Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Marian Haas

Kvadratura hyperboly. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 2, 251--256

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122408`

Kvadratura hyperboly.

Napsal prof. dr. **Marian Haas.**

(Dokončení.)

Úloha čís. 2. Daný souřadnicový pruh (nebo výseč) rozdělte na n rovných dílů.

Jsou-li interpolované body M_1, M_2, $M_3 \ldots M_{n-1}$, třeba splniti rovnice

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\xi_3}{\xi_2} = \ldots = \frac{\xi}{\xi_{n-1}}.$$

Označíme-li podíl

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \lambda,$$

dostaneme

$$\xi_\varkappa = \xi_0 \,.\, \lambda^\varkappa,$$

$$\xi = \xi_0 \lambda^n,$$

z čehož plyne

$$\lambda = \sqrt[n]{\frac{\xi}{\xi_0}},$$

$$\xi_\varkappa = \xi_0 \sqrt[n]{\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\varkappa},$$

pro $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n - 1$.

Obsah pruhu a výseče.

Předložen-li souřadnicový pruh začínající u bodu M_0 (ξ_0, η_0) a končící bodem M (ξ, η), rozdělíme jej na velký počet n proužků obsahem p vesměs sobě rovných, takže pruh M_0M pak má obsah $P = np$.

Pro první z proužků počínající u M_0 (ξ_0, η_0) a končící u M_1 (ξ_1, η_1) platí

$$p > (\xi_1 - \xi_0)\,\eta_1,$$

$$p < (\xi_1 - \xi_0)\,\eta_0.$$

Použijeme-li rovnice hyperboly, dostaneme

$$c^2\left(\frac{\xi_1}{\xi_0} - 1\right) > p > c^2\left(1 - \frac{\xi_0}{\xi_1}\right).$$

Pro celý pruh tudíž dostaneme násobivše n

$$nc^2\left(\frac{\xi_1}{\xi_0} - 1\right) > P > nc^2\left(\frac{\xi_1}{\xi_0} - 1\right)\frac{\xi_0}{\xi_1},$$

při čemž neznámá souřadnice ξ_1 dle úlohy čís. 2. jest určena vzorcem

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \sqrt[n]{\frac{\xi}{\xi_0}}.$$

Poměř $\frac{\xi_1}{\xi_0}$ blíží se při velikém n jednotce, a proto obě meze obsahu P vytknuté nabývají přibližně téže hodnoty, která nám při $\lim n = \infty$ vyjadřuje přesně obsah hyperbolického pruhu P.

Abychom tuto mezní hodnotu vyšetřili, použijeme substituce

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = 1 + \frac{1}{\omega},$$

načež předchozí rovnice mění se na relaci mezi n a ω:

$$1 + \frac{1}{\omega} = \sqrt[n]{\frac{\xi}{\xi_0}},$$

z níž vypočítáme

$$n = \frac{\log \xi - \log \xi_0}{\log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)}.$$

Dosadivše za $\frac{\xi_1}{\xi_0}$, n tyto hodnoty, uzavřeme obsah pruhu P do dvou mezí

$$P > \frac{c^2}{\log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega+1}} (\log \xi - \log \xi_0),$$

$$P < \frac{c^2}{\log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}} (\log \xi - \log \xi_0).$$

Při velkém počtu n a malé šířce $\xi_1 - \xi_0 = \frac{\xi_0}{\omega}$ proužku, jest i ω číslo veliké, a obě meze obsahu P vytknuté jsou sobě blízké.

Volíme-li ω dostatečně veliké, můžeme přibližně stanoviti obsah pruhu nebo výseče.

Na př. pro $\omega = 1000$ vypočítáme snadno pomocí šestimístných logarithmických tabulek

$$P > 2{\cdot}30186\ c^2 (\log \xi - \log \xi_0),$$
$$P < 2{\cdot}30416\ c^2 (\log \xi - \log \xi_0),$$

takže trojciferně správně vypočten obsah formulí

$$P = 2{\cdot}30\, c^2 (log\, \xi - log\, \xi_0),$$

kdežto střední hodnota

$$P = 2{\cdot}303\, c^2 (log\, \xi - log\, \xi_0)$$

liší se od pravé teprve na pátém místě.

Přesnou hodnotu pro obsah obdržíme, jestliže daný pruh rozdělíme na nekonečný počet proužků; pak $\omega = \infty$, a obě meze obsahu vytknuté splynou v jedno.

Neboť hodnota mocniny

$$\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$$

s rostoucím ω se zvětšuje blížíc se při $lim\ \omega = \infty$ konečnému číslu

$$e = 2{\cdot}718281828459\ldots,$$

které tvoří základ přirozených logarithmů a nazývá se někdy také Eulerinou*).

Jelikož také $$\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega+1}$$

pro $lim\ \omega = \infty$ blíží se mezní hodnotě e, vedou souhlasně obě meze ku vzorci

$$P = c^2 \frac{log\, \xi - log\, \xi_0}{log\, e}$$

pro obsah hyperbolické výseče a souřadnicového pruhu.

K tomu podotýkáme, že z hodnoty e výše uvedené pomocí vícemístných tabulek se vypočítá

$$log\, e = 0{\cdot}434294481903\ldots$$

$$\frac{1}{log\, e} = 2{\cdot}302585092994\ldots$$

Jistého zjednodušení docílíme, zvolíme-li na místě Briggických logarithmy přirozené, pro něž zaveden všeobecně symbol l. Neboť pak $le = 1$

$$P = c^2 (l\xi - l\xi_0),\ \text{čili}$$

$$P = c^2\, l \frac{\xi}{\xi_0}.$$

*) Bližší poučení o tomto zajímavém čísle a jeho vlastnostech viz na př. ve spise prof. Fr. Studničky: »Výklady o funkcích monoperiodických.«

Poznámka. Je-li poměr asymptotických souřadnic $\frac{\xi}{\xi_0} = e$, jest obsah výseče nebo pruhu roven obsahu čtverce sestrojeného nad reálnou poloosou jakožto úhlopříčkou.

Vrátíme-li se nyní od asymptotické polohy substitucí

$$\xi = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

$$\eta = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

k obyčejné poloze hyperboly určené rovnicí

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

zjednáme si pro výseč OM_0M vzorec

$$V = \frac{a^2}{2}\, l\, \frac{x+y}{x_0+y_0}.$$

Volíme-li nad to za jeden z obou bodů vrchol hyperboly, pro nějž $x_0 = a$, $y_0 = 0$, obdržíme pro výseč mající za jeden poloměr reálnou poloosu jednoduchý vzorec

$$V = \frac{a^2}{2}\, l\, \frac{x+y}{a}.$$

Hyperbola nerovnoosá.

Majíce na základě předchozích úvah provésti kvadraturu hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

přikreslíme k ní rovnoosou hyperbolu

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Kolmice v bodě P ve vzdálenosti $OP = x$ na reálnou osu X vztyčená protíná (obr. 3.) obě hyperboly v bodech M, M', jichž kladné souřadnice jsou dány rovnicemi

$$PM = y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

$$PM' = y' = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

z čehož patrna správnost úměry

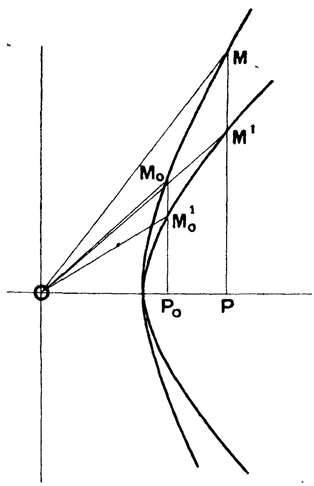
$$PM : PM' = b : a,$$

pro každý bod P bez ohledu na vzdálenost $OP = x$.

Dvě takové kolmice v blízkých bodech P_1, P_2 vztyčené vymezí v každé hyperbole úzký proužek, který lze při dostatečně malé vzdálenosti bodů P_1, P_2 pokládati za lichoběžník.

Z planimetrie pak známo, že obsahy stejně vysokých lichoběžníků stojí k sobě v témž poměru jako jejich střední příčky. Jelikož dle věty právě dovozené poměr příček dán jest poměrem poloos $b : a$, platí také pro obsahy obou proužků-lichoběžníků

$$p_1 : p'_1 = b : a.$$



Obr. 3.

Libovolný hyperbolický pruh lze si v mysli rozděliti na veliký (nekonečný) počet úzkých proužků, pro něž platí podobně

$$p_2 : p'_2 = b : a$$
$$p_3 : p'_3 = b : a$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$p_n : p'_n = b : a,$$

a poněvadž dle pouček platných o úměrách lze též psáti

$$(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n) : (p'_1 + p'_2 + p'_3 + \ldots p'_n) = b : a,$$

jest poměr kterýchkoli dvou souhlasných pruhů dán poměrem obou poloos.

Na této úvaze založíme výpočet výseče OM_0M u nerovnoosé hyperboly. Kolmice s bodů M_0, M na osu X spuštěné protnou nám tuto v bodech P_0, P a rovnoosou hyperbolu v bodech M'_0, M'.

Výseče obou hyperbol se dají vyjádřiti vzorci

$$OM_0M = \triangle OPM - \triangle OP_0M_0 - \text{pruh } P_0PMM_0,$$
$$OM'_0M' = \triangle OPM' - \triangle OP_0M'_0 - \text{pruh } P_0PM'M'_0.$$

Z platnosti úměr

$$\triangle OPM : \triangle OPM' = \overline{PM} : \overline{PM'} = b : a,$$
$$\triangle OP_0M_0 : \triangle OP_0M'_0 = \overline{P_0M_0} : \overline{P_0M'_0} = b : a,$$
$$\text{pruh } P_0PMM_0 : \text{pruhu } P_0PM'M'_0 = b : a$$

vyplývá též správnost úměry

$$\text{výseč } OM_0M : \text{výseč } OM'_0M' = b : a.$$

Pro výseč rovnoosé hyperboly jsme si odvodili vzorec

$$OM'_0M' = \frac{a^2}{2}\, l\, \frac{x + y'}{x_0 + y'_0},$$

takže

$$OM_0M = \frac{ab}{2}\, l\, \frac{x + y'}{x_0 + y'_0}.$$

Dosadíme-li sem ještě $y' = \frac{b}{a}\, y$,

$$y'_0 = \frac{b}{a}\, y_0,$$

obdržíme po jednoduché úpravě pro hyperbolickou výseč definitivní vzorec

$$V = \frac{ab}{2}\, l\, \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}},$$

v němž se vyskytují souřadnice obou krajních bodů hyberbolického oblouku M_0M.

Pro výseč počínající u vrcholu křivky, jehož souřadnice jsou $x_0 = a$, $y_0 = 0$, máme jednodušší vzorec

$$V = \frac{ab}{2}\, l \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

V Opavě, 7. prosince 1909.