Arnošt Dittrich

Vliv principu relativnosti na formu rovnic vektorového pole

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 5, 574--585

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122272

svazku 4-značného se dvěma odpovídajícími, avšak v témže paprsku $\overline{\sigma'\sigma}$ splynulými paprsky svazku 2-značného) a křivku Σ' stupně čtvrtého, mající v bodě σ bod dvojný. Křivku Σ' určíme body, jež stanovíme, sestrojíme-li k zvoleným bodům d_1 . . . dvojiny sdružené $e_1 e'_1$ . . . Průsečíky $\overline{d_1\sigma}$. $\overline{e_1'\sigma}$; $\overline{d_1\sigma}$. $\overline{e'_1\sigma'}$ dávají určující body; mimo ně známe bod dvojný σ a i další dvojné body lze snadno pro křivku Σ' sestrojiti.

Z uvedených konstrukcí patrno, že lze je provésti, i když určující přímky P, Q jsou naprosto imaginárné.

Vliv principu relativnosti na formu rovnic vektorového pole.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Po dosavadních nezdarech stanoviti pohyb země vůči prostoru pozorováním na pohybující se zeměkouli máme zajisté právo důvěřovati tomuto principu, dokud pokusy nebude vyvrácen. Můžeme naň spolehnouti tak dalece a tak bezpečně jako na princip zachování energie, založený původně také na nezdaru pokusů zhotoviti samohyb, perpetuum mobile. Princip relativnosti má velikou cenu. Lze jím z jedné rovnice differenciální (jež neobsahuje derivace dle času) odvoditi tři další (jež najisto obsahují derivace dle času). Ba i když nevíme o vektorovém poli zhola nic, lze dostati pro ně čtyři rovnice differenciální, jež pak arci neinformují o povaze vektorového pole, neboť vyjadřují pouze princip relativnosti.

Vyložím toto odvozování rovnic na příkladě, jenž je sám o sobě prakticky důležit. Volím jej, poněvadž od tohoto příkladu snadno lze přejíti k obecnému theorému.

Dejme tomu, že vektor u, v, w vyhovuje rovnici kontinuity

$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

Pak lze pomocí principu relativnosti obdržeti tři rovnice další, obsahující derivace dle času: u_t, v_t, w_t.

Podobné rovnice vyvodil pro vektor světelný prof. Koláček r. 1897, t. j. dříve, než princip relativnosti byl znám. Pomocí tohoto principu lze rovnice jeho značně zjednodušiti. Proto vyvodíme nejprvé jednoduchým způsobem rovnice Koláčkovy. K tomu třeba následující věty pomocné:

Zachovává-li vektor ξ, η, ζ *kontinuitu, lze jej považovati za víření jistého vektoru* u, v, w*):

$$\begin{aligned} \xi &= w_y - v_z \\ \eta &= u_z - w_x \\ \zeta &= v_x - u_y \end{aligned} \qquad \Xi = curl\ U.$$

Řadu takových vzorců budu po straně označovati v symbolech vektorového kalkulu místo pouhého čísla, jež se později cituje. Vektor „Ξ" má složky *malé* ξ, η, ζ, vektor „U" *malé* u, v, w, vektor „a" bude míti složky A, B, C a p., abychom se vyhnuli písmenovým indexům, jež schovávám pro derivace.

Tři relace

$$\Xi = curl\ U$$

jsou tedy rovnocenné s jedinou rovnicí kontinuity

$$\xi_x + \eta_y + \zeta_z = 0. \qquad div\ \Xi = 0.$$

Na tuto souvislost budeme se v dalším odvolávati rčením: *Vektor, jenž zachovává kontinuitu, víří.*

Odvození Koláčkových rovnic. Dejme tomu, že vektor u, v, w zachovává kontinuitu, ale že se mění s časem. Pak jest nejen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad div\ U = 0$$

ale též

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^m v}{dt^m} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^m w}{\partial t^m} = 0. \qquad div\ \frac{\partial^m U}{\partial t^m} = 0.$$

Můžeme dokonce násobiti koefficientem α_m na čase závislým a sečísti přes všechna „m" od nully počínaje, čím dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{m=0}\alpha_m\frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \frac{\partial}{\partial y}\sum_{m=0}\alpha_m\frac{\partial^m v}{\partial t^m} + \frac{\partial}{\partial z}\sum_{m=0}\alpha_m\frac{\partial^m w}{\partial t^m} = 0.$$

$$div \sum_{m=0}\alpha_m\frac{\partial^m U}{\partial t^m} = 0.$$

*) Důkaz je na př. ve: Weber „Die part. Differentialgleichungen" 1900. Sv. I. Str. 225.

Poněvadž vektor

$$\sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m U}{\partial t^m}$$

zachovává kontinuitu, jest vířením jistého vektoru „u", tak že

$$\sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m u}{dt^m} = W_y - V_z$$

$$\sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m v}{\partial t^m} = U_z - W_x \,. \qquad \sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m U}{\partial t^m} = curl\ u.$$

$$\sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m w}{\partial t^m} = V_x - U_y$$

Tyto rovnice odvodil po prvé prof. F. Koláček ve svém spise: „Theorie der Fortpflanzung des Lichtes in anisotropen Medien in induktiver Darstellung", vydaném r. 1897 v publikacích Král. české učené společnosti.

Rovnice Koláčkovy zachovají svou formu, když se kříž souřadnicový otočí. Takové otočení závisí na třech na sobě nezávislých konstantách. Princip relativnosti praví, že rovnice ty nesmí změniti svou formu, když se podrobí širší transformaci t. zv. Lorentzově, jež obsahuje víc konstant než pouhé otočení kříže. Tento přebytek konstant slibuje další vybroušení rovnic Koláčkových. Provedu je nejprvé způsobem trochu rozvláčným (proti elegantní methodě Minkovského), ale velmi průhledným.

Užití principu relativnosti. Zachovává-li vektor U kontinuitu, platí čtyři relace

$$\sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m U}{\partial t^m} = curl\ u$$

$$0 = div\ U,$$

kde α_m jsou funkcí času. Že rovnice ty srovnávají se s principem relativnosti, znamená, že zachovají svou formu, když zavedeme nové proměnné transformací

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \alpha z + \beta t, \quad t' = \beta z + \alpha t,$$

kde konstanty

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \beta = \frac{-q}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Chceme-li transformovati horní rovnice, třeba věděti, jak se změní derivace dle času a souřadnic. Derivace značím zase indexy, kde pak pro jakoukoliv funkci f

$$\begin{aligned} f_x &= f_{x'} \\ f_y &= f_{y'} \\ f_z &= \alpha f_{z'} + \beta f_{t'}. \end{aligned}$$

Vyšší derivace dle souřadnic se v rovnicích nevyskytují. Ale derivace dle času vyskytují se i vyšší; jest pak

$$\begin{aligned} f_t &= \beta f_{z'} + \alpha f_{t'} \\ f_{tt} &= \beta^2 f_{z'z'} + 2\alpha\beta f_{z't'} + \alpha^2 f_{t't'} \\ f_{ttt} &= \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Tečkováním naznačení členové obsahují derivace $f_{z'z'z'}$; $f_{z'z't'}$; atd. i ještě vyšší.

Všimněme si nejprvé transformace levých stran prvních tří rovnic. Obecně bude

$$\sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m U}{\partial t^m} = \alpha_0 U + \alpha_1 (\beta U_{z'} + \alpha U_{t'}) + \alpha_2 (\beta^2 U_{z'z'} + \ldots) + \ldots$$

Všechny čtyři transformované rovnice zní proto:

$$\begin{aligned} \alpha_0 u + \alpha_1 (\beta u_{z'} + \alpha u_{t'}) + \alpha_2 (\beta^2 u_{z'z'} + \ldots) + \ldots \\ = W_{y'} - (\alpha V_{z'} + \beta V_{t'}), \\ \alpha_0 v + \alpha_1 (\beta v_{z'} + \alpha v_{t'}) + \alpha_2 (\beta^2 v_{z'z'} + \ldots) + \ldots \\ = (\alpha U_{z'} + \beta U_{t'}) - W_{x'}, \\ \alpha_0 w + \alpha_1 (\beta w_{z'} + \alpha w_{t'}) + \alpha_2 (\beta^2 w_{z'z'} + \ldots) + \ldots = V_{x'} - U_{y'} \\ 0 = u_{x'} + v_{y'} + \alpha w_{z'} + \beta w_{t'}. \end{aligned}$$

Platí-li princip relativnosti, lze kombinací těchto čtyř rovnic odvoditi čtyři rovnice rovnocenné, jež mají formu původních. Zejména musí se objeviti znova rovnice kontinuity

$$0 = u'_{x'} + v'_{y'} + w'_{z'}, \qquad div\ U' = 0.$$

jež neobsahuje derivaci dle proměnné t', dle času. Rovnice tanemůže vzniknouti z tří prvých, ježto neobsahují společných derivací dle času, jež by se mohly navzájem zrušiti. Takové derivace jsou jen v obou posledních rovnicích. Má-li se pomocí třetí rovnice odstraniti $w_{t'}$ z relace čtvrté, tak, aby vznikl tvar

$$div\ U' = 0,$$

nesmí se v třetí rovnici objeviti ani prosté w, ani $w_{z'z'}$ a vyšší derivace, t. j. všechna α_m vyjma α_1 jsou rovna nulle. Tuto funkci času lze pak hned v původních rovnicích převésti na druhou stranu a kontrahovati s vektorem „u". Původní rovnice zní pak

$$\frac{\partial U}{\partial t} = curl\, u,$$

$$0 = div\, U,$$

což jest forma rovnic Maxwellových, o nichž princip relativnosti platí. Odvoláním na tyto rovnice ušetříme si další počítání.

Druhé odvození užívá principu relativnosti v duchu H. Minkowského, tak jak jej naznačil v pojednání: „Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern". Král. uč. spol. v Gottinkách 1907. Princip relativnosti znamená:

Zavedeme-li místo čtyř proměnných x, y, z, t do rovnic, jež snesou libovolné otočení souřadnic čtyři nové proměnné

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = it,$$

kde i jest imaginární jednotkou, t. j.

$$i = \sqrt{-1},$$

lze odvisle proměnné v differenciálních rovnicích označiti pomocí indexů 1, 2, 3, 4 *tak, že cyklickou záměnou těehto indexů rovnice se nezmění. — Důsledkem toho jest, že z jedné rovnice lze pouhou záměnou indexů dostati tři další.*

Chceme-li methodou Minkowského z rovnice kontinuity vyvoditi tři další, třeba rozvážiti, jak v rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0$$

nahradíme složky indexy. Že „u" přísluší „1" atd., nebude nikdo popírati. Ale ještě celé rovnici přísluší index „4" právě proto, že v ní derivace dle času *schází.* Nahradíme tedy rovnici kontinuity vztahem

$$\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} = 0.$$

Z toho dostaneme nyní tři další rovnice permutací indexů. Máme pak celkem čtyři rovnice, jež píšu (jako Minkowski) s prázdnou diagonálou:

$$
\begin{array}{lllll}
 & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + & \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + & \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} & = 0 \\
\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} & & + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + & \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} & = 0 \\
\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + & \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} & & + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} & = 0 \\
\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + & \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + & \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} & & = 0.
\end{array}
$$

Náleží tedy k rovnici kontinuity pro princip relativnosti tři další rovnice také obsahující tři derivace. V každé schází derivace dle jedné souřadnice. Nejjednodušší takové rovnice jsou ty, jež vyjadřují kontinuitu časového vzrostu daného vektoru, rovnice, jež praví, že vektor u_t, v_t, w_t víří; napíšeme je v anullované formě, aby se přiblížily relacím Minkowského:

$$
\begin{array}{llll}
 & - W_y + V_z + u_t = 0 & & \\
+ W_x & \quad - U_z + v_t = 0 & & - curl\, u + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \\
- V_x + U_y & \quad\quad + w_t = 0 & & \\
- u_x - v_y - w_z & \quad\quad = 0 & & - div\, U = 0.
\end{array}
$$

Rovnici kontinuity třeba připsati, poněvadž nejen vektor „U_t“, již vektor „U“ sám zachovává kontinuitu. Obrátili jsme znamení, aby vystoupila v rovnicích ukrytá symmetrie. Nyní zavedeme nové proměnné x_1 x_2 x_3 x_4. Obecně jest

$$f_x = f_{x_1}, \quad f_y = f_{x_2}, \quad f_z = f_{x_3}, \quad f_t = i f_{x_4},$$

následkem čeho horní relace přejdou v

$$
\begin{array}{lllll}
 & - \frac{\partial W}{\partial x_2} + & \frac{\partial V}{\partial x_3} & + i \frac{\partial u}{\partial x_4} & = 0 \\
+ \frac{\partial W}{\partial x_1} & & - \frac{\partial U}{\partial x_3} & + i \frac{\partial v}{\partial x_4} & = 0 \\
- \frac{\partial V}{\partial x_1} + & \frac{\partial U}{\partial x_2} & & + i \frac{\partial w}{\partial x_4} & = 0 \\
- \frac{\partial u}{\partial x_1} - & \frac{\partial v}{\partial x_2} - & \frac{\partial w}{\partial x_3} & & = 0.
\end{array}
$$

Důkaz, že tato soustava vyhovuje principu relativnosti, záleží v tom, že quadratické schema

$$\begin{matrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 \end{matrix}$$

může nahraditi quadratické schema

$$\begin{matrix} 0 & -W & +V & +u \\ +W & 0 & -U & +v \\ -V & +U & 0 & +w \\ -u & -v & -w & 0. \end{matrix}$$

To se stane, položíme-li obecně

$$f_{hk} = -f_{kh},$$

čímž už je řečeno, že $f_{hh} = 0$.

Dříve již stanoveno, že

$$u = f_{41}, \qquad v = f_{42}, \qquad w = f_{43};$$

nyní zavedeme ještě, že

$$U = i f_{32}, \qquad -V = i f_{31}, \qquad W = i f_{21}.$$

Tím proveden důkaz, že již tato nejjednodušší soustava vyhovuje principu relativnosti.

Nahradí-li se rovnice kontinuity vztahem

$$div \sum_{m=1} \alpha_m \frac{\partial^{m-1} U}{\partial t^{m-1}} = 0,$$

vede parallelní úvaha k relacím

$$\sum_{m=1} \alpha_m \frac{\partial^m U}{\partial t^m} = curl\, u.$$

Tyto tři rovnice shodují se s Koláčkovými až na to, že jediné α rovná se nulle — právě první — totiž α_0, jehož součinitelem je prostý vektor „U“ sám, když hodnoty α_m jsou konstanty na čase nezávislé.

Rovnice

$$\frac{\partial U}{\partial t} = curl\, u,$$

$$0 = div\, U,$$

platící o každém vektorovém poli, jež zachovává kontinuitu, jsou důsledkem methody, jakou stanovíme čas. Obsahují poučení o čase, ne o vektorovém poli. Informaci o něm lze uložiti jen ve sdělení o poměru vektoru „U“ k vektoru „u“. Tato sdělení nelze vypočítati; jsou povahy experimentální. V těch je reálné, přírodopisné vědění o vektorovém poli.

Příkladem na větu, že rovnice vektorového pole, jež zachovává kontinuitu, zní:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = curl\, u; \qquad div\, U = 0$$

jest propracování Koláčkovy optiky. Provedl jsem je*); souhlasí celkem s jeho výsledky až na to, že v nejobecnějších rovnicích pro absorbující krystall jest o 6 soujemných funkcí barvy méně, než ve (stažených) rovnicích Koláčkových. — Zároveň je tím prokázáno, že *princip relativnosti nelze vyvrátiti pokusy na absorbujících dvojlomných krystallech, ustředích opticky aktivních, magnetisovaných neb proudících ani kombinací těchto optických subtilností.* Snaha zjednati si jasnost o principu relativnosti vedla mě k zkoumání jeho na optice Koláčkově, které důvěřovati musíme, poněvadž se osvědčila. Z přípravných kroků k této práci vzniklo toto malé pojednání.

Rovnice obecného pole vektorového. Zdá se na první pohled, že pro obecné pole vektorové nelze dostati žádné rovnice z principu relativnosti. Ale myšlenka, že vektor *ne*zachovává kontinuitu, dá se vyjádřiti rovnicí; když

$$u_x + v_y + w_z \neq 0,$$

tedy jest

$$u_x + v_y + w_z = \varrho,$$

rovno nějaké funkci času a polohy. Z této relace lze pomocí principu relativností získati tři další.

Jednoduchým obratem převedeme nový úkol na již řešený. Nahradíme funkci ϱ jinou P definovanou differenciální rovnicí

$$\Delta P = \varrho;$$

*) Uveřejním jindy. Ve sraženém naznačování nepřišla by theorie k oné platnosti, jež jí přísluší.

odečteme-li tuto rovnici od horní, vyjde:

$$\frac{x}{\partial x}(u - P_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v - P_y) + \frac{\partial}{\partial z}(w - P_z) = 0.$$

Z toho plyne:

1. Vektor, jehož složky jsou

$$u - P_x, \qquad v - P_y, \qquad w - P_z,$$

víří, t. j. libovolný, obecný vektoru

$$\begin{aligned} u &= P_x + W_y - V_z \\ v &= P_y + U_z - W_x \qquad\qquad U = grad\, P + curl\, u \\ w &= P_z + V_x - U_y \\ \varDelta P &= u_x + v_y + w_z \qquad div\, grad\, P = div\, U. \end{aligned}$$

Lze tedy obecný vektor složiti aditivně z víření a gradientu onoho potentiálu, jenž má divergenci tutéž jako vektor původní.

2. Poněvadž vektor

$$u - P_x, \qquad v - P_y, \qquad w - P_z$$

zachovává kontinuitu, platí o něm vše, co jsme dříve vyvodili. Z principu relativnosti plyne, že vyhovuje rovnicím

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u - P_x) &= W_y - V_z \\ \frac{\partial}{\partial t}(v - P_y) &= U_z - W_x \qquad \frac{\partial}{\partial t}(U - grad\, P) = curl\, u \\ \frac{\partial}{\partial t}(w - P_z) &= V_x - U_y \end{aligned}$$

$$u_x + v_y + w_z = \varDelta P = \varrho.$$

Rovnice ty lze ještě trochu upraviti; položme funkci

$$\frac{\partial P}{\partial t} = R;$$

pak jest

$$\begin{aligned} u_t &= W_y - V_z + R_x \\ v_t &= U_z - W_x + R_y \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = curl\, u + grad\, R. \\ w_t &= V_x - U_y + R_z \end{aligned}$$

Relace tyto mohli jsme arci napsati rázem. Praví, že o vektoru u_t, v_t, w_t zhola nic nevíme! Praví, že to jest obecný vektor složený z víření a gradientu potentiálového. Rozložíme-li ještě víření na dvě části, kladouce

$$\begin{aligned} U &= X + L \\ V &= Y + M \qquad u = x + l \\ W &= Z + N \end{aligned}$$

ukáže se, že

$$\begin{aligned} u_t - Z_y + Y_z &= N_y - M_z + R_x \\ v_t - X_z + Z_x &= L_z - N_x + R_y \\ w_t - Y_x + X_z &= M_x - L_y + R_z \end{aligned}$$

což lze psáti v symbolech

$$\frac{\partial U}{\partial t} - curl\, x = curl\, l + grad\, R.$$

Výraz v pravo jest ale obecný vektor, poněvadž se skládá z víření a gradientu potentiálového. Nazveme-li složky jeho a, b, c, lze psáti

$$\begin{aligned} u_t - Z_y + Y_z &= a \\ v_t - X_z + Z_x &= b \qquad \frac{\partial U}{\partial t} - curl\, x = A \\ w_t - Y_x + X_y &= c \\ u_x + v_y + w_z &= \varrho \qquad div\, U = \varrho. \end{aligned}$$

Zavedením vektoru a, b, c neztratíme souvislost s principem relativnosti. Že pro tuto soustavu platí, lze ukázati způsobem Minkowského. Levé strany lze obsaditi indexy jako dříve a v pravo se zavede s_1, s_2, s_3, s_4, čímž vznikne soustava rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} &= s_1 \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} &= s_2 \\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} &= s_3 \\ \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} &= s_4. \end{aligned}$$

Souměrnost těchto rovnic dle čtyř indexů 1, 2, 3, 4 zaručuje, že o nich platí princip relativnosti.

Rovnice odvozené mají jistý zájem filosofický. Kdo vidí na př. složité rovnice Maxwellovy

$$4\pi kX + \frac{K}{V^2} X_t = M_z - N_y$$

$$4\pi kY + \frac{K}{V^2} Y_t = N_x - L_z$$

$$4\pi kZ + \frac{K}{V^2} Z_t = L_y - M_x$$

zajisté bude se ptáti, jak se dokazují z empirického vědění o elektřině. Ale na formě rovnic samotné není nic „elektrického“ ani „magnetického“. Že proud Joule-ův, Maxwellův a síla magnetická souvisí takovými rovnicemi, netřeba vůbec dokazovati. To je důsledkem principu relativnosti, t. j. naší definice času. Přírodopisné myšlenky vlastní jsou v rovnici jen dvě: že vektor a, b, c definovaný dle principu relativnosti rovnicemi

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{K_x}{V^2} + curl\, l = A$$

jest úměrný vektoru X, Y, Z samotnému a že vektor L, M, N jest samostatný vůči X, Y, Z.

Že tyto úvahy nejsou jen hraním se symboly, za to ručí Koláčkova optika, která mi k nim dala popud. Že mohou vésti ještě dále, ukáži odvozením rovnic pro vektor gravitační; ten nezachovává kontinuitu, leč ve vakuu. Je tedy

$$a_x + b_y + c_z = \varrho,$$

kde a, b, c jsou složky gravitačního vektoru, ϱ je úměrno hustotě. Takovou rovnici dostaneme ještě jednu ze zákona zachování hmoty. Jsou-li u, v, w složky rychlosti hmoty, jest

$$(\varrho u)_x + (\varrho v)_y + (\varrho w)_z + \varrho_t = 0.$$

Z těchto dvou rovnic plyne, že

$$(a_t - \varrho u)_x + (b_t - \varrho v)_y + (c_t - \varrho w)_z = 0,$$

t. j. vektor

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \varrho U$$

zachovává kontinuitu. Takový vektor ale víří, z čehož plyne, že

$$\begin{aligned} a_t - \varrho u &= W_y - V_z \\ b_t - \varrho v &= U_z - W_x \\ c_t - \varrho w &= V_x - U_y \\ \varrho &= a_x + b_y + c_z. \end{aligned}$$

Tyto relace nalezl jsem kdysi jako student. Neuveřejnil jsem jich však, poněvadž jsem je měl za bezvýznamné. Nyní je uveřejňuji, poněvadž vyhovují principu relativnosti. Mají tvar rovnic dříve nalezených, ale víme ještě něco víc o vektoru obecném, jenž do rovnic vstoupí — Je úměrný rychlosti hmoty.

Druhá serie rovnic, obsahující u_t, v_t, w_t, musí se odvoditi z mechaniky k principu relativnosti náležející.

O geometrických a fysikálních methodách k určení parallaxy sluneční.

Dr. **Karel Vodička.**

(Pokračování.)

Měření heliometrická. Vedle pozorování rektascensí a deklinací možno měřiti posiční úhly planety a její distanci, při čemž doporučuje se užívati heliometru (*Gill* 1877) hlavně za příčinou přesnějšího měření větších distancí. Z theorie pohybu planety stanovíme efemeridu geocentrických souřadnic planety (a, d) a z ní pomocí přibližně známé parallaxy p vypočteme efemeridu míst zdánlivých (a', d'). Jsou-li souřadnice hvězdy S (α, δ), a považujeme-li za předmět měření distanci Δ' mezi hvězdou a planetou a úhly π, σ, jichž arithmetický střed označíme M'_0 (obr. 5.), plyne ze druhé a čtvrté *Gaussovy* analogie

$$\sin \frac{\Delta'}{2} \sin M'_0 = \sin \frac{a' - \alpha}{2} \cos \frac{d' + \delta}{2} = \nu' \qquad (34)$$

$$\sin \frac{\Delta'}{2} \cos M'_0 = \cos \frac{a' - \alpha}{2} \sin \frac{\delta - d'}{2} = \mu'$$