František Velísek

Plochy s isothermicko-konjugovaným systémem čar majících za sférický obraz čáry aequidistantní

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 16--24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122393

Plochy s isothermicko-konjugovaným systémem čar majících za sférický obraz čáry aequidistantní.

Fr. Velísek.

Na plochách positivní křivosti existuje nekonečně mnoho systémů čar, pro které forma

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$$

nabývá tvaru isothermického, t. j. kdy platí

$$D = D'', \quad D' = 0. \tag{1}$$

Označíme-li lin. element koule $d\sigma$, plochy uvažované pak ds, bude

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= e'du^2 + 2f'dudv + g'dv^2, \\ ds^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Zavedeme-li dle podmínky úlohy

$$e' = 1, \ g' = 1, \ f' = \sqrt{eg}\, cos\, w = cos\, w,$$

dávají známé relace pro sférické zobrazení

$$E = \frac{D^2}{sin^2 w}, \quad F = -\frac{D^2 cos\, w}{sin^2 w}, \quad G = \frac{D^2}{sin^2 w}. \tag{3}$$

Rovnice Codazziho se v tomto případě redukují na

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{sin\, w}\right) + \frac{cos\, w}{sin\, w}\frac{D}{sin\, w} w_v - \frac{1}{sin\, w}\frac{D}{sin\, w} w_u = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D}{sin\, w}\right) - \frac{1}{sin\, w}\frac{D}{sin\, w} w_v + \frac{cos\, w}{sin\, w}\frac{D}{sin\, w} w_u = 0,$$

neb

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} lg \frac{D}{sin\, w} &= -\frac{cos\, w\, w_v}{sin\, w} + \frac{w_u}{sin\, w}, \\ \frac{\partial}{\partial u} lg \frac{D}{sin\, w} &= \frac{w_v}{sin\, w} - \frac{cos\, w\, w_u}{sin\, w}. \end{aligned} \tag{4}$$

Z rovnic (4) jde z podmínky integrability relace

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{w_u}{sin\, w} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{w_v}{sin\, w},$$

již možno psáti ve tvaru

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \lg tg \frac{w}{2} = \frac{\partial^2}{\partial v^2} \lg tg \frac{w}{2}.$$

Označíme-li f, φ funkce argumentu $u + v$, resp. $u - v$, jest integrálem poslední rovnice

$$tg \frac{w}{2} = f \cdot \varphi,$$

z čehož jde

$$\cos w = \frac{1 - f^2\varphi^2}{1 + f^2\varphi^2}, \quad \sin w = \frac{2f\varphi}{1 + f^2\varphi^2}. \tag{5}$$

Poněvadž pak lin. element $d\sigma$ leží na kouli poloměru 1, dává výraz pro křivost totální formy

$$du^2 + 2 \cos w \, du \, dv + dv^2$$

relaci

$$w_{uv} + \sin w = 0. \tag{6}$$

Z rovnic (5) obdržíme

$$w_u = 2 \frac{f\varphi' + f'\varphi}{1 + f^2\varphi^2},$$

$$w_{uv} = 2 \frac{(1 + f^2\varphi^2)(f''\varphi - f\varphi'') - 2f\varphi(f'^2\varphi^2 - f^2\varphi'^2)}{(1 + f^2\varphi^2)^2}.$$

Pro tyto hodnoty dává rovnice (6)

$$(1 + f^2\varphi^2)(f''\varphi - f\varphi'') - 2f\varphi(f'^2\varphi^2 - f^2\varphi'^2)$$
$$+ f\varphi(1 + f^2\varphi^2) = 0, \tag{7}$$

kterýžto výraz musí býti splněn identicky, jelikož f, φ nejsou na sobě závislé.

Píšeme-li poslední rovnici ve tvaru

$$\frac{f''}{f} - \frac{\varphi''}{\varphi} + f\varphi^2 f'' - f^2\varphi\varphi'' - 2f'^2\varphi^2 + 2f^2\varphi'^2 + f^2\varphi^2 + 1 = 0,$$

obdržíme derivováním dle $(u + v)$

$$\frac{f'''}{f} - \frac{f'f''}{f^2} + ff'''\varphi^2 - 2ff'\varphi\varphi'' - 3f'f''\varphi^2 + 4ff'\varphi'^2$$
$$+ 2ff'\varphi^2 = 0,$$

další derivací dle $(u - v)$ pak

$$ff'''\varphi\varphi' - ff'\varphi\varphi''' - 3f'f''\varphi\varphi' + 3ff'\varphi'\varphi'' + 2ff'\varphi\varphi' = 0.$$

Za předpokladu $f' \mp 0$, $\varphi' \mp 0$ plyne z rovnice poslední

$$\frac{f'''}{f'} - 3\frac{f''}{f} = k - 1, \quad \frac{\varphi'''}{\varphi'} - 3\frac{\varphi''}{\varphi} = 1 + k,$$

z čehož dostaneme integrací

$$f'' = \frac{1-k}{2} f + k_1 f^3, \quad \varphi'' = -\frac{1+k}{2}\varphi + k_2\varphi^3,$$

při čemž k_i značí konstanty. Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice vzniklé ze (7) derivací dle $(u+v)$, obdržíme

$$2\varphi'^2 = k_2\varphi^4 - k\varphi^2 - \varphi^2 - k_1,$$

dosazením pak do rovnice ze (7) vzniklé derivací dle $(u-v)$

$$2f'^2 = k_1 f^4 - kf^2 + f^2 - k_2,$$

pro kteréžto hodnoty dává levá strana rovnice (7) po redukci hodnotu 4.

Supposice $f' \mp 0$, $\varphi' \mp 0$ jest tudíž nemožnou.

Budiž $\varphi' = 0$, tedy $\varphi =$ konst.; možno pak bez újmy obecnosti klásti $\varphi = 1$. Rovnice (7) dává v tomto případě

$$(1+f^2) f'' - 2ff'^2 + f(1+f^2) = 0,$$

z čehož jde integrací, značí-li k integrační konstantu

$$f' = \sqrt{(1+f^2)(1+k+kf^2)}. \tag{8}$$

Pro

$$g_2 = \frac{16k^2+16k+1}{12k^2}, \quad g_3 = \frac{(2k+1)(32k^2+32k-1)}{216k^3}$$

jde pro f výraz

$$f = \frac{1}{2}\,\frac{p'[\sqrt{k}(u+v)]}{p[\sqrt{k}(u+v)] + \dfrac{2k+1}{6k}}, \tag{8*}$$

kde

$$p'^2 = 4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)$$

$$= 4\left(p + \frac{2k+1}{6k}\right)\left(p - \frac{2k+1+6\sqrt{k^2+k}}{12k}\right)\left(p - \frac{2k+1-6\sqrt{k^2+k}}{12k}\right),$$

klademe-li k vůli stručnosti

$$p[\sqrt{k}(u+v)] = p.$$

Rovnice (4) dávají

$$\frac{\partial}{\partial u} lg \frac{D}{\sin w} = \frac{2ff'}{1+f^2}, \quad \frac{\partial}{\partial v} lg \frac{D}{\sin w} = \frac{2ff'}{1+f^2},$$

tudíž integrací

$$D = 2f,$$

nepřihlížíme-li k multiplikativní konstantě. Pro tyto hodnoty jde z rovnic (3)

$$E = G = (1+f^2)^2, \quad F = f^4 - 1,$$

pro totální křivost plochy pak

$$K = \frac{D^2}{EG - F^2} = \frac{1}{(1+f^2)^2}.$$

Abychom obdrželi pravoúhlé souřadnice plochy, na níž systém uvažovaný jest isothermicko-konjugovaný, nutno řešiti rovnice

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} = \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial\Theta}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial\Theta}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\Theta}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\Theta}{\partial v}$$

plynoucí z rovnic pro druhé parc. derivace souřadnic (Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie 1910, str. 88) s ohledem na

$$D = D'', \quad D' = 0,$$

při čemž Christoffel-ovy symboly mají hodnoty

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \frac{2ff'}{1+f^2}, \quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{2ff'}{1+f^2}, \quad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{f'}{f}, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{f'}{f},$$

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

Redukují se tudíž rovnice pro souřadnice na výrazy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} &= \frac{2ff'}{1+f^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u} - \frac{\partial\Theta}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial^2\Theta}{\partial u \partial v} &= \frac{f'}{f}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u} + \frac{\partial\Theta}{\partial v}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Snadno ukážeme, že systém tento připouští simultanní řešení o $6 - 2 = 4$ integračních konstantách. Označíme-li druhé a první parc. derivace Θ resp. $r, s, t, p, q,$ obdržíme

$$\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^3}=\frac{f'+3f^2f'}{f(1+f^2)}r+\frac{4f^2f''+3f^4f''-2ff'^2-6f^3f'^2+f''}{f(1+f^2)^2}p$$

$$+\frac{f''-2ff'^2-f^4f''+2f^3f'^2}{f(1+f^2)^2}q=\frac{f'(1+3f^2)}{f(1+f^2)}r$$

$$-\frac{3f^2+1}{1+f^2}p+\frac{f^2-1}{f^2+1}q,$$

$$\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\partial v}=\frac{f''}{f}(p+q)+\frac{f'}{f}r=(2k+2kf^2+1)(p+q)+\frac{f'}{f}r,$$

přihlížejíce při derivacích k rovnicím (8) a (9). Pro hodnoty tyto jest podmínka integrability

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^3}$$

identicky splněna. Sestrojíme-li tedy k totálním diff. rovnicím

$$d\Theta=pdu+qdv,$$
$$dp=rdu+sdv,$$
$$dq=sdu+tdv,$$
$$dr=\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^3}du+\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\partial v}dv$$

odpovídající systém parc. lin. rovnic differenciálních prvního řádu

$$\frac{\partial f}{\partial u}+p\frac{\partial f}{\partial\Theta}+r\frac{\partial f}{\partial p}+s\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^3}\frac{\partial f}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}+q\frac{\partial f}{\partial\Theta}+s\frac{\partial f}{\partial p}+t\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\partial v}\frac{\partial f}{\partial r}=0,$$

splňuje tento podmínky Jacobiho. Rovnice (9) dávají tudíž řešení o 4 konstantách, kteréžto řešení obdržíme snadno též z rovnic původních. Dává totiž rovnice první (9) po zavedení nových proměnných vztahy

$$u+v=\alpha,\quad u-v=\beta$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{ff'}{1+f^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\beta},$$

a tedy integrací, píšeme-li rovnici tuto ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} lg \frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha} lg \sqrt{1+f^2},$$

$$\Theta = \sqrt{1+f^2}\,\varphi(u-v) + f_1(u+v).$$

Rovnice druhá v systému (9) skýtá pak pro tuto hodnotu Θ

$$\frac{ff'' + f^3f'' - f'^2 - 2f^2f'^2}{(1+f^2)^{3/2}}\varphi - \sqrt{1+f^2}\,\varphi'' + f''_1 - \frac{2f'f'_1}{f} = 0,$$

neb, poněvadž

$$ff'' + f^3f'' - f'^2 - 2f'^2f^2 = -(1+k)(1+f^2)^2,$$

$$f''_1 - \frac{2f'f'_1}{f} - \sqrt{1+f^2}\,[\varphi'' + (k+1)\varphi] = 0.$$

Musí tudíž býti

$$\varphi'' + (k+1)\varphi = k_2,\quad f''_1 - \frac{2f'f'_1}{f} - k_2\sqrt{1+f^2} = 0,$$

z čehož jde dále integrací

$$\varphi = k_3 \cos\sqrt{k+1}\,(u-v) + k_4 \sin\sqrt{k+1}\,(u-v) + \frac{k_2}{k+1},$$

$$f'_1 = f^2\left[k_5 + k_2\int\frac{\sqrt{1+f^2}}{f^2}\,d(u+v)\right], \tag{10}$$

při čemž k_i značí konstanty.

Vzhledem na rovnici (8*) obdržíme

$$\frac{1+f^2}{f^2} = \frac{4(p-e_1)^2 + p'^2}{p'^2} = \frac{p - e_1 + (p-e_2)(p-e_3)}{(p-e_2)(p-e_3)}$$

$$= \frac{\left(p + \frac{4k-1}{12k}\right)^2}{(p-e_2)(p-e_3)}.$$

Klademe-li

$$p + \frac{4k-1}{12k} = m(p-e_2) + n(p-e_3),$$

dostaneme

$$m(e_2-e_3) = \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}},\quad n(e_2-e_3) = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{2\sqrt{k}}.$$

tedy pomocí výrazů pro e_1, e_2, e_3

$$m = \frac{\sqrt{e_3 - e_1}}{e_2 - e_3}, \quad n = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{e_2 - e_3},$$

$$p + \frac{4k - 1}{12k} = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{e_2 - e_3}(p - e_2) + \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{e_2 - e_3}(p - e_3),$$

$$\int \frac{\sqrt{1 + f^2}}{f^2} d(u + v) = \frac{2}{e_2 - e_3} \int \left[\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{\frac{p - e_2}{p - e_3}} \frac{p - e_1}{p'}\right.$$

$$\left. + \sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{\frac{p - e_3}{p - e_2}} \frac{p - e_1}{p'}\right] d(u + v)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}(e_2 - e_3)^2} \left[\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{\frac{p - e_2}{p - e_3}} - \sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{\frac{p - e_3}{p - e_2}}\right],$$

použijeme-li výrazu

$$\int \frac{p - e_1}{p'} d(u + v) = \frac{1}{4\sqrt{k}(e_2 - e_3)} lg \frac{p - e_2}{p - e_3}.$$

Rovnice (10) lze pak psáti

$$\varphi = k_3 \cos \sqrt{k + 1}(u + v) + k_4 \sin \sqrt{k + 1}(u + v) + \frac{k_2}{k + 1},$$

$$f'_1 = k_5 f^2 + \frac{k_2}{4\sqrt{k}(e_2 - e_3)^2} \left[\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{\frac{p - e_2}{p - e_3}}\right.$$

$$\left. - \sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{\frac{p - e_3}{p - e_2}}\right] f^2,$$

při čemž výraz pro f'_1 se snadno dále integruje.

Pro souřadnice x, y z dané plochy stačí vzíti 3 lin. neodvislá partikulárná řešení Θ daného rovnicí

$$\Theta = \sqrt{1 + f^2}\, \varphi + f_1.$$

Položíme-li $k_2 = k_4 = k_5 = 0$, resp. $k_2 = k_3 = k_5 = 0$, resp. $k_2 = k_3 = k_4 = 0$, dostaneme, nehledíme-li k multiplikativním konstantám,

$$x = \sqrt{1 + f^2} \cos \sqrt{k + 1}(u + v)$$

$$y = \sqrt{1 + f^2} \sin \sqrt{k + 1}(u + v)$$

$$z = \int f^2 d(u + v),$$

kde značí

$$\sqrt{1+f^2} = \frac{p + \frac{4k-1}{12k}}{\sqrt{p-e_1}} = \frac{\sqrt{e_3-e_1}\,(p-e_2) + \sqrt{e_2-e_1}\,(p-e_3)}{(e_2-e_3)\sqrt{p-e_1}},$$

$$\int f^2\, d(u+v) = \int \frac{(p-e_2)(p-e_3)}{p-e_1}\, d(u+v)$$

$$= \int \left[p + e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p-e_1} + e_1\right] d(u+v)$$

$$= e_1(u+v) - \frac{1}{\sqrt{k}}\left[\frac{\sigma'\sqrt{k}\,(u+v)}{\sigma\sqrt{k}\,(u+v)} + \frac{\sigma'_1\sqrt{k}\,(u+v)}{\sigma_1\sqrt{k}\,(u+v)}\right].$$

Redukce funkcí elliptických nastává pro $k = 0$, $k = -1$. Pro $k = 0$ dává rovnice (8)

$$f' = \sqrt{1+f^2},$$

tedy

$$2f = e^{(u+v)} - e^{-(u+v)}.$$

Z rovnic (10) jde

$$\varphi = k_3 \cos(u-v) + k_4 \sin(u-v) + k_2$$

$$f'_1 = k_5 f^2 + k_2 f^2 \int \frac{\sqrt{1+f^2}}{f^2}\, d(u+v).$$

Volíme-li konstanty pro partikulárná řešení jako dříve, dostaneme souřadnice plochy ve tvaru

$$x = \sqrt{1+f^2}\cos(u-v), \quad y = \sqrt{1+f^2}\sin(u-v),$$

$$z = \int f^2\, d(u+v),$$

kde značí

$$\sqrt{1+f^2} = \frac{e^{u+v} + e^{-(u+v)}}{2},$$

$$\int f^2\, d(u+v) = \tfrac{1}{8}\left[e^{2(u+v)} - 4 - e^{-(u+v)}\right].$$

Zcela analogicky obdrželi bychom plochu pro $k = -1$.

Dodatkem poznamenáváme, že při použití Lelieuvreovy transformace

$$\xi = \sqrt{1+f^2}\, X, \quad \eta = \sqrt{1+f^2}\, Y, \quad \zeta = \sqrt{1+f^2}\, Z,$$

kde X, Y, Z značí cosiny úhlů normály plochy, jsme vedeni na rovnici pro určení ξ, η, ζ tvaru

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} = 2k\,(1 + 2f^2)\,\Theta;$$

3. partikulárná řešení lineárně neodvislá dávají ξ, η, ζ, z nichž určí se souřadnice x, y, z vztahy

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta, & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v}, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = - \begin{vmatrix} \eta, & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u}, & \frac{\partial \xi}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

Jak strojiti plochu druhého stupně danou sedmi rovinami tečnými a dotyčným bodem v jedné z nich.

Od prof. **Vinc. Jarolímka.**

K řešení této úlohy jest třeba několika vět z geometrie polohy, jež klademe v čelo své úvahy.

Z theorie *svazku kuželoseček*, jenž dán buď základními body a, b, c, d, známa jest věta:

α) *Přímky, z nichž každá prochází jedním základním bodem, protínají kuželosečky svazku v bodových řadách projektivných.* Body homologické leží na téže kuželosečce. Procházejí-li na př. přímky P_1, P_2 dvěma *různými* základními body svazku, P_1 bodem a, P_2 bodem b, protínají se svazkem kuželoseček v řadách *perspektivných*; majíť tyto samodružný bod v průsečíku (P_1P_2), jímž, jako každým bodem vůbec, prochází také určitá křivka svazku. Střed perspektivný leží na spojnici ostatních dvou bodů základních $\overline{cd}$.

Procházejí-li však přímky P_1, P_2 *týmž* bodem základním, jsou řady jejich toliko prostěprojektivné, nikoli perspektivné, leč by v tom bodě dva základní body se sjednocovaly, na př. $a \equiv b$, tedy všecky křivky svazku v něm navzájem se dotýkaly.

β) Duální pak věta, platná pro *osnovu* kuželoseček, jest tato: