O promětnosti cyklické.

Sděluje

Emil Weyr.

1. Buďtež dány dva soumístné promětné útvary prvořadé U U' na př. dvě souosé promětné řady bodové. Každý prvek dlužno považovati jednou co příslušný útvaru U a podruhé co příslušný útvaru U'; v případě prvním budiž označen písmenou x a v druhém písmenou y'. Prvku x útvaru U přiřaděn promětností prvek x' útvaru U' a prvku y' dle téhož zákona prvek y v útvaru U. Ze všech elementů vyznamenány jsou dva: e, f, co elementy samodružné čili dvojné, z nichž každý sobě přísluší, tak totiž, že prvek e' splývá s e a prvek f' s f. Dva sdružené prvky xx' určují s elementy dvojnými $e\,f$ dvojpoměr $(ef\,x\,x')$ stálé hodnoty k*); jest-li $k = -1$, tvoří $efxx'$ soustavu harmonickou a veškeré páry xx' tvoří involuci.**) Splyne-li x' s prvkem x, máme $(efxx') = +1$, tedy $k = +1$, tak že v tomto případu každý element splývá s příslušným mu prvkem a oba útvary se úplně kryjí.

2. Z daného vztahu promítavého lze následujícím spůsobem vyvoditi celou řadu obdobných relac. Zvolme sobě libovolný prvek soumístných útvarů UU' a počítajíce jej do útvaru U nazveme jej x. Sestrojme nyní příslušný jemu element x' v útvaru U'; tento obdobně považujme za element útvaru U a sestrojme příslušný mu element x'' v útvaru U'; k elementu x'' sestrojme co k elementu útvaru U příslušný element x''' útvaru U' a t. d., až konečně dospějeme po n obdobných konstrukcích k elementu $x^{(n)}$, čímž obdržíme řadu prvků

$$x\ x'\ x'' \ldots . x^{(n)},$$

z kterýchž každému, přičítáme-li jej útvaru U, přiřaděn následující co promětně příslušný v útvaru U'. Pohybuje-li se x veškerými polohami, pak $x'\ x'' \ldots$ mění své polohy a jelikož soustava (útvar) prvků x jest promětná se soustavou příslušných prvků x', tato opět se soustavou prvků x'' a t. d., tedy

*) Viz: „Základové vyšší geometrie", díl I. článek 33.

**) l. c. článek 45.

jest každá z těchto soustav ve vztahu promětnosti s každou jinou z těchto soustav, zejmena jest soustava x promětná se soustavou $x^{(n)}$. *) (Tvoří-li oba promětné útvary involuci, tu splyne x'' s x, pročež se patrně skládá celá hořejší řada prvků pouze z $x\ x'$, kteréž elementy se opakují: $xx'xx'$.....) Vyjděme opět od téhož elementu x, ale přičtěmež jej k útvaru U′ a tu budiž x_1 příslušný mu prvek v útvaru U; prvku x_1 nechť odpovídá v útvaru U prvek x_2, tomuto opět v útvaru U prvek x_3 a t. d. až po m-té konstrukci dojdeme k prvku x_m, čímž obdržíme řadu:

$$x\,x_1\,x_2\,\ldots.\,x_m,$$

v kteréž každému elementu, počítáme-li jej k útvaru U′, přísluší následující element v útvaru U. I zde jest patrno, že soustava prvků x jest promětná se soustavou prvků x_m a vůbec soustava prvků x_i se soustavou prvků x_k $(o < i < k < m)$.

Jelikož soustava $x^{(n)}$ jest promětna se soustavou x a tato opět se soustavou x_m, budou i soustavy prvků $x_m\ x^{(n)}$ promětnými; t. j. odvodíme-li z libovolných čtyř prvků: x, y, z, w, konstrukcemi prvního druhu (směru) elementy $x^{(n)}\ y^{(n)}\ z^{(n)}\ w^{(n)}$ a obdobně konstrukcemi druhého druhu elementy $x_m\ y_m\ z_m\ w_m$, bude

$$(x_m\ y_m\ z_m\ w_m) = (x^{(n)}\ y^{(n)}\ z^{(n)}\ w^{(n)}).$$

Probíhá-li prvek x útvar U, vytvořuje x' útvar U′ promětný a soumístný s útvarem U, obdobně vytvořují $x''\ x'''\ldots.\,x^{(n)}$ útvary U″ U‴.... $U^{(n)}$ a prvky $x_1\ x_2\ x_3\ldots.\,x_m$ vytvořují útvary $U_1\ U_2\ U_3\ldots.\,U_m$; veškeré tyto soustavy jsou soumístné a promětné, což lze naznačiti symbolicky:

$$U_m\pi U_{m-1}\pi\ldots.\ U_3\,\pi\,U_2\,\pi\,U_1\,\pi\,U\,\pi\,U'\,\pi\,U''\,\pi\,U'''\ldots.\ U^{(n-1)}\pi U^{(n)}$$

Všecky tyto promětné útvary mají společné elementy dvojné; neb, jest-li e dvojný element útvarů U U′, tu splývá e s prvkem e', pročež e'' splyne s e, taktéž e''' a t. d., a tudíž v sobě zahrnuje prvek e veškeré prvky $e^{(i)}$ $(i < n)$ a taktéž veškeré prvky $e_{(i)}$ $(i < m)$.

„Dvojné elementy $e\ f$ obou původních promětných útvarů U U′ jsou též samodružnými pro odvozené promětné útvary $U_m\ U^{(n)}$“.

*) l. c. článek 21.

3. Nazveme-li stálou hodnotu k dvojpoměru $(efxx')$ charakteristickým dvojpoměrem útvarů U U′, tož patrno, že každé dvě bezprostředně po sobě jdoucí hořejší řady mají týž charakteristický dvojpoměr k. Naznačíme-li písmenami $\xi\, \xi'\, \xi'' \ldots\ldots \xi_1\, \xi_2 \ldots\ldots$ poměry prvků $x\, x'\, x'' \ldots\ldots x_1\, x_2 \ldots\ldots$ vzhledem k základním prvkům $e f$, máme $k = (efxx') = (efx'x'') = (efx''x''') \ldots\ldots (efx^{(n-1)}x^{(n)})$ aneb

$$k = \frac{\xi}{\xi'} = \frac{\xi'}{\xi''} = \frac{\xi''}{\xi'''} = \ldots\ldots \frac{\xi^{(n-1)}}{\xi^{(n)}}.$$

Obdobně jest $(efxx_1) = (efx_1 x_2) = (efx_2 x_3) \ldots\ldots = (efx_{n-1}x_n)$. Jelikož prvku x co elementu útvaru U′ odpovídá prvek x_1 útvaru U, jest $(efx_1 x) = k$ aneb, jelikož $(efx_1 x) = 1 : (efxx_1)$, $(efxx_1) = \frac{1}{k}$ a tudíž:

$$\frac{1}{k} = \frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\xi_2}{\xi_3} = \ldots\ldots \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}.$$

Z rovnic těchto plyne bezprostředně

$$\begin{aligned} \xi_1 &= k\xi \\ \xi_2 &= k\xi_1 = k^2\xi \\ \xi_3 &= k\xi_2 = k^3\xi \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= k\xi_{n-1} = k^n\xi, \end{aligned}$$

a právě tak obdržíme z rovnic předcházejících

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{\xi}{k} \\ \xi'' &= \frac{\xi'}{k} = \frac{\xi}{k^2} \\ &\ldots\ldots \\ \xi^{(n)} &= \frac{\xi}{k^n}. \end{aligned}$$

Chceme-li nyní sestrojiti charakteristický dvojpoměr k_{il} libovolných dvou útvarů $U_i\ U_l$ $(i > l)$, připomeňme sobě, že

$$k_{il} = (efx_i x_l) = \frac{\xi_i}{\xi_l} = \frac{k^i\xi}{k^l\xi} = k^{i-l}.$$

Právě tak obdržíme pro charakteristický dvojpoměr $k^{(i'l')}$ tvarů $U^{(i')}\ U^{(l')}$ $(i' < l')$:

$$k^{(i'l')} = (efx^{(i')}x^{(l')}) = \frac{\xi^{(i')}}{\xi^{(l')}} = \frac{\xi}{k^{i'}} : \frac{\xi}{k^{l'}} = k^{l'-i'};$$

charakteristický dvojpoměr $k_i^{(l')}$ útvarů U_i $U^{(l')}$ jest obdobně:

$$k_i^{(l')} = (ef x_i x^{(l')}) = \frac{\xi_i}{\xi^{(l')}} = k^i \xi : \frac{\xi}{k^{l'}} = k^{i+l'},$$

zejména jest tedy:

$$k_m^{(n)} = k^{m+n}.$$

Veškeré tyto případy shrnouti můžeme v jediný, řkouce: charakteristický dvojpoměr libovolných dvou útvarů z řady U_m $U_{m-1} \ldots . U_1\ U\ U'U'' \ldots . U^{(n)}$ má hodnotu k^{p+1}, jest-li p počet útvarů této řady ony dva útvary od sebe oddělujících.

4. Splyne-li v a element x s elementem x_n, pak se vyskytnou v útvarech $U\ U_n$ tři dvojné prvky, totiž e, f, a, a tu musí (viz: Základové vyšší geometrie, I. díl, článek 31.) každý prvek býti samodružným t. j. řada prvků $x\ x_1\ x_2 \ldots . x_n$ jest vždy n-tým prvkem uzavřena ($x_n \equiv x$).

„Přihodí-li se jednou, že element x_n splyne s elementem x, pak se to přihodí vždy“.

Promětný vztah tohoto druhu nazýváme „cyklickým“. Každý prvek x určuje celou skupinu n prvků, $x\ x_1\ x_2 \ldots . x_{n-1}$, z kterýchž každý přísluší promětně předcházejícímu; prvku x_{n-1} přísluší opět x. Řadu v skupině obsaženou můžeme každým z prvků jí přináležejících započíti a proběhnouti v jednom i druhém směru; ku př. vyjdeme-li od elementu x_3 skupiny hořejší, obdržíme řadu $x_3\ x_4\ x_5 \ldots . x_{n-1}\ x x_1 x_2$ v jednom, a řadu $x_3\ x_2\ x_1\ x x_{n-1}\ x_{n-2} \ldots . x_5\ x_4$ ve směru opačném. Vždy ale, začneme-li jedním (kterýmkoli) prvkem skupiny, zůstáváme ve skupině té, probíhajíce vždy jen tytéž prvky téže skupiny.

„Cyklická promětnost se tudíž skládá z nekonečného množství skupin n-prvkových, z kterýchžto každá jest *úplně* stanovena, dán-li jeden z její prvků“.

5. Jelikož v případu cyklické promětnosti musí $\xi_n = \xi$ t. j. $k^n \xi = \xi$, máme $k^n = 1$ aneb $k = \sqrt[n]{1}$. Pro $k = +1$ obdrželi bychom totožnost $x \equiv x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots$ a v případu, že n jest číslo sudé a $k = -1$ měli bychom involuci: $\xi_1 = -\xi$, $\xi_2 = \xi$, $\xi_3 = -\xi \ldots .$ t. j. $x_1 \equiv x_3 \equiv x_5 \equiv \ldots$, $x \equiv x_2 \equiv x_4 \equiv \ldots .$ Hodnota k bude tedy jedním z pomyslných kořenů n-tého stupně z kladné jedničky.

Položíme-li: $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n} = \mu$,

obdržíme pro poměry (parametry) elementů skupiny určené elementem x parametru ξ hodnoty:

$$\xi,\ \mu\xi,\ \mu^2\xi,\ \mu^3\xi, \ldots \mu^{n-1}\xi.$$

Označíme-li absolutní hodnotu $\sqrt[n]{\lambda}$ písmenou ξ, pak jsou hodnoty ξ, $\mu\xi, \ldots \mu^{n-1}\xi$ veškeré n-té kořeny z λ, tak že tedy řešením rovnice

$$\xi^n = \lambda$$

obdržíme parametry jedné skupiny cyklické prométnosti. Projde-li λ veškeré hodnoty reálné, obdržíme z poslední rovnice veškeré skupiny naší prométnosti. Dvojným prvkům e, f, odpovídají hodnoty 0, ∞ parametru ξ.

6. Pojem cyklické prométnosti lze rozšířiti i na soumístné útvary dvoj- a trojnásobně nekonečné (druhořadé a třetiřadé) a tu lze snadno dokázati následující všeobecnou větu, platící jak pro případy právě uvažované (útvary prvořadé) tak i pro útvary druho- i třetiřadé:

„Máme-li dva prométné soumístné útvary a uzavře-li se řada, kterou obdržíme, sestrojivše k prvku x příslušný x_1, k tomuto příslušný $x_2 \ldots$ *jednou*, t. j. přihodí-li se, že na př. prvek x_n s prvkem x splývá, pak se totéž *vždy* přihodí, tak že, vyjdeme-li z elementu kteréhokoli co elementu x, vždy element x_n v řadě $x\, x_1\, x_2 \ldots . x_{n-1}\, x_n$ splyne s prvkem x."

Obdržíme takovým spůsobem *prométnost cyklickou* s n-prvkovými soustavami v sobě uzavřenými.

Důkaz: Uvažme zprvu, že skupina uzavřená $x\, x_1\, x_2 \ldots . x_{n-1}$, jejížto existenci předpokládáme, zahrnuje v sobě n prvků samodružných pro ony dva prométné útvary U U_n, pro které jsou x a x_n prvky sobě příslušné; neb vyjdeme-li od kteréhokoli prvku oné soustavy co prvku x, vždy se k tomutéž elementu vrátíme co k elementu $x_n \equiv x$. Skupina zahrnující v sobě n prvků dává tudíž skutečně podnět k n samodružným elementům útvarů U U_n. Soumístné tyto útvary mají však a priori dva, tři, neb čtyry samodružné elementy dle toho, jsou-li prvo-, druho- neb třetiřadé (Viz: Základové vyšší geometrie, I. díl, čl. 31., III. díl, čl. 57. a čl. 100); máme tudíž celkem $n+2$, $n+3$,

$n+4$ samodružné elementy dle toho, jsou-li útvary prvo-, druho- neb třetiřadé. Jelikož však útvary ty se ztotožní, jakmile se vyskytnou elementy samodružné resp. v počtu tří, čtyr, pěti, (l. c.), soudíme, že útvary U U_n jsou totožnými, t. j. že *vždy* splyne element x_n s elementem x, jak v uvedené větě tvrzeno.

7. „Cyklická prométnost s trojčlennými skupinami v útvarech prvořadých jest úplně určena, známe-li jednu skupinu."

Jest-li $a\ b\ c$ skupina, dostačí prvkům $a\ b\ c$ přiřaditi prvky $b\ c\ a$ co prométně příslušné; vztah jest pak úplně určen třemi páry ab, bc, ca prvků příslušných.

Jsou-li $\alpha\ \beta\ \gamma$ parametry prvků $a\ b\ c$ a zní-li rovnice prométnost stanovící (Viz Zákl. vyš. geom. I. díl, čl. 60.)

$$A\xi\xi' + B\xi + C\xi' + D = 0, \quad \ldots \quad (1)$$

máme pro neznámé koefficienty A B C D tři rovnice:

$$\left.\begin{aligned} A\alpha\beta + B\alpha + C\beta + D = 0 \\ A\beta\gamma + B\beta + C\gamma + D = 0 \\ A\gamma\alpha + B\gamma + C\alpha + D = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

z nichž lineárným spůsobem lze určiti hodnoty $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$; položíme-li k vůli stručnosti

$$\alpha + \beta + \gamma = s_1,$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = s_2,$$
$$\alpha\beta\gamma = s_3,$$

obdržíme sečtěním oněch rovnic ihned:

$$As_2 + (B + C)\, s_1 + 3D = 0;$$

násobíme-li ony rovnice po pořadě hodnotami γ, α, β, a sečteme-li, bude:

$$3As_3 + (B + C)\, s_2 + Ds_1 = 0.$$

Poslední dvě rovnice určují hodnoty:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{D} = \frac{s_1{}^2 - 3s_2}{s_2{}^2 - 3s_1 s_3} \\ \frac{B+C}{D} = \frac{9s_3 - s_1 s_2}{s_2{}^2 - 3s_1 s_3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Z rovnice (1) plyne pro dvojné prvky kvadratická rovnice:

$$A\xi^2 + (B + C)\,\xi + D = 0,$$

aneb dle (3):

$$(s_1{}^2 - 3s_2)\,\xi^2 + (9s_3 - s_1 s_2)\,\xi + (s_2{}^2 - 3s_1 s_3) = 0 \ldots (4)$$

Chceme-li určiti hodnoty $\frac{B}{D}, \frac{C}{D}$, tuť nutno přímé řešení rovnic (2), z nichž jednoduchým spůsobem plyne:

$$\left.\begin{aligned}\frac{B}{D} &= \frac{3\alpha\beta\gamma - \alpha^2\beta - \beta^2\gamma - \gamma^2\alpha}{s_2{}^2 - 3s_1 s_3} \\ \frac{C}{D} &= \frac{3\alpha\beta\gamma - \alpha\beta^2 - \beta\gamma^2 - \gamma\alpha^2}{s_2{}^2 - 3s_1 s_3}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (3')$$

tak že rovnice (1) přejde v následující:

$$(s_1{}^2 - 3s_2)\,\xi\xi' + (3s_3 - \alpha^2\beta - \beta^2\gamma - \gamma^2\alpha)\,\xi + (3s_3 - \alpha\beta^2 - \beta\gamma^2 - \gamma\alpha^2)\,\xi' + (s_2{}^2 - 3s_1 s_3) = 0. \quad . \; . \; . \quad (1')$$

8. Skupinu $a\,b\,c$ můžeme též určiti danou kubickou rovnicí:

$$m\alpha^3 + 3n\alpha^2 + 3p\alpha + q = 0, \quad . \; . \; . \quad (5)$$

považujeme-li kořeny $\alpha\ \beta\ \gamma$ za parametry prvků $a\ b\ c$, které skupinu tvoří. Pak máme:

$$s_1 = -\frac{3n}{m}, \quad s_2 = \frac{3p}{m}, \quad s_3 = -\frac{q}{m},$$

čímž rovnice (4) obdrží tvar:

$$(n^2 - mp)\,\xi^2 + (np - mq)\,\xi + (p^2 - nq) = 0. \, . \, . \quad (6)$$

„Rovnice (6) určuje samodružné elementy cyklické prométnosti určené skupinou trojprvkovou danou rovnicí (5)."

Z úvah článku pátého soudíme, že pro reálné samodružné elementy cyklické prométnosti každá skupina obsahuje jediný jen prvek reálný x, jest-li n číslo liché, a jen dva prvky reálné (x a vzhledem ku $e\ f$ harmonicky sdružený prvek x': $[efxx'] = -1$), jest-li n číslo sudé. Z toho plyne, že dvojné elementy musí býti vždy pomyslné, obsahuje-li skupina více než-li dva prvky reálné.

Skládá-li se tudíž trojina určená rovnicí (5) z členů vesměs reálných, bude míti rovnice (6) vždy kořeny imaginárné a naopak. Takovým spůsobem můžeme dospěti k známé relaci, vyjadřující reálnost či imaginárnost všech tří kořenů dané rovnice kubické (5); kořeny ty budou reálné či pomyslné, dle toho jest-li

$$(np - mq)^2 - 4\,(n^2 - mp)\,(p^2 - nq) \lesseqgtr 0 \quad . \; . \quad (7)$$

Rovná-li se levá strana nerovnosti (7) nulle, přejde jeden z obou případů v druhý, t. j. kubická rovnice (5) má dva stejné kořeny, které se rovnají jedinému kořenu $\frac{(mq-np)}{2(n^2-mq)}$ rovnice (6). O správnosti právě řečeného snadno se takto přesvědčíme. Dejme tomu, že z trojiny $a\ b\ c$ splyne a s b a zaveďme takový parameter, aby $\alpha=\beta=0$; pak máme $s_1=\gamma$, $s_2=0$, $s_3=0$ a rovnice pro elementy samodružné (4) zní v tomto případu: $\gamma^2\xi^2=0$ a má tudíž dva stejné kořeny, rovnající se též nulle. Oba elementy samodružné splývají tudíž s $(a\ b)$. Splynou-li $a\ b\ c$ v jediný element, bude i $\gamma=0$ a kořeny rovnice (4) t. j. samodružné elementy jsou pak úplně neurčity.

9. „Veškeré trojiny cyklické promětnosti tvoří kubickou involuci, v níž samodružné elementy promětnosti jsou elementy trojnými." Viz článek 5.

Veškeré trojiny určující tutéž promětnost, musí stanoviti tytéž elementy samodružné e, f. Zvolíme-li parameter tak, aby elementům dvojným $e\ f$ odpovídaly hodnoty 0, ∞, musí rovnice (6) splněna býti těmito hodnotami t. j. musí $p^2-nq=0$, $n^2-mp=0$, z čehož by plynulo $np=mq$ aneb $np-mq=0$. Rovnice $np-mq=0$ nesmí však platiti, any by pak kořeny rovnice (6) nebyly určité hodnoty 0, ∞, nýbrž hodnoty zcela libovolné. Musíme tudíž splniti podmínky $p^2-nq=0$, $n^2-mp=0$, aniž by $np-mq$ se rovnalo nulle. Toť patrně jen tím lze docíliti, že položíme $n=0$, $p=0$. Rovnice (5) přejde ve tvar

$$m\alpha^3+q=0,$$

aneb

$$\alpha^3=-\frac{q}{m}=\lambda,$$

kdež λ jest hodnota zcela libovolná; veškeré trojiny plynoucí z rovnice poslední tvoří však, jak známo, involuci kubickou, která má v elementech o parametrech 0, ∞ prvky trojné.

10. Budiž dána trojina bodů $a\ b\ c$ na libovolné kuželosečce K (obrazec nechť si čtenář sestrojí sám); skupinou $a\ b\ c$ určená promětnosť má body dvojné $e\ f$, kteréž následujícím známým spůsobem lze sestrojiti (Viz: Zákl. vyš. geom. II. díl čl. 32.). Bodům $a.b\ c$ odpovídají promětně body $b\ c\ a$ co $a'\ b'\ c'$; tedy $a'\equiv b$, $b'\equiv c$, $c'\equiv a$. Průseky přímek ab', $a'b$; bc', $b'c$; ca', $c'a$ nalezají se na přímce Σ, kteráž K protíná v dvojných bo-

dech e, f. Avšak přímky ab', bc', ca' jsou strany ac, ba, cb, v trojúhelníku abc a přímky $a'b$, $b'c$, $c'a$ jsou tečny T_b, T_c, T_a křivky K v bodech a, b, c. Přímka Σ spojuje tudíž průseky stran trojúhelníku abc s tečnami v protějších vrcholech. Jsou-li x x' libovolné dva body kuželosečky K dle cyklické prométnosti sobě příslušné, musejí přímky ax', $a'x$ procházeti týmž bodem osy Σ, obdobně i přímky bx', $b'x$; a konečně i cx', $c'x$ procházeti musejí týmž bodem přímky Σ. Spojíme-li tudíž libovolný bod o na přímce Σ s kterýmkoli z párů aa', bb', cc', obdržíme dvě přímky, které protnou K v dvou sobě prométně přiřaděných bodech. Z toho však plyne ihned:

„Přímky oa, ob, oc, spojující libovolný bod osy Σ s body trojiny a b c protínají K v bodech x y z novou trojinu tvořících.“

Označíme-li body b c a písmenami a' b' c', můžeme body z x y považovati za body x' y' z'. Promítneme-li body x y z z libovolného pevného bodu s na křivce K, obdržíme trojiny x y z paprskové cyklické prométnosti, jejížto samodružné paprsky E F procházejí průseky e, f křivky K s přímkou Σ. Jest-li K kruh a abc rovnostranný jemu vepsaný trojúhelník, bude Σ přímkou nekonečně vzdálenou, e, f budou body kruhovými v nekonečnu a veškeré trojúhelníky x y z jsou taktéž rovnostrannými. Paprsky x y z uzavírají na vzájem úhly 60 resp. 120 stupňů.

„Trojiny paprsků rozdělujících plný úhel (360°) kolem pevného bodu s na tři (šest) stejné díly tvoří cyklickou prométnost (kubickou involuci), pro nižto paprsky E, F směřující k nekonečně vzdáleným bodům kruhovým jsou elementy dvojnými (trojnými).“ (Viz: Zákl. vyš. geom. II. díl čl. 66).

11. „V cyklické prométnosti prvořadé skládající se ze skupin čtyrčlenných jsou tyto vždy složeny z čtyr prvků harmonických.“

Přiřkneme-li dvojným prvkům e, f parametry 0, ∞, plynou čtyry prvky skupinu tvořící dle článku 5. z rovnice

$$\xi^4 = \lambda.$$

Parametry plynoucí z všeobecné bikvadratické rovnice:

$$A\xi^4 + 4\,B\xi^3 + 6\,C\xi^2 + 4\,D\xi + E = 0$$

náležejí prvkům harmonickým, jest-li

$$ACE + 2\,BCD - AD^2 - EB^2 - C^3 = 0.$$

(Viz: Cremona, Úvod do geom. theorie křivek rovinných, vydání české čl. 6.). V případě hořejším rovnají se hodnoty B, C, D vesměs nulle, a jest tedy podmínečná rovnice vskutku splněna.

Budiž a, b, c, d libovolná skupina cyklické prométnosti, a nechť posloupně těmto elementům odpovídají $bcda$ co prvky $a' b' c' d'$ (tudíž $a' \equiv b$, $b' \equiv c$, $c' \equiv d$, $d' \equiv a$). Mysleme sobě prométnost opět co bodovou na kuželosečce K. Dvojné body e, f stanoví přímku Σ obsahující všeobecně průsek přímek xy', $x'y$, jsou-li xx', yy' libovolné dva páry bodů prométně sobě příslušných. Jelikož se přímka ac jeví jednou co ab' a po druhé co cd' a poněvadž průsek přímek ab', $a'b$ jakož i průsek přímek cd', $c'd$ na přímce Σ se nalézati musí, soudíme, že přímky $a'b$ a $c'd$ přímku ac v témž bodě protnouti musejí. Avšak $\overline{a'b}$ jest tečna B kuželosečky v bodě b a $\overline{c'd}$ jest tečna D v bodě d; tečny B, D procházejí tímtéž bodem přímky ac, z čehož plyne, že soustava bodů $abcd$ jest harmonická, a s. tak, že první bod a a třetí bod c jsou sdruženými a druhý b s čtvrtým d. (Viz: Zákl. II. díl čl. 35, str. 66.).

Právě tak a z týchž důvodů prochází přímka bd, (která jednou přímku $a'd$ a po druhé přímku bc' zastupuje) týmž bodem co tečny A ($\equiv ad'$), C ($\equiv cb'$), bodům a, c přináležející. (Sestrojení obrazce zůstavujeme opět čtenáři.) Označíme průsek tečen AC písmenou σ' a průsek tečen BD písmenou σ'' a konečně σ průsek přímek ac, bd; spojnice bodů σ', σ'' co pólů přímek ac, bd jest polára bodu σ a současně přímkou Σ protínající K v dvojných bodech e, f cyklické prométnosti. Z toho plyne, že body e, f jsou dvojnými body kvadratické involuce určené dvěma páry ac, bd:

„Každá skupina čtyrprvkové cyklické prométnosti se skládá z dvou párů harmonických prvků (ac, bd), kteréžto dva páry náleží do involuce kvadratické, jejížto dvojné elementy e, f jsou současně samodružné prvky cyklické prométnosti."

Trojúhelník $\sigma \sigma' \sigma''$ jest sdruženým vzhledem ku křivce K, takže z tří párů ac, bd, ef, každý z ostatních dvou týmž spůsobem vyplývá co pár dvojných prvků cyklické prométnosti ostatními dvěma páry stanovené.

Současně nalézáme:

„Čtyrprvková cyklická prométnost jest úplně určena, známe-li čtyry harmonické elementy ($acbd$) skupinu tvořící.“

Pro tutéž prométnost zůstává Σ, tudíž i σ pevným; ac, bd co strany sdruženého trojúhelníku $\sigma\, \sigma'\, \sigma''$ jsou sdruženými přímkami vzhledem ku křivce K a náleží tudíž kvadratické paprskové involuci, kterou K určuje v bodu σ co pár příslušných sobě paprsků, tvoříce s tečnami křivky K bodem σ procházejícími soustavu harmonickou (viz: Zákl. vyš. geom. II. díl čl. 38); tečny ty dotýkají se křivky K v bodech e, f:

„Páry sdružených přímek kuželosečky K, daným bodem σ procházejících, protínají křivku tu v čtyrbodových skupinách cyklické prométnosti, pro niž body dotyčné e, f tečen bodem σ procházejících, jsou body dvojnými.“

Jsou-li e, f body reálné, bude σ mimo kuželosečku umístěný bod, ze sdružených přímek ac, bd protne jen jedna křivku K v reálných bodech, tak že skupiny cyklické prométnosti se v tomto případu skládají z jednoho reálného a jednoho imaginárního páru; při pomyslných bodech e, f jest σ uvnitř K a každá skupina $abcd$ obsahuje čtyry reálné prvky.

Jsou-li e, f nekonečně vzdálené body křivky K, jest Σ nekonečně vzdálená přímka a σ co její pól jest středem; přímky ac, bd co sdružené, středem procházející přímky jsou dva sdružené průměry kuželosečky K:

„Sdružené průměry kuželosečky protínají křivku tu v čtyrbodových skupinách cyklické prométnosti, v nížto nekonečně vzdálené body jsou samodružnými.“

Přejde-li K v kruh, skládají se skupiny $abcd$ patrně z vrcholů čtverců kruhu vepsaných.

12. Je-li na kuželosečce K cyklická prométnost n-prvková a je-li $abcd\ldots p$ libovolná skupina bodů, z nichž každý prométně předcházejícímu přísluší, tak že body $bcd\ldots pa$ současně za body $a'\, b' \ldots p'$ považovati můžeme, pak se musí opět průseky přímek ab', $a'b$; bc', $b'c$; cd', $c'd$; ... všeobecně xy', $x'y$ nalézati na přímce Σ protínající K v samodružných bodech e, f; přímky $a'b$, $b'c$, $c'd \ldots p'a$ jsou tečny B, C, D, ... P, A křivky v bodech b, c, ... p, a, kdežto přímky ab', $bc' \ldots$ jsou přímky ac, bd, pb, ... vrcholy n-úhelníku $abc\ldots p$ střídavě spoju-

jící. Průseky přímek ac, B; bd, C; ce, D; ... pb, A musejí se tudíž nalézati na ose Σ.

Takto vznikne na přímce Σ n bodů $\alpha\beta\gamma \ldots \pi$, v nichž přímka ta se setkává s tečnami ABC ... P bodů $abc \ldots p$. Každým z bodů $\alpha\beta \ldots \pi$ prochází však mimo již uvedené přímky ještě jistý počet dalších přímek spojujících vrcholy n-úhelníka $abc \ldots p$. O celé soustavě můžeme sobě následujícím spůsobem jasný přehled sjednati. Celou skupinu $abc \ldots p$ můžeme počínajíce libovolným prvkem jejím proběhnouti dvojím směrem; počneme-li na příklad prvkem c, jest sled prvků v jednom z obou možných směrů $cdef \ldots pab$ a v druhém jest sled $cbap \ldots \ldots fed$. V směru prvním odpovídá prvku c prvek d co první, e co druhý, f co třetí element sousední atd., a ve směru druhém jest b první, a druhý, p třetí element sousední atd. Každý prvek má tudíž dva sousední elementy první, dva sousední elementy druhé, třetí, čtvrté atd.; všeobecně dva sousední elementy r-té a sice jeden s jedné a druhý s druhé strany. První sousední elementy bodu c jsou db, druhé sousední elementy ea, třetí jsou fp atd. Jest-li n číslo sudé, tu bude $\frac{n}{2}$-tý sousední bod tentýž po obou stranách; jest to vždy protější vrchol v n-úhelníku $abc \ldots p$.

„Tečna každého z n bodů $abc \ldots p$, přímky spojující první dva body sousední, druhé dva body sousední atd., všeobecně r-té dva body sousední procházejí týmž bodem přímky Σ; je-li n číslo sudé, pak týmž bodem prochází i tečna protějšího vrcholu."

Důkaz: Pro bod c na př. máme dokázati, že přímky C, db, ea, $fp \ldots$ procházejí týmž bodem přímky Σ; to plyne však ihned, uvážíme-li, že C jest přímka $b'c$, kdežto db jest přímkou bc' a přímky bc' a $b'c$ musí týmž bodem, na Σ se nalezajícím, procházeti; mimo to jest ale bd též přímkou $a'd$ a přímka ea jest přímkou ad', tak že i ea musí týmž bodem přímky Σ procházeti jako přímku db atd. Tím je věta dokázána pro bod c a tudíž i pro každý prvek skupiny $abc \ldots p$.

Je-li n číslo sudé, má c jistý protější bod, který jest $\frac{n}{2}$-tý bod sousední po obou stranách, tak že se vyskytne jeho tečna co přímka procházející týmž bodem osy Σ jako veškeré přímky dříve uvedené. Současně vidíme, že pro sudá n počet bodu na přímce Σ se vyskytujících, bude vždy $\frac{n}{2}$ a každým z těchto bodů prochází $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ přímek, z kterýchž dvě jsou tečny kuželosečky v dvou protějších vrcholech n-úhelníku $abc \ldots p$ a z ostatních $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ přímek obsahuje každá dva z vrcholů, které od oněch dvou protějších po obou stranách stejně jsou vzdáleny.

Každé dva protější vrcholy vyskytují se tudíž co dvojné body kvadratické involuce na K, v níž ostatní vrcholy tvoří $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ párů involutorně sobě příslušných bodů. Všem těmto involucím náleží ef taktéž co pár bodový.

„V každé skupině n-prvkové cyklické prométnosti se sudým n, jsou každé dva protější prvky (takové dva prvky, z kterýchž, považujeme-li jeden co první, druhý pak jest $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-ní) dvojné elementy kvadratické involuce, v kteréž ostatní $n-2$ elementy skupiny tvoří $\frac{n-2}{2}$ párů, tak totiž, že vždy dva r-té sousední prvky ($r = 1, 2, \ldots$) každého z oněch dvojných prvků tvoří pár. Elementy e, f náleží co pár téže involuci.“

Jest-li n číslo liché, procházejí průsekem osy Σ a tečny C přímky db, $ea \ldots$ v počtu $\frac{n-1}{2}$; bod c jeví se co dvojný bod involuce kvadratické, v které body db, $ea, \ldots$ představují $\frac{n-1}{2}$ párů bodů sobě příslušných.

„V každé skupině n-prvkové cyklické prométnosti, s lichým n, jest každý prvek dvojným elementem kvadratické involuce, jížto i ostatní prvky v $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ párů seřaděny přináležejí, tak totiž, že oba r-té sousední prvky ($r = 1, 2, \ldots$) onoho dvojného elementu tvoří pár. Elementy e, f tvoří taktéž pár této involuce.“

13. Abychom určili všeobecný zákon naznačené již involutorné souvislosti, mysleme si, že probíháme polygon skupinu na K znázorňující v jednom z obou směrů a označme vrcholy číslicemi 1, 2, 3 ... n.

Různíme-li směry, v nichž obvod polygonu proběhnouti můžeme co positivný a negativný, tu budiž směr, v němž od 1 přijdem k 2, pak ku 3 atd., positivný a opačný, v kterémž od 1 přijdeme ku n, pak ku $n-1$ atd. buď negativný. Každý vrchol, obecně vrchol x, má v positivném směru za následující vrchol $(x+1)$ a v negativném směru za následující (neb v positivném směru předcházející) vrchol $(x-1)$; $(x+1)$, $(x-1)$ jsou tudíž první sousední vrcholy bodu x, z nichž nazveme $(x+1)$ prvním positivným, $(x-1)$ prvním negativným sousedem; dále jest $(x+2)$ druhý positivný a $(x-2)$ druhý negativný sousední bod ku x, a obecně budou $(x+\mathrm{n})$, $(x-\mathrm{n})$ n-té sousední body (positivný, negativný) bodu x. Dle vztahu promětnosti odpovídají bodům 1, 2, 3 ... $(x-1)x$ $(x+1)$ ... n posloupně body 2, 3 ... n 1 co body $1'$, $2'$, $3'$ ... x' ... n', tak že všeobecně jest bod x' totožný s bodem $(x+1)$, při kterémž označení patrně jest $n+p \equiv p$, t. j. $(n+p)$-tý bod splývá s bodem p-tým; aneb všeobecně $p \pm kn \equiv p$.

Pozorujme nyní libovolné dva body x, y naší skupiny a jich positivné první sousední body $(x+1)$, $(y+1)$ a jich negativné sousední body první $(x-1)$, $(y-1)$.

Dle svrchu řečeného jsou body x, $(x+1)$ bodům $(x-1)$ x promětně příslušné a mají tudíž označení $(x-1)'$ x' a právě tak jest bod y bodem $(y-1)'$ a bod $(y+1)$ jest bodem y'. Přímka, body xy spojující, vyskytuje se tudíž jednou co spojivá přímka bodů x a $(y-1)'$ a musí tudíž Σ protnouti v témž bodu co přímka body x' a $(y-1)$ spojující t. j. co přímka spojivá bodů $(x+1)$ a $(y-1)$.

Za druhé se jeví přímka xy co body $(x-1)'$, y spojující, a musí tudíž Σ protnouti v témž bodu co přímka bod $(x-1)$ s bodem y' t. j. s bodem $(y+1)$ spojující.

Z úvahy té plyne, že přímka $\overline{xy}$ protíná Σ v témže bodu co přímky $\overline{(x-1)\ (y+1)}$, $\overline{(x+1)\ (y-1)}$, z nichž každá spojuje positivný první bod sousední jednoho z bodů xy s prvním negativným sousedním bodem druhého z nich. Použijeme-li téhož výsledku vzhledem ku přímkám

$$\overline{(x-1)\,(y+1)},\quad \overline{(x+1)\,(y-1)},$$

obdržíme přímky $\overline{(x-2)\,(y+2)}$, $\overline{(x+2)\,(y-2)}$ procházející týmž bodem osy Σ jako přímka $\overline{xy}$ atd.; všeobecně protíná $\overline{xy}$ osu Σ v bodu, kterým též procházejí přímky

$$\overline{(x-r)\,(y+r)},\quad \overline{(x+r)\,(y-r)},\ (r=1,\,2,\,3,\ldots).$$

Máme tudíž všeobecnou větu:

„Přímka, spojující body x, y, protíná Σ v bodě, jímž prochází každá přímka spojující positivný r-tý sousední bod jednoho z obou bodů x, y s negativným r-tým sousedním bodem druhého z těchto bodů, $r=123\ldots$“

Aneb:

„Jsou-li x, y, z, u číslice přináležející čtyrem z bodů některé skupiny cyklické prometnosti na kuželosečce K, pak procházejí přímky $\overline{xy}$, $\overline{zu}$ týmž bodem osy Σ dvojné body e, f obsahující, jest-li $x-z=\pm(y-u)$.“

Připomeňme, že přímka spojující bod x s bodem x, tedy přímka $\overline{xx}$ jest tečnou křivky K v bodu x; přímky spojující bod x s body $(x-1)$, $(x+1)$, jsou v bodě x se protínající strany úplného polygonu $123\ldots x\ldots n$.

Jest-li n číslo liché, musí se v soustavě přímek, které procházejí průsekem osy Σ s přímkou xy, t. j. v soustavě přímek $\overline{(x-r)\,(y+r)}$ nalézati *jedna* tečna a jedna (k jejímu bodu dotyčnému protější) strana polygonu $123\ldots x\ldots y\ldots n$.

Jest-li n číslo sudé, pak se v této soustavě přímek nalézají buď dvě protější strany onoho polygonu aneb tečny dvou protějších vrcholů; první případ nastane, je-li rozdíl číslic x, y číslo liché, a druhý případ nastane, jest-li rozdíl ten číslem sudým.

Vzhledem k libovolným cyklickým prometnostem můžeme poslední výsledky následovně vysloviti:

„Budiž dána cyklická prvořadá prometnost n-prvková s dvojnými elementy e, f. Libovolné dva prvky x, y libovolné skupiny, určují co pár s párem e, f kvadratickou involuci, v které každému prvku z naší skupiny odpovídá co příslušný element opět prvek u téže skupiny od prvků x, y v opačném směru právě tak vzdálený, jako prvek z.*) Jest-li n číslo liché, pak obsahuje tato involuce jeden prvek skupiny co samodružný a pár bezprostředně po sobě jdoucích prvků co pár příslušných elementů. Jest-li n číslo sudé a jest-li mezi prvky x, y obsažen sudý počet elementů skupiny, pak obsahuje ona involuce dva (protější) páry bezprostředně po sobě jdoucích prvků dané skupiny; pro sudé n ale lichý počet mezi x a y obsažených prvků skupiny, má ona involuce dva (protější) prvky skupiny co elementy dvojné."

14. Dříve jsme viděli, že cyklická prométnost trojprvková**) jest určena jednou skupinou úplně, a cyklická promětnost čtyrprvková taktéž úplně určena jest skupinou harmonickou.

Má-li pětiprvková skupina náležeti cyklické promětnosti, musí každý z pěti prvků býti dvojným elementem involuce ostatními dvěma páry určené.

„Každá skupina šestiprvkové cyklické promětnosti se skládá ze dvou trojin cyklické promětnosti trojprvkové o týchž dvojných elementech e, f."

Neb jest-li 123456 skupina takové promětnosti na kuželosečce K, musí dle všeobecné věty v trojúhelníku 135 každá strana protnout tečnu protějšího vrcholu v bodu na Σ se nalezajícím, tak že, (poněvadž totéž platí o trojúhelníku 246) vskutku trojiny 1 3 5, 2 4 6 náleží cyklické promětnosti o týchž dvojných bodech e, f, které pro obě promětnosti jsou průseky osy Σ a křivky K. Dle všeobecné věty protínají se tečny v protějších vrcholech 14, 25, 36 v bodech přímky Σ, z čehož plyne, že

---

*) T. j.: Je-li z r-tý positivný sousední prvek vzhledem ku x, na př., bude u r-tý negativný prvek sousední vzhledem ku y.

**) Podotkněme, že v cyklické promětnosti trojprvkové každá skupina abc tvoří s každým z obou elementů dvojných e, f soustavu aequianharmonickou. (Viz: Cremonův úvod do geom. theorie křivek, českého vydání čl. 27.) Neb elementům $eabc$ odpovídají posloupně elementy $ebca$, tak že mají dvojpoměry $(eabc)$, $(ebca)$ tutéž hodnotu. Položíme-li $(eabc) = h$, jest $(ebca) = \frac{1}{1-h}$ (l. c. článek 1.), čímž máme

$$h = \frac{1}{1-h} \quad \text{aneb} \quad h^2 - h + 1 = 0$$

a tudíž je h imaginární třetí kořen z jedničky záporné. (l. c. čl. 26.)

každá skupina se skládá z tří párů kvadratické involuce o týchž dvojných bodech e, f.

Všeobecně:

„Páry protějších prvků $\left(x, x+\frac{n}{2}\right)$ v cyklické prometnosti n-prvkové (n sudé) tvoří involuci kvadratickou, jejížto dvojné elementy jsou též dvojnými v prometnosti."

15. „Skládá-li se n ze dvou faktorů p, q, t. j. $n=pq$, pak obsažena jest v každé cyklické prometnosti n-prvkové cyklická prometnost p-prvková a cyklická prometnost q-prvková; každá skupina první prometnosti se skládá z q skupin druhé a z p skupin třetí prometnosti."

Dostačí libovolnému (x-tému) prvku skupiny $123 \ldots n$ přiřaditi prvek $(x+q)$ resp. prvek $(x+p)$ co prometně příslušný.

Tak jest pro $n=6$, $n=2.3$ tedy $p=2$, $q=3$.

Každá skupina 123456 se skládá z tří skupin (párů) 14, 25, 36 prometnosti cyklické dvouprvkové (kvadratické involuce) a z dvou skupin (trojin) 135, 246 prometnosti trojprvkové.

Patrně jsou elementy jedné trojiny ku př. 462 harmonicky sdruženy k elementům 135 druhé skupiny vzhledem k párům téže skupiny, t. j. vzhledem k párům 35, 51, 13. To plyne ihned z přenešení skupiny na kuželosečku aneb z dřívějších všeobecných vět, dle kterýchž jsou (1435), (2513), (3615) soustavy harmonické.

16. Položme si otázku, zdaliž a jakým spůsobem lze dvě prometné řady bodové vložiti tak na sebe, aby tvořily prometnost cyklickou?

Buďtež v, u' centrálné body obou prometných řad, t. j. body příslušné nekonečně vzdáleným bodům v', u jich os, pak jest součin $vx \,.\, u'x'$ vzdáleností dvou příslušných bodů xx' od oněch bodů centrálných hodnotou stálou k^2, t. j.

$$vx \,.\, u'x' = k^2.$$

(Viz: Zákl. vyš. geom. I. díl, čl. 30.) Položme nyní obě řady bodové do téže přímky a budiž a posud libovolná vzdálenost obou bodů centrálných, $\overline{vu'} = a$; pak jest

$$vx = vu' + u'x = a + u'x$$

a hořejší rovnice přejde do následující:

$$(a + u'x)\, u'x' = k^2,$$

čili

$$u'x' = \frac{k^2}{a + u'x}$$

položíme-li úsečky $u'x = \xi$, $u'x' = \xi'$, máme

$$\xi' = \frac{k^2}{a + \xi}.$$

Sestrojíme-li nyní k x' prométně příslušný bod x'' k tomu opět příslušný x''' atd. a jsou-li ξ'', ξ'''... úsečky těchto bodů od počátečného bodu u' počítané, máme dle posledního vzorce

$$\xi'' = \frac{k^2}{a + \xi'}\,,\quad \xi''' = \frac{k^2}{a + \xi''}\,,\quad \xi'''' = \frac{k^2}{a + \xi'''}\cdots\cdots$$

tedy

$$\xi'' = \cfrac{k^2}{a + \cfrac{k^2}{a + \xi}}\,,\qquad \xi''' = \cfrac{k^2}{a + \cfrac{k^2}{a + \cfrac{k^2}{a + \xi}}}\,,$$

$$\xi'''' = \cfrac{k^2}{a + \cfrac{k^2}{a + \cfrac{k^2}{a + \cfrac{k^2}{a + \xi}}}}$$

. . . .

obecně

$$\xi^{(n)} = \cfrac{k^2}{a + \cfrac{k^2}{a + \cfrac{k^2}{a + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{k^2}{a + \xi}}}}}\,,$$

při čemž se v $\xi^{(n)}$ po pravé straně k^2 n-krát vyskytuje. Prométnost bude cyklická n-prvková, je-li pro libovolné ξ vždy $\xi^{(n)} = \xi$.

Urovnáme-li rovnici $\xi^{(n)} = \xi$ a vyloučíme-li v každém případě se vyskytující činitel $(\xi^2 + a\xi - k^2)$ *), obdržíme následující podmínečné rovnice pro hodnotu a t. j. vzdálenost, do jaké nutno přivésti centrálné body vu' řad promětných souosých, mají-li tyto tvořiti promětnost cyklickou s n-prvkovými skupinami;

pro $n = 2 \ldots\ldots a = 0$
pro $n = 3 \ldots\ldots a^2 + k^2 = 0$
pro $n = 4 \ldots\ldots a(a^2 + 2k^2) = 0$
pro $n = 5 \ldots\ldots a^4 + 3a^2k^2 + k^4 = 0$
pro $n = 6 \ldots\ldots a(a^2 + k^2)(a^2 + 3k^2) = 0$
pro $n = 7 \ldots\ldots a^6 + 5a^4k^2 + 6a^2k^4 + k^6 = 0$
pro $n = 8 \ldots\ldots a(a^2 + 2k^2)(a^4 + 4a^2k^2 + 2k^4) = 0$
pro $n = 9 \ldots\ldots (a^2 + k^2)(a^6 + 6a^4k^2 + 9a^2k^4 + k^6) = 0$
pro $n = 10 \ldots\ldots a(a^4 + 3a^2k^2 + k^4)(a^4 + 5a^2k^2 + 5k^4) = 0$
atd. atd.

Řadu tuto můžeme snadno dále vyvinouti dle následujícího jednoduchého zákonu. Označíme-li levou stranu podmínečné rovnice pro $n = p$ písmenou U_p, pak lze snadno ukázati, že platí rekurentní vzorec:

$$U_p = a\,U_{p-1} + k^2\,U_{p-2}.$$

Jest-li p dělitelno číslem r, pak musí U_p obsahovati $U_r w$ činitel, což i z článku předcházejícího na jevo vychází. Z posledních rovnic plyne pro $n = 3$, $a = \sqrt{-k^2}$; pro $n = 4$, $a = \sqrt{-2k^2}$; pro $n = 5$, $a = \sqrt{k^2 \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}}$; pro $n = 6$, $a = \sqrt{-3k^2}$.

Vyvineme-li podmínečné rovnice, obdržíme:

pro $n = 2$, $U_2 \equiv a$
pro $n = 3$, $U_3 \equiv a^2 + k^2$
pro $n = 4$, $U_4 \equiv a^3 + 2ak^2$
pro $n = 5$, $U_5 \equiv a^4 + 3a^2k^2 + k^4$
pro $n = 6$, $U_6 \equiv a^5 + 4a^3k^2 + 3ak^4$
pro $n = 7$, $U_7 \equiv a^6 + 5a^4k^2 + 6a^2k^4 + k^6$,
pro $n = 8$, $U_8 \equiv a^7 + 6a^5k^2 + 10a^3k^4 + 4ak^6$,
pro $n = 9$, $U_9 \equiv a^8 + 7a^6k^2 + 15a^4k^4 + 10a^2k^6 + k^8$,

*) Faktor ten mizí patrně pro oba dvojné body, pro kteréž arci vždy platí cyklita.

pro $n = 10$, $U_{10} \equiv a^9 + 8a^7k^2 + 21a^5k^4 + 20a^3k^6 + 5ak^8$,
pro $n = 11$, $U_{11} \equiv a^{10} + 9a^8k^2 + 28a^6k^4 + 35a^4k^6 + 15a^2k^8 + k^{10}$,

. . . .

atd. atd.

Zákon, dle kterého jsou sestrojeny činitele číselné, jest velmi jednoduchý. První numerický faktor v rovnici $U_p = 0$, která má tvar

$$U_p \equiv a^{p-1} + (p-2)\, a^{p-3}k^2 + f_{p,3}\, a^{p-5}k^4 + f_{p,4} a^{p-7}k^6 + \ldots = 0$$

rovná se kladné jedničce, druhý faktor jest číslo $(p-2)$, třetí faktor $f_{p,3}$ obdržíme, připočteme-li k třetímu faktoru předcházející rovnice druhý faktor (numerický) rovnice předpředcházející a vůbec jest libovolný r-tý numerický faktor součtem r-tého faktoru předcházející a $(r-1)$-tého faktoru *předpřed*cházející rovnice, tedy

$$f_{p,r} = f_{p-1,r} + f_{p-2,r-1}.$$

Jak se mají v tomto článku prozkoumané otázky v případě dvou promětných svazků? Jaké hodnoty obdržíme pro a v případech $n = 7$, $n = 8$, $n = 9$, atd.?

17. Jak v článku 6. dokázáno, má cykličnost jedné skupeniny soumístných promětných útvarů za následek tutéž vlastnost pro *všechny* skupiny.

Máme-li v rovině dva kollineárné systemy cyklické, trojprvkové (trilinearné; viz: Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung etc. Leipzig 1880, pag. 402), odpovídá libovolnému bodu x_1 bod x_2, tomu pak bod x_3 a bodu x_3 opět bod x, čímž jest skupina $x_1x_2x_3$ uzavřena. Rozumí se samo sebou, že přímkám x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 posloupně přísluší přímky x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2. Všeobecně: „Jsou-li soumístné kollineárné roviny cyklické vzhledem k jich bodům, jsou taktéž cyklickými vzhledem k jich přímkám.“

Jelikož kollineárný vztah útvarů druhořadých ustanoven jest čtyřmi páry sobě příslušných prvků, bude cyklický vztah trojprvkový určen, známe-li jednu trojinu $x_1x_2x_3$ a jeden pár y_1y_2 sobě příslušných bodů (aneb přímek). Budiž y_3 bod druhou skupinu doplňující. Přímkám x_1x_2, x_1x_3, x_1y_1, x_1y_2 odpovídají promětné přímky x_2x_3, x_2x_1, x_2y_2, x_2y_3, tak že oběma svazkům x_1, x_2 společnému paprsku x_1x_2 ($\equiv x_2x_1$) odpovídá v prvním svazku x_1x_3 a v druhém x_2x_3 a průsek x_3 těchto dvou paprsků jest tudíž středem promítavosti (viz: Zákl. vyšší geom. I. díl, čl. 25.) Bodem x_3 musí tudíž procházeti přímka spojující průsek z_1 paprsků $x_1 y_1$, $x_2 y_3$ s průsekem paprsků $x_1 y_2$, $x_2 y_2$; avšak průsek posledních dvou paprsků jest x_2, pročež přímka uvedená jest přímka $x_3 y_2$, a tudíž procházejí paprsky $x_1 y_1$, $x_2 y_3$, $x_3 y_2$ týmž bodem z_1.

Z cykličnosti plyne, že v *každé* skupině můžeme ukazovatele 1, 2, 3, cyklicky permutovati, aniž by se tím vztah prométnosti porušil. Můžeme tudíž z hořejšího souditi (aneb jako dříve přímo dokázati), že též přímky $x_2 y_2$, $x_3 y_1$, $x_1 y_3$ procházejí týmž bodem z_2 a konečně i přímky $x_3 y_3$, $x_1 y_2$, $x_2 y_1$ procházejí týmž bodem z_3. Máme tudíž mezi libovolnými dvěma trojinami $x_1 x_2 x_3$, $y_1 y_2 y_3$ následující vztah

$\overline{x_1 y_1}$, $\overline{x_2 y_3}$, $\overline{x_3 y_2}$ procházejí bodem z_1

$\overline{x_2 y_2}$, $\overline{x_3 y_1}$, $\overline{x_1 y_3}$ „ „ z_2

$\overline{x_3 y_3}$, $\overline{x_1 y_2}$, $\overline{x_2 y_1}$ „ „ z_3.

Jelikož třem přímkám prvního řádku prométně přísluší přímky druhého řádku a těm opět přímky třetího řádku, tedy přísluší bodu z_1 bod z_2 a tomu konečně bod z_3 t. j. body $z_1 z_2 z_3$ tvoří novou skupinu cyklické prométnosti.

Chceme-li z trojiny $x_1 x_2 x_3$ a z páru $y_1 y_2$ určiti bod y_3, můžeme dle hořejšího vzorce určiti z_1 co průsek přímek $x_1 y_1$, $x_3 y_2$, pak z_2 co průsečík přímek $x_2 y_2$, $x_3 y_1$ a y_3 obdržíme co průsečík přímek $z_1 x_2$, $z_2 x_1$. Z vzorce toho vidíme, že bodem

y_1 procházejí přímky $x_1 z_1$, $x_2 z_3$, $x_3 z_2$

y_2 „ „ $x_2 z_2$, $x_3 z_1$, $x_1 z_3$

y_3 „ „ $x_3 z_3$, $x_1 z_2$, $x_2 z_1$

dále procházejí

bodem x_1 přímky $y_1 z_1$, $y_2 z_3$, $y_3 z_2$,

„ x_2 „ $y_2 z_2$, $y_3 z_1$, $y_1 z_3$.

„ x_3 „ $y_3 z_3$, $y_1 z_2$, $y_2 z_1$.

Z tří trojúhelníků $x_1 x_2 x_3$, $y_1 y_2 y_3$, $z_1 z_2 z_3$ jsou tudíž každé dva v perspektivné poloze (viz: Zákl. vyš. geom. I. díl, čl. 38.) a to trojím spůsobem, při čemž vrcholy třetího jsou středy perspektivnými. Tak jsou na př. trojúhelníky $\triangle x$, $\triangle y$ v poloze perspektivné jednou s bodem z_1 co středem (kterýmž probíhají přímky $x_1 y_1$, $x_2 y_3$, $x_3 y_2$) po druhé s bodem z_2 (průsek přímek

x_2y_2, x_3y_1, x_1y_3) a po třetí s bodem z_3 (průsek přímek x_3y_3, x_1y_2, x_2y_1).

„Nalezají-li se dvě soumístné kollineárné roviny v cyklické promětnosti trojprvkové, pak tvoří každé dvě trojiny dva na trojí spůsob perspektivné trojúhelníky. Středy těchto tří perspektivit tvoří opět trojinu cyklické promětnosti. Každá z těchto tří trojin plyne z ostatních dvou, skládajíc se ze středů perspektivit oněch dvou trojin.“

Pro každou perspektivnou polohu trojúhelníků $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$ obdržíme osu perspektivnou spojující tři průseky tří párů příslušných stran. Tak obdržíme pro perspektivný střed z_1, kterým probíhají přímky x_1y_1, x_2y_3, x_3y_2 osu Z_1, v níž obsaženy jsou průseky přímek x_1x_2, y_1y_3; x_2x_3, y_2y_3; x_1x_3, y_1y_2. Bodu z_2 odpovídá osa Z_2 obsahující průseky přímek x_2x_3, y_2y_1; x_3x_1, y_3y_1; x_2x_1, y_2y_3 a perspektivnému středu z_3 konečně odpovídá perspektivická osa Z_3 obsahující průseky přímek x_3x_1, y_3y_2; x_1x_2 y_1y_2; x_3x_2, y_3y_1. Jelikož však přímky, jichž průseky leží na Z_3 promětně přisluší přímkám, jichž průseky leží na Z_2 a tyto opět přímkám, jichž průseky na Z_1 leží, tož soudíme, že přímky Z_1 Z_2 Z_3 tvoří též trojinu cyklické promětnosti, jelikož přímce Z_1 odpovídá Z_2 a této Z_3. Právě tak obdržíme pro trojúhelníky $x_1x_2x_3$, $z_1z_2z_3$ tři osy perspektivné: $Y_1Y_2Y_3$, které trojinu tvoří a konečně pro trojúhelníky $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$ obdržíme trojinu os $X_1X_2X_3$. Spojíme-li ze známých posud trojin dvě, které spojeny ještě nebyly, obdržíme nové trojiny v počtu libovolném, opakujeme-li tytéž konstrukce dále. (Pokračování.)

Poznámka o sférické trigonometrii.

Napsal

Prof. F. Hoza.

Ze stran a, b, c sférického trojúhelníka lze vypočísti úhly jeho α, β, γ podle známých vzorců:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \qquad (1)$$