Juraj Hronec

Fuchsove relácie a omezené integrály

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 4, 320--326

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122323`

Fuchsove relácie a omezené integrály.

Napísal *J. Hronec.*

I.

V drievejšej práci,[1]) výduc z diferenciálneho systému:

$$(A) \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k} \qquad (k=1,2\dots n)$$

absolutne kanonického týpu, odvodil som Fuchsove relácie pre tento systém a tie boly:

$$(L) \quad \int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x,y))\, (Y_{ik}(x)) =$$

$$= \begin{cases} (0) & \text{je-li } \mu \neq \lambda \neq \nu \neq \varkappa \neq \mu. \\ 2\pi\sqrt{-1}\,\{(\delta_{ik}) + (A_{ik}^{(\nu} - \delta_{ik})^{-1}\} & \text{,, } \mu \neq \lambda \neq \nu = \varkappa \neq \mu, \\ 2\pi\sqrt{-1}\,\{(2\delta_{ik}) + (A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik}) + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\} & \mu = \lambda \neq \nu = \varkappa \end{cases}$$

a týmto zodpovedajucie sdružené relácie:

$$(L') \quad \int_{a_\lambda}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\nu}^{a_\mu} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x,z))\, (Y_{ik}(x)) =$$

$$= \begin{cases} (0) & \text{je-li } \mu \neq \lambda \neq \nu \neq \varkappa \neq \mu \\ 2\pi\sqrt{-1}\,(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1} & \text{,, } \mu \neq \lambda \neq \nu = \varkappa \neq \mu \\ 2\pi\sqrt{-1}\,\{(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\}. & \mu = \lambda \neq \nu = \varkappa. \end{cases}$$

Kde je

$$a_{\lambda k} = \frac{g_{\lambda k}(x)}{\varphi(x)} = \frac{b_{\lambda k}^{0} + b_{\lambda k}^{(1)} x + b_{\lambda k}^{(2)} x^2 + \dots + b_{\lambda k}^{(\sigma-1)} x^{\sigma-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\sigma)},$$

$(y_{ik}(x))$ je integrálny mátrix lin. dif. systému (A), a $(Y_{ik}(x)) = (y_{ik}(x))^{-1}$. $U_{ik}(xz)$ je racionálna funkcia celistvá najvíšśie $\sigma - 2$ stupňa tvaru:

$$U_{ik}(x,z) = \begin{cases} \dfrac{g_{ik}(x) - g_{ik}(z)}{x-z} \quad \dots\dots\dots\dots & \text{je-li } i \neq k \\[2ex] \dfrac{g_{ik}(x) - g_{ik}(z)}{x-z} + \dfrac{\varphi(x) - \varphi(z)}{(x-z)^2} - \dfrac{\varphi'(z)}{x-z} & \text{,, } i = k. \end{cases}$$

---

[1]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky roč. LII. str. 209.

Opíše-li premenna x okolo sing. bodu a_ν $(\nu = 1, 2 \ldots \sigma)$ uzavrenú krivku, vtedy integrálny mátrix dif. systému (A) bude:

$$\overline{(y_{ik}(x))} = (A_{ik}^{(\nu)})\,(y_{ik}(x))\,;$$

kde $A_{ik}^{(\nu)}$ sú konstanty a $(A_{ik}^{(\nu)})$ sluje: fundamentálna substitucia integrálneho mátrixu $(y_{ik}(x))$ a $\delta_{ik} = 1$ je-li $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ je-li $i \neq k$.

Fuchsove relácie boly odvodené pri tej podmienke, že korene determinujúcej fundamentálnej rovnice, patriacej k sing. bodu a_ν $(\nu = 1, 2, 3 \ldots \sigma)$ sú všetky rôzne a ich reálna čiastka leži v intervale o $a - 1$. Táto rovnica je tvaru:

$$\left| B_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}\, r \right| = 0,$$

kde $\nu = 1.2 \ldots \sigma$; $i, k = 1.2 \ldots n$. $B_{ik}^{(\nu)}$ sú residuá funkcií $a_{ik}(x)$, patriace k sing. bodu a_ν a tak sú:

$$a_{ik}(x) = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{B_{ik}^{(\nu)}}{x - a_\nu}.$$

II.

Vezmime, že $n = 1$, t. j. na miesto lin. dif. systémov vezmime lin. dif. rovnicu

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} = y \,.\, a$$

a pri tom ešte funkciu $a\,(x)$ volíme speciálne a to tak, aby bolo:

$$a\,(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

kde je $\qquad \varphi(x) = (x - a_1)\,(x - a_2) \ldots (x - a_\sigma),$

a $\qquad \varphi'(x) = \dfrac{d\varphi(x)}{dx}$

a tak je $\qquad a(x) = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\sigma} \dfrac{1}{x - a_\nu}.$

Diferenciálna rovnica (1) je teda Fuchsovho týpu a korene determinujúcej rovnice, patriacej k jednotlivým singulárnym bodom sú

$$B^\nu = -\frac{1}{2}\,;\ (\nu = 1, 2 \ldots \sigma)$$

ich reálna čiastka leží teda v intervale o $a - 1$., preto na dif. rovnicu (1) môžeme použiť Fuchsove relácie.

Utvorme identitu (C)[2])

$$(2)\quad \frac{d}{dx}\frac{y(z)}{z-x}\varphi(x)\mu(x)-\frac{d}{dz}\frac{\mu(x)}{x-z}\varphi(z)y(z)=y(z)\,U(xz)\,\mu(x),$$

kde $y(z)$ je integrálom lin. hom. dif. rovnice 1., alebo

$$(3)\qquad \varphi(z)\frac{dy(z)}{dz}=-\frac{1}{2}\varphi'(z)\,y(z);$$

potom dál je $\qquad \varphi(x)\,\mu(x)=\dfrac{1}{y(x)}$

a hovie adjungovanej dif. rovnici:

$$(4)\qquad \frac{d\varphi(x)\mu(x)}{dx}=\frac{1}{2}\varphi'(x)\,\mu(x).$$

Riešíme-li dif. rovnicu 3. máme, že je

$$y(z)=\frac{1}{\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Opíše-li premenna z okolo sing. bodu a_ν $(\nu=1.2.\sigma)$ uzavrenú krivku, násobí sa $y(z)$ fundamentálnou substituciou:

$$A^{(\nu)}=e^{r_\nu \pi i}=-1,$$

a $y(z)$ prejde do $\qquad y(z)=-\dfrac{1}{\sqrt{\varphi(z)}}.$

Riešením dif. rovnice 4. zase máme:

$$\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}.$$

Opíše-li premenna okolo sing. bodu a_ν uzavrenú krivku násobí sa tento integrál fundamentálnou substituciou

$$A^{(\nu)}=e^{(-r_\nu-1)\pi i}=-1,$$

t. j. $\mu(x)$ prejde do $\qquad \overline{\mu(x)}=-\dfrac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}.$

---

[2]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky r. LII. str. 213.

III.

V tomto speciálnom prípade určíme $U(x\,z)$, ktorá bude

$$U(x\,z) = -\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(x)-\varphi'(z)}{x-z} + \frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(x-z)^2} - \frac{\varphi'(z)}{x-z} =$$

$$= \frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(x-z)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(x)+\varphi'(z)}{x-z}$$

a však je $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(x-z)^2} = -\dfrac{d}{dx}\,\dfrac{\varphi(x)-\varphi(z)}{x-z} + \dfrac{\varphi'(x)}{x-z}$,

preto je:

$$U(x\,z) = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(x)-\varphi'(z)}{x-z} - \frac{d}{dx}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{x-z}.$$

Z toho však vidíme, že $U(x\,z)$ nemá konštantného člena. Vezmeme-li, že je

$$\varphi(x) = (x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_\sigma),$$

vtedy $U(x\,z)$ bude mať takýto explicitný tvar, ako sa to pomocou posledného vzorca dá vypočítať:

$$U(x,z) = \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{n=0}^{\sigma-2}(2n-\sigma+2)\,x^{\sigma-2-n}z^n -$$

$$-P_1\sum_{n=0}^{\sigma-3}(2n-\sigma+3)\,x^{\sigma-3-n}z^n + P_2\sum_{n=0}^{\sigma-4}(2n-\sigma+4)\,x^{\sigma-4-n}z^n\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{\sigma-4}P_{\sigma-4}\sum_{n=0}^{2}x^{2-n}z^n + (-1)\,P_{\sigma-3}\,(z-x)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2}(z-x)\Big[f_{\sigma-3}(z\,x) - P_1 f_{\sigma-4}(z\,x) + P_2 f_{\sigma-5}(z\,x)\ldots +$$

$$+(-)^{\sigma-5}P_{\sigma-5}f_2(z\,x) + (-1)^{\sigma-4}P_{\sigma-4}f_1(z\,x) + (-1)^{\sigma-3}P_{\sigma-3}\Big]$$

kde $f_{\sigma-m}(z\,x)$ znamená homogennú funkciu premenných z a x stupňa $\sigma-m$ a táto funkcia je násobená symetrickou funkciou P_{m-3} singulárnych bodov $a_1\,a_2\,a_3\ldots a_\sigma$ stupňa $m-3$. Funkcia $U(x\,z)$, ktorú stručne označíme

$$U(x\,z) = \frac{1}{2}(z-x)\sum_{m=0}^{\sigma-3}(-1)^m P_m(a_1\,a_2\ldots a_\sigma)\,f_{\sigma-3-m}(z,\,x),$$

je funkciou premenných z a x a to $\sigma - 2$ nejväčšieho stupňa a pri tom je ešte symetrickou funkciou singulárnych bodov $a_1\, a_2 \ldots a_\sigma$ najväčšieho stupňa $\sigma - 3$. Je však $P_0\,(a_1\, a_2 \ldots a_\sigma) = 1$, a $f_0\,(z,\, x) = 1$.

$U(x, z)$ je nulą identicky je-li $z = x$ identicky a však, ako to z identity 2) vyplýva, to je a priori vyzavreno.

Dva krajné prípady sú:

1.) je-li $P_m\,(a_1\, a_2 \ldots a_\sigma) = 0 \quad m = 1,\, 2,\, 3 \ldots \sigma - 3$

vtedy
$$U\,(x\, z) = \frac{1}{2}\,(z - x)\; f_{\sigma - 3}\,(z,\, x)$$

a 2.) je-li $f_{\sigma - 3 - m}\,(z, x) = 0,\; m = 0,\, 1,\, 2 \ldots \sigma - 4$ a vtedy je
$$U\,(x\, z) = (-1)^{\sigma - 3}\,\frac{1}{2}\,(z - x)\; P_{\sigma - 3}(a_1\; a_2 \ldots a_\sigma).$$

IV.

V tomto speciálnom prípade použijúc Fuchsove relácie (L) dostaneme pre istú skupinu omezených integrálov:

$$\sum_{m=0}^{\sigma-3} (-1)^m P_m(a_1 a_2 \ldots a_\sigma) \int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\, \frac{(z - x) f_{\sigma-3-m}(z, x)}{\sqrt{\varphi(z)}\,\sqrt{\varphi(x)}} =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{je-li } \mu \mp \lambda \mp \nu \mp \varkappa \mp \mu \\ 2\pi\sqrt{-1} & \quad ,, \quad \mu \mp \lambda \mp \nu = \varkappa \mp \mu \\ 4\pi\sqrt{-1} & \quad ,, \quad \mu = \lambda \mp \nu = \varkappa, \end{cases}$$

a použijúc Fuchsove relácie (L') máme:

$$\sum_{m=3}^{\sigma-3} (-1)^m P_m\,(a_1\, a_2 \ldots a_\sigma) \int_{a_\lambda}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\nu}^{a_\mu} dz\, \frac{(z - x) f_{\sigma-3-m}\,(z, x)}{\sqrt{\varphi(z)}\,\sqrt{\varphi(x)}} =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{je-li } \mu \mp \lambda \mp \nu \mp \varkappa \mp \mu \\ -2\pi\sqrt{-1} & \quad ,, \quad \mu \mp \lambda \mp \nu = \varkappa \mp \mu \\ -4\pi\sqrt{-1} & \quad ,, \quad \mu = \lambda \mp \nu = \varkappa, \end{cases}$$

kde $P_m\,(a_1\, a_2 \ldots a_\sigma)$, $\varphi\,(x)$ sú už vyššie definované a

$$(z - x)\, f_{\sigma-3-m}\,(z,\, x) = \sum_{n=0}^{\sigma-(m+2)} [2\,(n + 1) + m - \sigma]\; x^{\sigma-(n+m+2)}\, z^n.$$

Tieto omezené integrály vždy majú hore označené hodnoty, pokud je $f_{\sigma-3-m}\,(z, x)$ určitá hodnota a nie identicky nul. Na pr. v prípade

$\sigma = 2$ je nie určiteľná hodnota, poneváč jej stupeň je $\sigma - 3$. V tomto prípade je identicky $(z - x)\, f_{\sigma-3-m}(z, x) \equiv 0$ a preto v prípade $\sigma = 2$ sú takéto omezené integrály neurčiteľné.

V prípade $\sigma = 3$ máme:

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{a_2}^{a_3} dz \frac{z - x}{\sqrt{\varphi(z)}\sqrt{\varphi(x)}} = 2\pi\sqrt{-1},$$

kde $\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$;

$$\int_{a_3}^{a_2} dx \int_{a_2}^{a_1} dz \frac{z - x}{\sqrt{\varphi(z)}\sqrt{\varphi(x)}} = -2\pi\sqrt{-1}.$$

Potom máme ešte

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{a_2}^{a_1} dz \frac{z - x}{\sqrt{\varphi(z)}\sqrt{\varphi(x)}} = 4\pi\sqrt{-1}.$$

Takýchto máme tri, a práve tak dostaneme ešte tri:

$$\int_{a_2}^{a_1} dx \int_{a_1}^{a_2} dz \frac{z - x}{\sqrt{\varphi(z)}\sqrt{\varphi(x)}} = -4\pi\sqrt{-1}.$$

V prípade $\sigma = 4$ je:

$$U(x, z) = \frac{1}{2}(z - x)\, f_{\sigma-3-m}(x, z) =$$

$$= \frac{1}{2}(z - x)\,[2(z + x) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)],$$

a tak môžeme určiť hodnoty integrálov omezených s týmto čitateľom.

Vezmeme-li tak singulárne body, aby bolo:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0,$$

vtedy dostaneme hodnoty omezených integrálov:

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz \frac{z^2 - x^2}{\sqrt{\varphi(z)}\sqrt{\varphi(x)}} = \pi\sqrt{-1};\quad \nu = 1, 2, 3, 4 \text{ a } \mu \neq \nu \neq \lambda \neq \mu$$

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\mu} dz \frac{z^2 - x^2}{\sqrt{\varphi(z)}\sqrt{\varphi(x)}} = 2\pi\sqrt{-1};\quad \nu = 1, 2, 3, 4 \text{ a } \mu \neq \nu$$

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz \frac{z^2 - x^2}{\sqrt{\varphi(z)}\sqrt{\varphi(x)}} = 0;\quad \mu, \nu, \varkappa, \lambda = 1, 2, 3, 4,$$ ale od sebe rôzne hodnoty.

*

Les relations de Fuchs et les intégrales définies.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur applique les relations de Fuchs (v. ce Journal, t. LII, p. 247) ou cas où $n = 1$, c. à d., où

$$\frac{dy}{dx} = ya(x);$$

mais il détermine $a(x)$ d'une manière spéciale, de sorte que

$$a(x) = -\frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

où $$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_\sigma).$$

L'intégrale de cette équation différentielle est

$$y = 1 : \sqrt{\varphi(x)}$$

et la substitution fondamentale est, ici encore:

$$A = e^{-\pi i} = -1.$$

Ensuite, il détermine explicitement la fonction entière rationnelle $U(x, z)$ par une formule qui montre que c'est une fonction symétrique des points singuliers $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$ de l'ordre $\sigma - 3$; et une fonction homogène des variables x, z de l'ordre $\sigma - 2$. Mais on trouve que les intégrales définies ayant une telle fonction au numérateur, prises entre deux couples de points singuliers, peuvent être exprimées facilement et d'une manière simple; elles ont la forme:

$$\sum_{m=0}^{\sigma-3}(-1^m P_m(a_1, a_2, \dots a_\sigma)\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz \frac{(z-x)f_{\sigma-3-m}(z,x)}{\sqrt{\varphi(z)}\sqrt{\varphi(x)}} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pour } \mu \mp \lambda \mp \nu \mp \varkappa \mp \mu \\ 2\pi i & \text{,, } \quad \mu \mp \lambda \mp \nu = \varkappa \mp \mu \\ 4\pi i & \text{,, } \quad \mu = \lambda \mp \nu = \varkappa. \end{cases}$$

S'il existe, entre les points singuliers, $\sigma - 3$ relations symétriques, la valeur de l'intégrale définie sera

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz \frac{(z-x)f_{\sigma-3}(z,x)}{\sqrt{\varphi(z)}\sqrt{\varphi(x)}} = \begin{cases} 0 \\ 2\pi i \\ 4\pi i \end{cases}$$

En ce cas, on n'a que trois points singuliers arbitraires; les autres $\sigma - 3$ points en dépendent, mais il faut qu'on ait au moins trois points arbitraires, puisque pour $\sigma = 2$ ces intégrales n'ont pas une valeur déterminée.

A la fin, sont calculées ces intégrales définies pour $\sigma = 3$ te $\sigma = 4$.