$ a ten jest doplňkem nějakého vektoru c. Druhý tvar součtu rotorů o osách mimoběžných jest tedy

$$\Sigma [M_k N_k] = [Ar] + | c. \tag{34b}$$

V tomto tvaru skládá se součet ten opět ze dvou částí: rotoru $[Ar]$ a doplňku vektora c; obecně osa rotora a vektor c mají běh různý.

Vyšetřme nyní, jak se mění obě tyto části součtu $\Sigma\,[M_k N_k]$, přejdeme-li k jinému bodu A' v prostoru. Poznačíme-li

$$-A + A' = d, \quad \text{jest} \quad A = A' - d$$

a poslední rovnice přejde ve

$$\Sigma\,[M_k N_k] = [(A' - d)\, r] + |\, c = [A'r] - [dr] + c.$$

Kladouce ještě

$$[dr] = |\, c' \quad \text{a} \quad |\, c - |\, c' = |\, (c - c') = |\, c'', \qquad \text{(a)}$$

obdržíme:

$$\Sigma\,[M_k N_k] = [A'r] + |\, c''.$$

Z toho plyne, že rotor $[A'r]$ nemění ani své délky, ani běhu své osy, provedeme-li sečítání vzhledem k libovolnému bodu v prostoru; jenom druhá část součtu $\Sigma\,[M_k N_k]$, totiž doplněk vektora c'', závisí na poloze bodu A'. Především jest patrno, že $|\, c''$ (a tudíž i vektor c'') se nemění, pokud zůstává bod A' na ose rotora $[Ar]$. Neboť pak vektory r a $d = -A + A'$ mají týž běh, z čehož jde, že externí součin $[dr]$ v případě tom roven jest nulle a tedy $|\, c'' = |\, c$. Nalézá-li se bod A' mimo osu rotora $[Ar]$, má součin $[dr]$ hodnotu od nully rozdílnou, ale hodnota ta jest stálou pro všechny body A', jichž místem jest přímka rovnoběžná k ose tohoto rotora. Vzhledem ku všem těmto bodům nemění se totiž $|\, c'' = |\, c - [dr]$; i vektor c'' zůstává co do běhu a co do délky týž pro všechny body takové přímky, mění se však, jestliže v osnově přímek, stanovené osou rotora $[Ar]$ přecházíme od jedné přímky ke druhé.

Hledejme dále místo bodů, vzhledem k nimž příslušný vektor c''_0 a vektor r mají týž běh. Místem tím jest patrně přímka náležející k právě vytčené osnově přímek; vzdálenost její od osy rotora $[Ar]$ určíme co do polohy i co do délky vektorem d_0 takto*): Bod A' prve libovolný buď nyní bod A_0 tak volený, aby vektor $-A + A_0 = d_0$ stál kolmo na ose rotora; i bude dle (a)

*) I tuto úvahu snadno si znázorníme obrazcem.

$$| c_0'' = | c - | c_0',$$

ked $| c_0' = [d_0 r]$. V této zvláštní poloze jest $d_0 \perp r$ a jelikož jest d_0 též kolmo ku c_0' jakožto doplňku součinu $[d_0 r]$, stojí kolmo k rovině R, položené osou rotora (Ar) a vektorem c_0' připojeným v bodě A. Z rovnice $| c_0'' = | (c - c_0')$ pak soudíme, že $c_0'' = c - c_0'$ čili $c = c_0' + c_0''$. Vektor c_0'' má však v tomto případě běh vektora r, pročež lze součet $c_0' + c_0''$ provésti v rovině R, z čehož zase vysvítá, že jest d_0 také kolmo ku c. Tutéž polohu má i doplněk extern. součinu vektorů r a c; tudíž mají d_0 a $| [rc]$ stejný běh, i můžeme položiti

$$d_0 = \alpha \, | [rc].$$

Jest nyní stanoviti součinitel α vyskytující se v tomto výrazu; za tím účelem násobíme obě strany rovnice $c_0'' = c - c_0'$ externě vektorem r. I obdržíme, uvážíce, že $[rc_0''] = 0$ jako externí součin dvou rovnoběžných vektorů:

$$[rc] = [rc_0'] = [r \,|\, d_0 r].$$

Dle vzorce (27a) zjednáme si pro $[r \,|\, d_0 r]$ rovnici:

$$[r \,|\, d_0 r] = [r \,|\, d_0] \,.\, | r - | d_0 \,.\, [r \,|\, r] = - r^2 \,|\, d_0,$$

protože $[r \,|\, d_0] = 0$. Srovnajíce takto vyhledanou hodnotu

$$[rc] = - r^2 \,|\, d_0$$

s hodnotou

$$[rc] = \frac{1}{\alpha} \,|\, d_0,$$

která plyne z rovnice $d_0 = \alpha \,|\, [rc]$, obdržíme:

$$\alpha = - \frac{1}{r^2};$$

tudíž

$$d_0 = - \frac{| [rc]}{r^2},$$

aneb, poněvadž $[rc] = - [cr]$, posléze

$$d_0 = \frac{| [cr]}{r^2} = \frac{| [cr]}{| r |^2},$$

čímž jest hledané místo bodů A_0 ustanoveno.

Extern. součin $[rd_0]$ jest pak dán vzorcem:

$$[rd_0] = \frac{[r \mid cr]}{r^2} \; ;$$

použijeme-li opětně relace (27a) nabudeme:

$$[rd_0] = \frac{[r \mid c] \, . \mid r - \mid c \, . [r \mid r]}{r^2} = \frac{[r \mid c] \, . \mid r}{r^2} - \mid c,$$

z čehož vychází:

$$\mid c_0'' = \mid c - [d_0 r] = \frac{[r \mid c]}{r^2} \mid r.$$

Tak jsme nabyli pro součet rotorů výraz:

$$\Sigma [M_k N_k] = [A_0 r] + \frac{[r \mid c]}{r^2} \mid r. \qquad (35)$$

Interní součin $[r \mid c]$ jest invariantem tohoto součtu, neboť provedeme-li výše naznačenou redukci vzhledem k libovolnému bodu A′ jest

$$\mid c'' = \mid c - \mid c' ;$$

násobíce vektorem r obdržíme:

$$[r \mid c''] = [r \mid c] - [r \mid c'].$$

Protože $c' \perp r$, jakožto doplněk extern. součinu $[dr]$, jest $[r \mid c'] = 0$, tedy

$$[r \mid c''] = [r \mid c],$$

t. j. hodnota součinu $[r \mid c'']$ nezávisí na poloze bodu A′.

Výraz $\frac{[r \mid c'']}{r^2}$ poznačíme p_α; numerická hodnota jeho dána jest zlomkem:

$$p_\alpha = \frac{\mid r \mid . \mid c'' \mid \cos\alpha}{\mid r \mid^2},$$

značí-li α úhel obou vektorů r a c''.

Je-li c_0'' rovnoběžno s r, jest

$$p_\alpha = \frac{\mid c_0'' \mid}{\mid r \mid}.$$

I můžeme součet daných rotorů psáti ve tvaru:

$$\Sigma\,[M_k\,N_k] = [A_0 r] + p_\alpha \mid r; \qquad (35a)$$

výraz na pravé straně této rovnice jmenujeme dle Clifforda *motorem.**) Přímka, jejíž všechny body vyhovují podmínce, že vzhledem k nim osa rotora $[A_0 r]$ a příslušný vektor c_0'' jsou rovnoběžny, jest *osou* motora; součinitel p_α jest jeho *parametrem.*

Je-li v součtu $[A_0\, r] + p_\alpha \mid r$ délka vektora r neurčitá, představuje výraz ten Ballův *šroub*; p_α jest pak *výškou* neb *výstupem* jeho.

Sečítání interních součinů. Jsou-li dány interní součiny bodů $\alpha_1\,[A_1 \mid B_1]$, $\alpha_2\,[A_2 \mid B_2]$, ... $\alpha_n\,[A_n \mid B_n]$, jichž součet jest ustanoviti, pišme dle (29):

$$\alpha_k\,[A_k \mid B_k] = \alpha_k\, C_k^2 - \alpha_k\, p_k^2.$$

V tomto vzorci jest, jak známo, C_k bod rozpolující vektor $-A_k + B_k = 2p_k$.

Tudíž jest

$$\Sigma\,\alpha_k [A_k \mid B_k] = \Sigma\,\alpha_k\, C_k^2 - \Sigma\,\alpha_k\, p_k^2, \qquad (36)$$

čímž úloha ta převedena jest na jinou: určiti součet dvojmocí daných bodů.

Vedeme-li z libovolného bodu O k místům bodů C_k vektory $-O + C_k = c_k$, bude

$$\Sigma\,\alpha_k\, C_k^2 = \Sigma\,\alpha_k\,(O + c_k)^2 = O^2\,\Sigma\,\alpha_k + 2\,[O \mid \Sigma\,\alpha_k c_k] + \Sigma\,\alpha_k c_k^2$$

Dle rovnice (13) jest $\Sigma\,\alpha_k c_k = \sigma\, s$, je-li $\sigma = \Sigma\,\alpha_k$; tudíž

$$\Sigma\,\alpha_k\, C_k^2 = \sigma\, O^2 + 2\,\sigma [O \mid s] + \Sigma\,\alpha_k c_k^2 \qquad (37)$$

a

$$\Sigma\,\alpha_k [A_k \mid B_k] = \sigma\, O^2 + 2\,\sigma\,[O \mid s] + \Sigma\,\alpha_k\,(c_k^2 - p_k^2)\,.$$

V poslední rovnici jest

$$c_k^2 - p_k^2 = [(c_k - p_k) \mid (c_k + p_k)] = [a_k \mid b_k],$$

zavedeme-li

*) O významu, který mají geometrické veličiny: rotor, rovnoběžník dvojice, motor atd. v theoretické mechanice nebudu se tady šířiti.

$$c_k - p_k = -O + C_k - (-A_k + C_k) = -O + A_k = a_k,$$
$$c_k + p_k = -O + C_k + (-C_k + B_k) = -O + B_k = b_k;$$

pak lze psáti:

$$\Sigma\, \alpha_k [A_k \mid B_k] = \sigma O^2 + 2\sigma [O \mid s] + \Sigma\, \alpha_k [a_k \mid b_k]. \quad (38)$$

Zvolíme-li libovolný dosud bod O tak, že jest místem součtu σ S bodů $\alpha_k C_k$ aneb, což jest totéž, bodů $\frac{\alpha_k}{2} A_k$ a $\frac{\alpha_k}{2} B_k$ (poněvadž $C_k = \frac{A_k + B_k}{2}$), bude $s = 0$ a vzorec (38) se změní v jednodušší:

$$\Sigma\, \alpha_k [A_k \mid B_k] = \sigma S^2 + \Sigma\, \alpha_k [a_k^0 \mid b_k^0]. \quad (38a)$$

Z toho, co bylo pověděno na příslušném místě o intern. součinu bodu a vektoru, jde dále, že hodnota tohoho součinu jest stálou pro všechny body O ležící na povrchu plochy kulové, jejímž středem jest S, neboť vzhledem k těmto bodům nemění se ve vzorci (38) $[O \mid s]$ a pro $\Sigma\, \alpha_k [a_k \mid b_k]$ dokážeme touž vlastnost níže.

Je-li dána ještě druhá soustava intern. součinů $[D_1 \mid E_1]$, $[D_2 \mid E_2], \ldots [D_m \mid E_m]$, obdržíme podobně pro součet jejich:

$$\Sigma\, \beta_k [D_k \mid E_k] = \sigma_1 O^2 + 2\sigma_1 [O \mid s_1] + \Sigma\, \beta_k [d_k \mid e_k].$$

Mají-li oba součty $\Sigma\, \alpha_k [A_k \mid B_k]$ a $\Sigma\, \beta_k [D_k \mid E_k]$ býti rovnomocnými, musí se dosti učiniti těmto podmínkám:

$$\sigma = \sigma_1$$
$$s = s_1 \quad (39)$$
$$\Sigma\, \alpha_k [a_k \mid b_k] = \Sigma\, \beta_k [d_k \mid e_k].$$

První dvě lze dle rovnice (11) nahraditi jedinou, totiž

$$\Sigma\, \alpha_k C_k = \Sigma\, \beta_k F_k,$$

má-li bod F_k v druhé soustavě obdobný význam jako bod C_k v prvé.

Jak bylo již při sečítání hmotných bodů dokázáno, zůstává tato rovnice platnou, učiníme-li jiný bod O′ počátkem všech vektorů; co se pak týče třetí podmínky, můžeme psáti

$$\Sigma\, \alpha_k\, [a_k \mid b_k] = \Sigma\, \alpha_k\, (c_k^2 - p_k^2) = \Sigma\, \alpha_k\, [(-\mathrm{O} + \mathrm{C}_k)^2 - p_k^2]$$
$$= \Sigma\, \alpha_k\, [(-\mathrm{O} + \mathrm{O}' - \mathrm{O}' + \mathrm{C}_k)^2 - p_k^2]$$

aneb, poznačíme-li vektory

$$-\mathrm{O} + \mathrm{O}' = r, \quad -\mathrm{O}' + \mathrm{C}_k = c'_k,$$

kratčeji

$$\Sigma\, \alpha_k\, [a_k \mid b_k] = \Sigma\, \alpha_k\, [(r + c'_k)^2 - p_k^2]$$
$$= \Sigma\, \alpha_k\, \{r^2 + c'^2_k + 2\,[r \mid c'_k] - p_k^2\}$$
$$= \Sigma\, \alpha_k\, (c'^2_k - p_k^2) + 2\,[r \mid \Sigma\, \alpha_k\, c'_k] + \sigma r^2$$
$$= \Sigma\, \alpha_k\, [a'_k \mid b'_k] + 2\,[r \mid s'] + \sigma r^2.$$

Jest tedy $\Sigma \alpha_k\, [a_k \mid b_k]$ stálý pro $s' = 0$ a pro totéž r, t. j. pro všechny body, ležící na povrchu plochy kulové, jejímž středem jest místo součtu σS.

A podobně nabudeme pro $\Sigma\, \beta_k\, [d_k \mid e_k]$ vzorec

$$\Sigma\, \beta_k\, [d_k \mid e_k] = \Sigma\, \beta_k\, [d'_k \mid e'_k] + 2\,[r \mid s'_1] + \sigma' r^2.$$

Dle prvních dvou podmínek (39) jest $\sigma = \sigma'$, $s_1 = s'_1$; jestliže ještě dle třetí podmínky (39)

$$\Sigma\, \alpha_k\, [a_k \mid b_k] = \Sigma\, \beta_k\, [d_k \mid e_k],$$

povstane rovnice

$$\Sigma\, \alpha_k\, [a'_k \mid b'_k] = \Sigma\, \beta_k\, [d'_k \mid e'_k].$$

Poněvadž jest $\Sigma\, \alpha_k\, \mathrm{C}_k$ střední hodnotou součtu $\Sigma\, \alpha_k\, [\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}_k]$, můžeme vysloviti větu:

Dva součty $\Sigma\, \alpha_k\, [\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}_k]$ a $\Sigma\, \beta_h\, [\mathrm{D}_k \mid \mathrm{E}_k]$ jsou rovnomocnými, rovnají-li se sobě jednak jejich střední hodnoty, jednak součty příslušných intern. součinů vektorů, vedených z libovolného bodu v prostoru k daným bodům.

Naopak lze ukázati, že platí-li rovnice:

$$\Sigma\, \alpha_k\, [\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}_k] = \Sigma\, \beta_k\, [\mathrm{D}_k \mid \mathrm{E}_k],$$

jest správnou též rovnice:

$$\Sigma\, \alpha_k\, [a_k \mid b_k] = \Sigma\, \beta_k\, [d_k \mid e_k];$$

t. j. v rovnici, jejíž obě strany obsahují mnohonásobné intern. součiny bodů, mohou se body nahraditi vektory, vedenými k místům jejich z libovolného bodu v prostoru, aniž se tím správnost rovnice poruší.

Nejjednodušší případ aequivalence dvou součtů tuto uvedených vznikne, redukuje-li se druhý součet na jeden sčítanec $\sigma\,[T \mid V]$. Ježto jest střední hodnota tohoto součinu $\sigma\,\frac{T+V}{2}$ obdržíme tu podmínečné rovnice tvaru:

$$\Sigma\,\alpha_k\,C_k = \sigma\,\frac{T+V}{2} = \sigma\,S,$$

kde jest položeno

$$\frac{T+V}{2} = S,$$

a

$$\Sigma\,\alpha_k\,[a_k \mid b_k] = \sigma\,[t \mid v] = \sigma\,(s^2 - q^2),$$

užijeme-li vzorce (31) a uvážíme-li, že

$$t + v = 2s$$
$$t - v = 2q.$$

První rovnicí jest stanoven bod $\sigma\,S$, jestiť to součet bodů $\frac{\alpha_k A_k}{2}$ a $\frac{\beta_k B_k}{2}$; druhou určuje se vektor q, mající vzhledem k bodům T a V obdobný význam, jaký měl výše vektor p_k vzhledem k bodům A_k a B_k, totiž $2q = -T + V$.

Pro tento vektor platí:

$$q^2 = s^2 - \frac{1}{\sigma}\,\Sigma\,\alpha_k\,[a_k \mid b_k],$$

v čemž $s = -O + S$ a $\Sigma\,\alpha_k\,[a_k \mid b_k]$ se vyhledá pomocí vzorce:

$$\Sigma\,\alpha_k\,[a_k \mid b_k] = \Sigma\,\alpha_k\,(c_k^2 \quad p_k^2).$$

Volíme-li za počátek vektorů místo bodu $\sigma\,S$, nabudeme pro q jednodušší rovnice:

$$q^2 = -\frac{1}{\sigma}\,\Sigma\,\alpha_k\,[a_k^0 \mid b_k^0].$$

Sluší tu rozeznávati tři případy: buď jest $\Sigma\,\alpha_k\,[a_k^0 \mid b_k^0]$ negativní, neb se rovná nulle, neb jest positivní.

V případě prvém jest q reálné, tudíž stává reálné plochy kulové (jejímž středem jest místo bodu σ S a jejímž poloměrem jest q), příslušející součinu $\sigma[\mathrm{T} \mid \mathrm{V}]$; každé dva protější body této plochy mohou býti místy hledaných bodů T a V.

V případě druhém jest $q = 0$; tudíž místa bodů T a V splývají v jedno s místem bodu S a

$$\Sigma \alpha_k [\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}_k] = \sigma \mathrm{S}^2.$$

V případě třetím konečně jest q imaginárné. Tu používá Grassmann k vyjádření součtu $\Sigma \alpha_k [\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}_k]$ jiné plochy kulové, jejíž poloměr jest

$$q_1 = \sqrt{\frac{1}{\sigma} \Sigma \alpha_k [a_k^0 \mid b_k^0]}.$$

Jsou-li T_1 a V_1 dva protější body této plochy, jest dle (38a)

$$\Sigma \alpha_k [\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}_k] = \sigma (\mathrm{S}^2 + q_1^2) = \frac{\sigma}{2} \{[\mathrm{S} + q_1]^2 + [\mathrm{S} - q_1]^2\}$$

aneb, poněvadž tu

$$\mathrm{S} + q_1 = \mathrm{T}_1, \qquad \mathrm{S} - q_1 = \mathrm{V}_1$$

též

$$\Sigma \alpha_k [\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}_k] = \frac{\sigma}{2} (\mathrm{T}_1^2 + \mathrm{V}_1^2).$$

Z těchto úvah poznáváme, že pro součet intern. součinů bodů má zvláštní důležitost určitá plocha kulová, zvaná *střední plochou* součtu $\Sigma \alpha_k [\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}_k]$; kterýmikoli dvěma body protějšími této plochy jest součet ten určen*).

Pomíjeje některých zvláštních případů, které se tu mohou vyskytnouti (plochy kulové mohou se na př. proměniti v roviny) podotýkám ještě, že věty podobné právě vyvozeným větám o $\Sigma \alpha_k [\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}_k]$ mají platnost též o součtu mnohonásobných dvojmocí daných bodů, který vznikne z předešlého, stotožní-li se bod B_k s bodem A_k.

Sečítání rovin. a) Místa rovin momentových tvoří svazek rovin. Zvolme v ose toho svazku dva body A a B a dejme daným rovinám tvary

*) Grassmann nazývá proto intern. součin dvou bodů a součty takových součinů veličinami *kulovými*.

$$[ABC_1],\quad [ABC_2], \dots [ABC_n],$$

i jest součet jejich

$$(40)\quad \sum_1^n [ABC_k] = [AB(C_1 + C_2 + \dots + C_n)] = n[ABS],$$

je-li součet bodů C_1, $C_2 \dots C_n$ dán bodem nS.

Pro $n = 2$ plyne z toho tato jednoduchá konstrukce: Ustanovíme-li obě dané roviny rovnoběžníky tak, aby měly v průsečnici jejich míst společnou jednu stranu, sestrojme z druhých (různých) stran rovnoběžník; úhlopříčka toho rovnoběžníka jest jednou stranou, společná délka druhou stranou rovnoběžníka příslušného ku hledaného součtu.

b) Místa daných rovin momentových tvoří osnovu rovin. Tu bude výhodno, dáti rovinám těm tvary:

$$[A_1 b_1 c_1],\ [A_2 b_2 c_2], \dots [A_n b_n c_n];$$

rovnoběžníky součinů $[b_1 c_1]$, $[b_2 c_2], \dots [b_n c_n]$ leží tu v rovinách rovnoběžných, lze tedy všechny numericky odvoditi z jednoho $[bc]$, jehož rovina má týž běh. Píšeme-li pak

$$[b_k c_k] = \alpha_k [bc],$$

obdržíme pro hledaný součet

$$(41)\quad \begin{aligned} \Sigma [A_k b_k c_k] &= [(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n) bc] \\ &= \sigma [S bc], \end{aligned}$$

kde jest σS součet bodů $\alpha_1 A_1$, $\alpha_2 A_2, \dots \alpha_n A_n$. Součtem rovin momentových, ležících v rovinách rovnoběžných, jest rovina momentová, jejíž místo jest rovina téže osnovy a jehož obsah rovná se součtu daných obsahů (jestiť

$$\sigma [bc] = \Sigma \alpha_k [bc] = \Sigma [b_k c_k]).$$

Je-li zvlášť $n = 2$, určíme polohu součtu rovin momentových, sečteme-li body $\alpha_1 A_1$ a $\alpha_2 A_2$; z rovnice (8a) vychází, že v tomto případě prochází rovina součtu bodem A, stanoveným poměrem

$$\frac{-A_1 + A}{-A + A_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Je-li tu ještě

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -1,$$

tedy

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) A = 0A,$$

obdržíme jednak:

$$[A_1 b_1 c_1] + [A_2 b_2 c_2] = [(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) bc] = 0 [Abc],$$

jednak:

$$[A_1 b_1 c_1] + [A_2 b_2 c_2] = [(\alpha_1 A_1 - \alpha_1 A_2) bc] = \alpha_1 [(-A_2 + A_1) bc],$$

čili, položíme-li $-A_1 + A_2 = a$, též

(41a) $[A_1 b_1 c_1] + [A_2 b_2 c_2] = -\alpha_1 [abc] = -[ab_1 c_1] = [b_1 c_1 a]$,

jelikož $[b_1 c_1] = \alpha_1 [bc]$.

Součet dvou rovin momentových, jichž místa jsou rovnoběžná a obsahy stejné, ale protivnými znaménky označené, jest rovnomocný rovnoběžnostěnu, který má (nehledě ke znaménku), za základnu jeden ze stejných obrazců a za výšku vzdálenost obou rovnoběžných rovin.

c) Místa rovin momentových

$$[A_1 b_1 c_1], [A_2 b_2 c_2], \dots [A_n b_n c_n]$$

jsou libovolně v prostoru položena. Tu upravme každý sčítanec $[A_k b_k c_k]$ na podobu:

$$[A_k b_k c_k] = [(A_k - O + O) b_k c_k] = [O b_k c_k] + [(-O + A_k) b_k c_k],$$

je-li O bod libovolně zvolený. Pišme kratčeji $-O + A_k = a_k$, i bude

$$[A_k b_k c_k] = [O b_k c_k] + [a_k b_k c_k].$$

Pro hledaný součet najdeme pak:

$$\Sigma [A_k b_k c_k] = [O \Sigma b_k c_k] + \Sigma [a_k b_k c_k].$$

V prvním členu na pravé straně této rovnice můžeme za $\Sigma [b_k c_k]$ klásti součin dvou vektorů $[bc]$; podobně druhý člen

$$\Sigma [a_k b_k c_k] = [abc],$$

uvážíme-li, že jest nám tu sečítati příslušné rovnoběžnostěny, čímž vychází nějaký rovnoběžnostěn, který lze vždy tak proměniti, aby dvě jeho hrany byly vektory b a c.

Proto jest

$$\Sigma [A_k\, b_k\, c_k] = [Obc] + [abc] = [(O + a)\, bc] = [Abc],$$

neboť součet bodu O a vektora a jest koncový bod tohoto A.

Rovná se tedy součet rovin momentových obecně rovině momentové, jejímž místem jest rovina, vedená bodem A právě stanoveným v osnově příslušné k $\Sigma [b_k\, c_k]$ a jejíž obrazec má smysl a obsah daný tímto součtem.

Je-li ve zvláštním případě

$$\Sigma [b_k\, c_k] = 0\,,$$

jest součet rovin roven nějakému rovnoběžnostěnu $[abc]$.

Násobení. *Extern. součin dvou rotorů.* Znásobíme-li dva rotory [MN] a [PQ], obdržíme těleso extensivní [MNPQ]. Obsah jeho lze vyjádřiti šesteronásobným obsahem čtyřstěnu, který má za protější hrany délky daných rotorů. Poněvadž se stanoví obsah čtyřstěnu šestým dílem součinu utvořeného z délek protějších hran, z nejkratší vzdálenosti d mimoběžek, v nichž protější hrany leží a ze sinu úhlu α těchto mimoběžek můžeme za obsah součinu dvou rotorů (zvaného též *vzájemným momentem* daných rotorů) psáti výraz

$$\text{délka rot. [MN]} \times \text{délkou rot. [PQ]} \times d \sin \alpha.$$

Jsou-li dány oba rotory souřadnicemi, totiž:

$$\begin{aligned}[MN] = p_{12}\,[AB] + p_{23}\,[BC] + p_{31}\,[CA] + p_{14}\,[AD] + p_{24}\,[BD] \\ + p_{34}\,[CD]\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[PQ] = p'_{12}\,[AB] + p'_{23}\,[BC] + p'_{31}\,[CA] + p'_{14}\,[AD] + p'_{24}\,[BD] \\ + p'_{34}\,[CD]\,,\end{aligned}$$

obdržíme pro součin jejich vzorec:

$$\begin{aligned}[MN]\,[PQ] = (p_{12}\,p'_{34} + p_{23}\,p'_{14} + p_{31}\,p'_{24} + p_{14}\,p'_{23} + p_{24}\,p'_{31} \\ + p_{34}\,p'_{12})\,[ABCD],\end{aligned} \tag{42}$$

poněvadž všechny ostatní částečné součiny se rovnají nulle.

Tudíž souřadnice dvou rotorů, jichž osy se protínají, vyhovují podmínečné rovnici:

$$(42a)\quad p_{12}p'_{34}+p_{23}p'_{14}+p_{31}p'_{24}+p_{14}p'_{23}+p_{24}p'_{31}+p_{34}p'_{12}=0.$$

Násobení rovin. Protože se již v součinu dvou rovin vyskytuje šest bodů jako činitelé, nemělo by dle poznámky učiněné při extern. součinu čtyř vektorů takové násobení žádného významu, kdybychom se na tom neustanovili, že 1) chceme jako u násobení stereometrického extern. součin čtyř bodů pokládati za číslo; 2) součin ten nám bude koefficientem geom. veličiny, kterou tvoří zbývající část celého součinu*).

Na tomto základě snadno znásobíme dvě roviny momentové. Jestliže nejprve místa jejich se protínají, pišme je ve tvaru [MNP] a [MNQ], kde jsou M a N body, ležící na průsečnici obou míst; přihlížejíce k pravidlu o označení extern. součinu, zaměníme-li pořádek činitelů, dostaneme:

$$(43)\quad \begin{aligned}[MNP]\,[MNQ] &= [MNP]\,[QMN] = [MNPQ\,.\,MN]\\ &= [MNPQ]\,[MN] = \alpha\,[MN]\,.\end{aligned}$$

Číslo α udává tu patrně poměr obsahů čtyřstěnu, jehož rohy jsou body M, N, P, Q a čtyřstěnu základního, k němuž vztahujeme všechny činitele.

Jest tedy součin dvou rovin moment., jichž místa se protínají, rotor, mající za osu průsečnici obou míst a délku αkrát větší než jest délka společné strany obou činitelů.

Jsou-li místa obou rovin momentových rovnoběžná, užijme opět tvaru $[Mmn]$ a $\mu\,[Nmn]$, který již při sečítání těchto geom. veličin byl zaveden; znásobením obdržíme

$$[Mmn]\,.\,\mu\,[Nmn] = \mu\,[MNmn]\,[mn]$$

Položíme-li za vektory m a n rozdíly bodů $-N+P$, $-N+Q$, vychází pro součin $\mu\,[MNmn]$ výraz

$$\mu\,[MN\,(-N+P)\,(-N+Q)] = \mu\,[MNPQ],$$

tedy číslo α, značící poměr obsahu rovnoběžnostěnu, jehož jednou

*) Násobení za těchto podmínek jest zvláštním případem obecnějšího druhu násobení veličin extensivních, které nazývá Grassmann *regresivním.* Viz jeho „Ausdehnungslehre“, II. vyd., pag. 61.

stěnou jest rovnoběžník $\mu\,[mn]$ a jehož výškou jest vzdálenost rovnoběžných míst obou činitelů k obsahu rovnoběžnostěnu základního [ABCD].

Tudíž

$$[\mathrm{M}mn]\,.\,\mu\,[\mathrm{N}mn] = \alpha\,[mn]\,, \tag{44}$$

t. j. součin dvou rovin momentových, jichž místa jsou rovnoběžná, jest extern. součin dvou vektorů rovnoběžných k místům daných činitelů; obsah rovnoběžníka tímto součinem určeného, jest αkrát větší než jest obsah prvého činitele, má-li číslo α význam právě vytčený.

Užijeme-li i v tomto případě pravidla platného pro součin dvou rovin moment. o místech se protínajících, můžeme též říci, že součinem dvou rovin moment. o rovnoběžných místech jest rotor, jehož osou jest přímka úběžná. Srovnáním obou výsledků poznáváme, že takový rotor jest rovnomocný rovnoběžníku sestrojenému ze dvou vektorů. A podobně rovina momentová, jejíž místem jest rovina úběžná, jest rovnomocná určitému rovnoběžnostěnu.

Z toho znova vysvítá, proč musíme přisuzovati týž stupeň (druhý) rovnoběžníku dvojice a rotoru, a týž stupeň (třetí) rovnoběžnostěnu, příslušejícímu extern. součinu tří vektorů a rovině.

Součin tří rovin momentových, jichž místa jedním bodem M procházejí, jest

$$\begin{aligned} [\mathrm{MNP}]\,[\mathrm{MNQ}]\,[\mathrm{MPQ}] &= [\mathrm{MNP}]\,[\mathrm{QMN}]\,[\mathrm{PQM}] \\ &= [\mathrm{MNPQ}]\,[\mathrm{MNPQ}]\,\mathrm{M} = \alpha^2\mathrm{M} \end{aligned} \tag{45}$$

tedy bod mnohonásobný, jehož místem jest společný bod daných tří míst.

Součin čtyř rovin moment., jichž místa tvoří čtyřstěn o vrcholech M, N, P, Q, jest

$$\begin{aligned} [\mathrm{MNP}]\,[\mathrm{MNQ}[\,[\mathrm{MPQ}]\,[\mathrm{NPQ}] &= [\mathrm{MNP}]\,[\mathrm{QMN}]\,[\mathrm{PQM}]\,[\mathrm{NPQ}] \\ &= [\mathrm{MNPQ}]\,[\mathrm{MNPQ}]\,[\mathrm{MNPQ}] = \alpha^3, \end{aligned} \tag{46}$$

tedy číslo, udávající trojmoc obsahu čtyřstěnu, danými činiteli utvořeného, je-li obsah čtyřstěnu základního jednotkou.

Pomíjím zde dalších příkladů, jako jsou: násobiti rovinu bodem neb rotorem, atd., poněvadž provedení jejich nepodléhá žádným obtížím; podotýkám toliko ještě, že stereometrický součin dvou rotorů se rovná nulle, leží-li osy jejich v téže rovině, že stereometrický součin dvou rovin moment. jest roven nulle, splývají-li místa jejich v jednu rovinu atd., což nám poskytuje kriterií o těchto zvláštních polohách veličin geometrických.

Ku konci jest mi ještě krátce se zmíniti o zákonu *duality*, který platí o veličinách geometrických; dle zákona toho jsou veličinami dualnými: bod hmotný a rovina momentová, veličinou neutralnou jest rotor. Buďtež zde uvedeny jen tyto příklady:

Součin dvou bodů hmotných jest rotor.	Součin dvou rovin jest rotor.
Součin tří bodů hmotných jest rovina.	Součin tří rovin jest bod hmotný.
Součin bodu hmotného a rotoru jest rovina.	Součin roviny a rotoru jest bod hmotný.

Opvava. Na str. 284. v řádce 5. shora jest vypustiti slovo: dvojmocí.

Příspěvek k fotogrammetrii.

Napsal

B. Procházka,

professor v Karlíně.

Při určování hlavní horizontaly a hlavního bodu jistého obrazu fotografického, jakož i příslušné distance středu optického z jediné fotografie, nepřihlíží se k tomu případu, který se ve skutečnosti zhusta vyskytuje, kdy na takovém obraze jest obsažena část rovné hladiny vodní nějakého jezera, rybníka a p. v., jichž situační plán máme po ruce.

V tomto případě netřeba nám použíti *problému pěti bodů* *)

*) Dipl. Ing. *Eriedrich Steiner*: *Die Photographie im Dienste des Ingenieurs. Ein Lehrbuch der Photogrammetrie.* 1893, str. 24.