Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

O křivkách involučně homologických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 5, 208--220

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122248

$$\frac{A_{n+x}}{v^x}+\frac{A_{n+x+1}}{v^{x+1}}+\ldots \text{ do konce.}$$

Připojí-li se tento součet, dělen ještě úročitelem v^n k součtu po pravé straně rovnice (16′), jest patrně:

$$\alpha_n \,.\, {}^{(m)}V_{n(x)} = (\varkappa_{n+m+1}\Delta_{n+m+1}+\varkappa_{n+m+2}\Delta_{n+m+2}+\ldots)$$
$$+(\alpha_{n+x}+\alpha_{n+x+1}+\ldots).$$

Utvoří-li se tu opět nová tabulka součtová

$$\Sigma_n(\alpha)=\alpha_n+\alpha_{n+1}+\ldots \text{ do konce,} \tag{h}$$

vyjde ihned:

$${}^{(m)}V_{n(x)}=\frac{\Sigma_{n+m+1}(\varkappa\Delta)+\Sigma_{n+x}(\alpha)}{\alpha_n}. \tag{19}$$

Poznamen. Pro tentýž důchod, avšak *s odbytným* (obdobně se 2. *b*) najde se vzorec patrně tím, že jmenovatele v (19) nahradíme jmenovatelem vzorce (18).

4. Ze vzorce (19) plyne bezprostředně také hodnota **důchodu invalidního a pro stáří bez doby karenční**, položí-li se prostě

$$m=0,$$

z čehož

$$V_{n(x)}=\frac{\Sigma_{n+1}(\varkappa\Delta)+\Sigma_{n+x}(\alpha)}{\alpha_n}. \tag{20}$$

(Dokončení.)

O křivkách involučně homologických.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.*)

1. Stanovme ku každému bodu m danému v pravoúhlé soustavě souřadnicemi x, y bod m' (ξ, η) dle rovnic

$$\xi=\frac{bx}{y-a},\quad \eta=\frac{by}{y-a}. \tag{1}$$

Tím obdržíme v rovině dvě soustavy bodů; každému bodu v soustavě (x, y) příslušeti bude určitý bod v soustavě (ξ, η),

---

*) Předneseno z části na sjezdu professorů v Chrudimi o svatodušních svátcích r. 1884.

ale také naopak — neboť řešíme-li rovnice hořejší dle x, y, obdržíme

$$x = \frac{a\xi}{\eta - b}, \quad y = \frac{a\eta}{\eta - b}, \tag{2}$$

dle kterých rovnic k danému bodu (ξ, η) určíme příslušný bod (x, y).

Povšimněme si blíže souvislosti vyjádřené těmito rovnicemi, vztahujíce obě soustavy k týmž osám souřadným; jmenujeme-li body m, m' *sdruženými*, jsou v bodech takových zřejmy tyto věty:

Dva body sdružené leží na přímce jdoucí počátkem; jestiť

$$\frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi}.$$

Každý bod přímky $\mathrm{O} \equiv y - a - b = 0$ *splývá se svým sdruženým*; neboť při $y - a = b$ jest

$$\xi = x, \ \eta = y.$$

Každému bodu přímky $\mathrm{U} \equiv y - a = 0$ *přísluší v soustavě* (ξ, η) *bod úběžný (nekonečně vzdálený)*; při $y = a$ jest totiž

$$\xi = \infty, \quad \eta = \infty.$$

Každému bodu přímky $\mathrm{V}' \equiv \eta - b = 0$ *sdružen jest v soustavě* (x, y) *bod úběžný; jestiť za podmínkou touto*

$$x = \infty, \quad y = \infty.$$

Přímka spojující dva sdružené body m, m' *a procházející počátkem* o *stanoví v přímce* O *bod* m_0*; dvojpoměr* (om_0mm') *má u všech bodů roviny hodnotu stálou.*

Neboť jest

$$(om_0\, mm') = \frac{om}{m_0 m} : \frac{om'}{m_0 m'} = \frac{y}{y - a - b} : \frac{\eta}{\eta - a - b},$$

a po dosazení hodnoty za η objeví se dvojpoměr tento jakožto veličina stálá

$$(om_0\, mm') = -\frac{a}{b}. \tag{3}$$

Tak se nám objevuje rovnicemi (1) a (2) vyjádřená souvislosť, která v moderní geometrii *homologií* čili *centrálnou kollineací* se nazývá; bod o slove středem, přímka O osou, přímky U a V′ úběžnicemi homologie. Sdruženosť tato dvou rovinných soustav, již vyšetřovali slavní geometrové *Poncelet, Chasles, Steiner* a j., obsahuje v sobě jako zvláštní případy shodnosť, podobnosť a příbuznosť, jsouc sama též jen zvláštním případem sdruženosti mnohem obecnějších, které jsou předmětem bádání geometrů současných.

2. Buď dána přímka P rovnicí

$$P \equiv Ax + By + C = 0; \qquad (4)$$

stanovme ke každému bodu jejímu m bod homologický m', a vyšetřme geometrické místo tohoto bodu m'.

Rovnici místa toho obdržíme, nahradíme-li x, y v rovnici přímky hodnotami dle rovnic (2); bude pak

$$Aa\xi + Ba\eta + C(\eta - b) = 0.$$

Hledané geom. místo jest tedy přímka

$$P' \equiv Aa\xi + (Ba + C)\eta - Cb = 0. \qquad (5)$$

K přímce P *jest homologicky sdružena přímka* P′ *jakožto geom. místo bodů sdružených k bodům přímky* P.

Přímku P′ snadno lze sestrojiti. Dána-li přímka P v obecné poloze, protíná osu O v bodě p samodružném a úběžnici U v bodě u, jehož sdružený leží v nekonečnu na přímce $\overline{ou}$; prochází tedy přímka P′ bodem p rovnoběžně k $\overline{ou}$. Označíme-li v' průsečík přímky P′ s V′, bude $\overline{ov'} \parallel$ P, jelikož bod v' jest homologický k úběžnému bodu přímky P. Body u, v' slovou *úběžníky* přímek P, P′. —

Jest-li $Ba + C = 0$, jest

$$P \equiv Ax + B(y - a) = 0$$
$$P' \equiv A\xi + Bb = 0;$$

jest-li však $B = 0$, jest

$$P \equiv Ax + C = 0$$
$$P' \equiv Aa\xi + C(\eta - b) = 0.$$

Z toho soudíme, že přímkám soustavy (x, y) jdoucím bodem $x = o$, $y = a$ přísluší v soustavě (ξ, η) přímky kolmé ku O, kdežto přímkám soustavy prvé kolmým ku O sdruženy jsou přímky jdoucí bodem $\xi = o$, $\eta = b$. Obou těchto úběžníků — $(U, Y) = h$, $(V', Y) = k'$ — lze s výhodou užiti, jde-li o sestrojení bodu k danému homologického. Spojíme-li totiž daný bod m s bodem h, obdržíme v O průsečík p; kolmice v bodě tom k O vztyčená stanoví v přímce $\overline{om}$ žádaný bod m'; aneb: sestrojme $\overline{mn} \perp$ O, bod společný přímkám $\overline{nk'}$ a $\overline{om}$ jest hledaný. —

Mohla by se ještě namítnouti otázka, může-li přímka P sjednotiti se někdy s přímkou homologickou P′. Nutná i zároveň dostatečná toho podmínka plyne přirovnáním rovnic obou přímek

$$\frac{Aa}{A} = \frac{Ba + C}{B} = -\frac{Cb}{C},$$

což lze též psáti ve tvaru

$$AC = 0$$

$$C[B(a+b)+C] = 0.$$

Podmínkám těmto lze dvojím způsobem vyhověti. Buď jest

$$A = 0, \; B(a+b) + C = 0$$

tedy přímka P sjednocuje se s osou homologie O; aneb jest C = 0, t. j. přímka P prochází středem homologie O. Osa homologie a přímky jdoucí středem homologie jsou tedy samy k sobě homologické; kdežto však každý bod přímky O jest samodružným, obsahuje každá přímka svazku o jen dva body takové, totiž bod o a průsečík s osou O.

3. Jako jsme k přímce P odvodili útvar homologický — přímku P′, — můžeme též libovolnou křivku K přetvořiti či transformovati v novou křivku K′, k původní homologickou. Dána-li rovnice křivky

$$K \equiv F(x, y) \equiv 0;$$

a nahradíme-li x, y příslušnými funkcemi ξ, η dle rovnic (2), obdržíme

$$K' \equiv \Phi(\xi, \eta) = 0$$

jakožto rovnici křivky odvozené. Dle tvaru rovnic transformačních soudíme, že funkce F i Φ ve stupni souhlasí, a že tudíž *dvě homologické křivky jsou téhož stupně*. Dvě takto sdružené křivky mají body na ose O ležící a tečny středem o procházející společné. Dvě homologické sečny neb tečny jich protínají se na ose homologie.

Jest však tu velmi blízkou otázka: *Může křivka homologickou transformací odvozená sjednocovati se s křivkou původní?* — čili jinými slovy: *Může nějaká křivka býti sama k sobě homologickou?* Odpověď na otázky ty sluší dáti kladnou, jak dále stvrdíme; vyšetřiti pak některé důležité případy toho druhu jest hlavní úlohou těchto úvah. —

Má-li křivka K býti sama k sobě homologickou, musí body její po dvou homologicky k sobě přísluševi; proto musí paprsky středem o jdoucí protínati křivku K v sudém počtu bodů mimo o ležících. To stane se, jest-li K stupně druhého a bod o mimo ni, aneb jest-li K stupně třetího a o bodem jejím — vůbec jest-li K stupně n a má-li v o bod $(n-2m)$-násobný. Přestaňme na nejjednodušším případu $(m=1)$, předpokládajíce křivku stupně n s bodem $(n-2)$-násobným.

Rovnice křivky takové má podobu

$$u_n + 2u_{n-1} + u_{n-2} = 0, \tag{6}$$

kde u_u zahrnuje členy stupně n atd. Jest tedy

$$u_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n$$
$$u_{n-1} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} y + \ldots + b_{n-1} y^{n-1}$$
$$u_{n-2} = c_0 x^{n-2} + c_1 y^{n-3} y + \ldots + c_{n-2} y^{n-2}.$$

Vykonáme-li v rovnici (6) substituci (2), nabudeme rovnice křivky odvozené

$$a^n v_n + 2a^{n-1}(\eta - b)\, v_{n-1} + a^{n-2}(\eta - b)^2\, v_{n-2} = 0,$$

v níž jest v_i funkce totožná s u_i, jen že v ní místo x, y psáno ξ, η. Zkrátíme-li rovnici tuto a srovnáme-li ji dle stupňů, bude míti podobu

$$a^2 v_n + 2a\eta v_{n-1} + \eta^2 v_{n-2} - 2b\,(a v_{n-1} + \eta v_{n-2}) + b^2 v_{n-2} = 0.$$

Uvážíme-li pak, že vztahujíce křivky K i K′ k týmž osám souřadným, smíme na místo ξ, η klásti též x, y, dostaneme konečně

$$\begin{aligned} \mathrm{K}' \equiv a^2 u_n + 2ayu_{n-1} + y^2 u_{n-2} - 2b\,(au_{n-1} + yu_{n-2}) \\ + b^2 u_{n-2} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Přirovnáním rovnic (6) a (7) shledáváme, že křivky K a K′ jsou téhož stupně n, mají v o společný bod $(n-2)$-násobný i společné tečny v něm určené rovnicí $u_{n-2} = 0$.

4. Mají-li se obě tyto křivky stotožniti, musí levé strany jich rovnic lišiti se toliko stálým součinitelem; musí tedy býti splněny podmínky

$$\frac{a^2 u_n + 2ayu_{n-1} + y^2 u_{n-2}}{u_n} = -\frac{b\,(au_{n-1} + yu_{n-2})}{u_{n-1}} = \frac{b^2 u_{n-2}}{u_{n-2}},$$

které lze snadným počtem též přetvořiti v následující:

$$b\,[(a+b)\,u_{n-1} + yu_{n-2}] = 0,$$
$$(a^2 - b^2)\,(u_n u_{n-2} - u_{n-1}^2)\,u_{n-2} = 0.$$

Z rovnic (1) jest patrno, že nemůže býtí $b = 0$, taktéž nemůže býti $a + b = 0$, jelikož by pak osa šla středem homologie a transformace stala by se neurčitou.

Dle povahy křivky K nemůže býti identicky ani $u_{n-2} = 0$, ani $u_n u_{n-1} - u_{n-2}^2 = 0$. Redukují se tedy podmínky hořejší na tyto dvě:

$$a - b = 0 \tag{8}$$

$$(a + b)\, u_{n-1} + y u_{n-2} = 0. \tag{9}$$

Zkoumejme jich geometrický význam a vyšetřme, lze-li jim vždy příhodnou volbou středu, osy a dvojpoměru homologie vyhověti. Prvá z nich značí, že zde nastává zvláštní případ homologie — *involuce;* jest tu charakteristický *dvojpoměr harmonický* $(om_0\, mm') = -1$, obě úběžnice sjednocují se v přímce $y - a = 0$ ležící uprostřed mezi středem homologie a osou $y - 2a = 0$. Libovolnému bodu roviny přísluší týž bod homologický, ať jej počítáme k soustavě (x, y) nebo (ξ, η); protíná-li tedy paprsek svazku o křivku K v bodech p, q, jest bod q homologicky sdružen s p a naopak — jak bylo lze i bez výpočtu předvídati. Oba tyto body jsou středem a osou homologie harmonicky odděleny.

Co se druhé podmínky (9) týče, můžeme na základě jejím dáti rovnici křivky K podobu

$$K \equiv a u_n - (y - a)\, u_{n-2} = 0; \tag{10}$$

která křivka má takovou rovnici, jest vzhledem k počátku sama k sobě involučně homologická.

Kterého druhu křivky jsou v tom zahrnuty, ustanovíme v řádcích následujících, vycházejíce od kuželoseček jakožto případu nejjednoduššího.

5. Rovnice *křivky 2. stupně* přispůsobená podmínkám (8) a (9) jest

$$K_2 \equiv a_0 x^2 + 2a_1\, xy + a_2\, y^2 - 2c\,(y - a) = 0; \tag{11}$$

rovnicí tou nevyžaduje se nic jiného, než aby křivka K_2 obsahovala body 1, 2, v nichž přímky $a_0 x^2 + 2a_1\, xy + a_2\, y^2 = 0$ — t. j. rovnoběžky vedené počátkem k asymptotám — protínají přímku $y - a = 0$. Toho lze však docíci při každé kuželosečce přiměřenou volbou středu a osy homologie. Středem může býti kterýkoli bod v rovině, který neleží na křivce K_2; osou homologie jest pak přímka $y - 2a = 0$, o níž lze se snadno přesvědčiti, že jest totožna s polárou bodu o vzhledem ke kuželosečce dané. Jestiť rovnice poláry libovolného bodu (x_1, y_1) vzhledem ku K přímka určená rovnicí

$$a_0\, xx_1 + a_1\,(x_1\, y + xy_1) + a_2\, yy_1 - c\,(y + y_1) + 2ac = 0,$$

z níž při $x_1 = y_1 = 0$ vznikne $y - 2a = 0$.

Z toho všeho vysvítá:

Každá křivka 2. stupně jest sama k sobě involučně homologická vzhledem k libovolnému mimo ni ležícímu bodu jakožto středu homologie a poláře jeho jakožto ose homologie.

Které vlastnosti kuželoseček ve větě této základ mají, jest dostatečně známo; poukážeme tu jen k některým, týkajícím se úběžnice $U \equiv y - a = 0$. Nazveme-li po příkladu geometrů anglických rovnoběžku vedenou uprostřed mezi polem a polárou kuželosečky *quasipolárou* tohoto bodu vzhledem ke kuželosečce, můžeme říci: *Vedeme-li bodem mimo kuželosečku daným rovnoběžky k asymptotám, protíná každá z nich křivku v určitém bodu; oba takto vzniklé body leží na quasipoláře bodu daného.*

Rovnoběžky tyto $\overline{o1}$, $\overline{o2}$, jakož i body 1, 2 jsou realné a různé jen při hyperbole, při parabole splývají přímky $\overline{o1}$, $\overline{o2}$ v jedinou rovnoběžku k ose paraboly, body 1, 2 sjednocují se a přímka U jest tedy tečnou paraboly; při ellipse pak jsou přímky $\overline{o1}$, $\overline{o2}$ pomyslné a tudíž přímka U seče ellipsu v bodech pomyslných. Totéž vychází na jevo, uvážíme-li, že křivka k dané křivce homologická má v nekonečnu tolik realných bodů, v kolika realných bodech protíná původní křivka úběžnici U, neboť body ty jsou na vzájem homologické. V případě našem, kdy křivka původní sjednocuje se s odvozenou a úběžnice s quasipolárou středu homologie, můžeme tedy vysloviti větu:

Quasipolára bodu mimo kuželosečku daného stanoví v této dva body realné různé, realné sjednocené aneb pomyslně sdružené, dle toho, jest-li křivka daná hyperbola, parabola neb ellipsa. To jest ostatně patrno též z rovnice (11); obdržíme tu pro různé tři případy průseku křivky K_2 s přímkou U podmínku

$$a_1^2 - a_0\, a_2 \gtreqless 0,$$

která zároveň vyjadřuje druh kuželosečky.

6. Budiž dána *křivka stupně třetího,* jejíž rovnice

$$K_3 \equiv a_0 x^2 + a_1 x^2 y + a_2 xy^2 + a_3 y^3 - (y - a)(b_0 x + b_1 y) = 0 \quad (12)$$

vyhovuje podmínce (9). Křivka tato — jak patrno — jde počátkem; libovolná přímka týmž bodem jdoucí, ku př. $y = ax$ protíná křivku ve dvou bodech dalších, jichž úsečky jsou kořeny rovnice

$$x^2(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3) - (\alpha x - a)(b_0 + b_1\alpha) = 0.$$

Mezi přímkami těmi jest jedna, při které jest $b_0 + b_1\alpha = 0$, t. j. $\alpha = -\frac{b_0}{b_1}$; tu oba ony průsečíky splynou s bodem o. Přímka tato $y = -\frac{b_0}{b_1}x$, majíc s křivkou tři soumezné body společné, jest tečnou obratu (inflexe) a lze rovnici její též psáti $b_0x + b_1y = 0$. Aby tedy podmínka rovnicí (9) vyjádřená u křivek 3. stupně splněna byla, jest zapotřebí a stačí položiti střed homologie do bodu obratu křivky této. To však lze učiniti u každé křivky 3. stupně, jelikož — jak známo — má každá křivka taková obecně 9 bodů obratu, mezi nimiž jsou tři realné. Z toho následuje: *Každá křivka 3. stupně jest sama k sobě involučně homologická vzhledem k bodu obratu jakožto středu homologie.*

Příslušnou osu homologie ustanovíme, stanovíce středem tečny ke křivce dané; body dotyčné leží na žádané ose. Lze tedy bodem obratu vésti ke křivce 3. stupně tři tečny, jichž body dotyčné leží v jedné přímce; přímka tato, tak zvaná *harmonická polára bodu obratu,* jest zde osou homologie. K ose té náleží určitá úběžnice, položená uprostřed mezi ní a středem homologie, a obsahující takové body křivky, jichž homologické jsou v nekonečnu. Sestrojíme-li tedy bodem obratu rovnoběžky k asymptotám křivky 3. stupně, protínají tyto křivku ve třech bodech jedné přímky, která leží uprostřed mezi bodem obratu a jeho harmonickou polárou. Totéž vysvítá z rovnice (12); značíť tato křivku obsahující body, v nichž přímky, určené rovnicí $a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 = 0$, protínají přímku $y - a = 0$. Rovnice harmonické poláry počátku jest pak $y - 2a = 0$.

Z hlavní poučky v odstavci tomto odvozené plynou bezprostředně přemnohé vlastnosti křivek 3. stupně, zvláště ty, které bodů obratu se týkají a které obyčejně jinými methodami se odvozují. Buďtež tuto jen některé za příklad uvedeny:

Přímka spojující dva body obratu křivky 3. stupně prochází též třetím bodem obratu.

Dvě tečny obratu protínají se na harmonické poláře třetího bodu obratu.

Dvě tečny, z nichž každá jde jedním bodem obratu, proti-

nají se na harmonické poláře třetího bodu obratu, jímž zároveň prochází přímka spojující body dotyčné.

7. Předpokládejme *křivku 4. stupně* s bodem dvojnásobným; jest-li rovnice její

$$K_4 \equiv au_4 - (y - a) u_2 = 0, \qquad (13)$$

jest křivka ta vzhledem k počátku sama k sobě involučně homologickou. Rovnice $u_2 = 0$ značí dvě přímky, tečny to v bodě dvojnásobném; každá z nich měla by křivku protínati ještě v jednom mimo o ležícím bodě. Jest však z rovnice křivky zřejmo, že i tyto dva průsečíky leží v počátku, t. j. každá z těch dvou tečen jest tečnou obratu. Vyjadřuje tudíž rovnice (13) křivku stupně 4. s dvojnásobným bodem obratu.

*Křivka 4. stupně s bodem dvojnásobným jest vzhledem k bodu tomuto sama k sobě involučně homologická, jsou-li obě tečny v bodě tom tečnami obratu.**)

Z věty této a ze známých vlastností útvarů homologických snadně lze odvoditi mnohé poučky o křivkách toho druhu, které mohou býti obecně a nanejvýš 10. třídy, ve zvláštních případech pak třídy 8., 7., 6., 5. neb 4.

Osu homologie O a úběžnici U vyšetříme u křivek těchto týmž způsobem jako u křivek stupně 3.

Z vlastností na předešlém založených buďte uvedeny následující:

Bodem o lze ku křivce K_4 *stanoviti* 4 *tečny, jichž body dotyčné leží v přímce* O.

Paprsek svazku o stanoví v K_4 *dva body, které jsou bodem o a přímkou* O *harmonicky odděleny; tečny v bodech těch sestrojené protínají se na* O.

Spojíme-li bod o s jiným bodem obratu křivky K_4, *protíná spojnice křivku ještě v třetím bodu obratu, a tečny ve dvou posledních bodech sestrojené protínají se na* O.

Takových mimo o ležících bodů obratu má křivka K_4 přiměřeně své třídě 16, 10, 8, 4, 2 neb žádný.

Dvojnásobné tečny křivky K_4 *protínají se po dvou na přímce*

---

*) *Salmon — Fiedler,* Analyt. Geometrie der höheren ebenen Curven. S. 267.

O, *a příslušné body dotyčné leží po dvou na paprscích svazku o.* Tečen takových má křivka K_4 dle třídy své 16, 8, 4, 4, 2 neb 1.

Zvláštní pozornosti zasluhují křivky K_4, mají-li mimo bod o ještě dva body dvojobratu, t. j. body dvojnásobné s tečnami obratu; pak lze kterýkoli z těchto tří bodů zvoliti za střed homologie a přímku druhýma dvěma určenou za osu, vzhledem ku kterým se křivka sama v sebe transformuje. Příkladem takových racionalných křivek jest lemniskata, která má v nekonečně vzdálených bodech kruhových body dvojobratu.

Specielně zabývali se jimi *Em. Weyr*)*, *Ameseder**)* a *Beyel***)*; prvý dovodil o nich tuto pozoruhodnou větu:

Body dotyčné tečen, které lze ku křivce vésti z bodů přímky spojující dva dvojbody, leží třikrát po dvou ve třech přímkách jdoucích třetím dvojbodem.

Tyto trojiny paprskové tvoří kubickou involuci, ve které jsou přímky spojující třetí dvojbod s prvýma dvěma paprsky trojnásobnými.

Z pojednání druhého uvádíme tyto dvě věty:

Dvojnásobné tečny tvoří čtyrstran, jehož úhlopříčny jdou body dvojnásobnými.

Tečny obratu v jednom z dvojbodů tvoří harmonickou čtveřinu s paprsky spojujícími bod tento s ostatními dvojbody.

Výsledky tyto lze dle předcházejících úvah snadně odůvodniti.

8. Zakončíme krátké toto pojednání některými poznámkami, jednajícími o *křivkách n-stupně s bodem $(n-2)$-násobným.* Jakýkoli paprsek svazku o, ku př. $y - \alpha x = 0$ protíná křivku K danou rovnicí (6) mimo počátku ještě ve dvou bodech, jichž úsečky jsou kořeny rovnice

$$f_n x^2 + 2 f_{n-1} x + f_{n-2} = 0, \tag{14}$$

vznikající vyloučením y z rovnice křivky a rovnice paprsku; součinitelé f jsou funkce směrnice α. Oba průsečíky splynou v jediný, jest-li diskriminant

$$f^2_{n-1} - f_n f_{n-2} = 0.$$

---

*) Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math. naturw. Classe. Bd. LXVII. S. 286.

**) Tamtéž. Bd. LXXX. S. 495.

***) Schlömilch, Zeitschrift für Math. und Physik. 30. Jahrg. S. 1. u. 65.

Rovnice tato určuje směry tečen vedených ku křivce K bodem o a dotýkajících se jí v bodech mimo počátek ležících. Nahradíme-li zde hodnotu α podílem $\frac{y}{x}$ a násobíme-li pak mocninou x^{n-2}, obdržíme

$$u_{n-1}^2 - u_n u_{n-2} = 0 \qquad (15)$$

jakožto rovnici oněch tečen. Jest jich obecně $2(n-1)$. —

Vyhovuje-li α rovnici $f_{n-2} = 0$, jest příslušný paprsek tečnou křivky v bodě $(n-2)$-násobném; kořeny rovnice (14) jsou pak

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -\frac{2f_{n-1}}{f_n},$$

odkud jde, že každá tečna v bodu násobném protíná křivku v jednom dalším bodě. Za podmínky (9) přechází však u_{n-1} současně s u_{n-2} v nullu, a totéž lze říci o f_{n-1} a f_{n-2}; v případě tom jest tedy též $x_2 = 0$, t. j. každá tečna bodu násobného neprotíná pak křivku v dalším bodě, stávajíc se tečnou obratu. Naopak zase: má-li každá z tečen v bodě $(n-2)$-násobném býti tečnou obratu, musí f_{n-1} státi se současně s f_{n-2} rovným nulle; musí tudíž f_{n-1} lišiti se od f_{n-2} — rovněž také u_{n-1} od u_{n-2} — toliko lineárným činitelem. Podmínka tato jest totožna s onou, kterou rovnice (9) vyjadřuje.

Majíce vyšetřiti, kdy jest křivka n. stupně s bodem $(n-2)$-násobným sama k sobě homologickou, předpokládáme-li tento bod násobný středem homologie, byli jsme již v článku 4. vedeni ku dvěma nutným ale zároveň dostatečným podmínkám. První z nich (8) jest od povahy křivky neodvislá, vyžadujíc toliko, abychom zvolili dvojpoměr homologie harmonický, t. j. rovný -1; podmínce této můžeme vyhověti vždy. Podmínku druhou (9) možno splniti u všech křivek 2. a 3. stupně, při křivkách stupňů vyšších jen tenkráte, jsou-li — jak jsme právě poznali — tečny v bodě násobném tečnami obratu.

Přicházíme tedy k výsledku tomuto:

Má-li křivka n. stupně bod (n — 2)-násobný a jsou-li tečny v něm tečnami obratu, jest sama k sobě involučně homologickou, majíc bod ten středem homologie.

Každá křivka taková, jíž v následujícím budeme krátce jen K_n označovati, má rovnici tvaru (10), je-li příslušná osa homologie rovnoběžna k ose X. Rovnice této osy homologie jest pak $y - 2a = 0$.

9. Užívajíce stručného označení bodů a přímek zde se vyskytujících, můžeme dle zásad homologie vysloviti o křivce K_n věty následující:

Bodem o jde n tečen, které se křivky K_n *v jiných bodech dotýkají; body tyto leží v přímce* O.

Rovnice těchto tečen plynou z rovnice (15), užijeme podmínek (8) a (9), ve tvaru

$$4a^2 u_n - y^2 u_{n-2} = 0. \qquad (16)$$

Libovolný paprsek svazku o stanoví v K_n *dva body, které jsou bodem o a přímkou* O *harmonicky odděleny; tečny v bodech těch sestrojené protínají se na přímce* O.

Protneme-li K_n *dvěma paprsky svazku o v bodech* a, a' — b, b', *leží průsečíky přímek* $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, *pak* $\overline{ab'}$, $\overline{a'b}$ v přímce O.

Protneme-li K_n *libovolnou přímkou* P *v bodech* $a, b, c, \ldots$, *stanoví paprsky* $\overline{oa}, \overline{ob}, \overline{oc}, \ldots$ *v křivce body další* $a', b', c', \ldots$; *body tyto leží v jiné přímce* P′, *která se s* P *protíná v ose* O.

Má-li křivka K_n *mimo bod o ještě jiný bod obratu a spojíme-li tento s bodem o, seče spojující přímka křivku v dalším bodu obratu a tečny těchto dvou bodů protínají se na* O.

Paprsky jdoucí bodem o rovnoběžně k asymptotám protínají křivku K_n *v n bodech přímky* U; *tečna v každém z těchto bodů protíná se s příslušnou asymptotou na přímce* O. —

Věty tuto uvedené mohli bychom četnými jinými rozhojniti; přestáváme však na podaných ukázkách a odvodíme ku konci jen dvě ještě věty význačné pro křivky námi uvažované.

Ve zvláštním případu může se přímka O státi úběžnou; z rovnice $(om_0 mm') = -1$ plyne pak $\overline{om} : \overline{om'} = -1$, t. j. křivka K_n jest zde souměrna ku středu o. Jindy může bod o býti úběžným; pak jest $m_0 m : m_0 m' = -1$, t. j. přímka O jest průměrem křivky K_n půlíc tětivy k bodu o směřující. Jest-li při tom směr paprsků kolmý ku O, jest křivka K_n souměrna k této ose.

Obou těchto případů lze přiměřenou transformací homologickou vždy docíliti; tedy:

Křivka K_n *může homologicky přetvořena býti v křivku středově nebo osově souměrnou.* —

Nemá-li křivka K_n mimo bod $(n-2)$-násobný žádné jiné body násobné, jest — jak z *rovnic Plückerových* vysvítá — třídy $2(n-3)$; každým bodem dvojným zmenší se tato třída o 2, bodem vratu o 3 jednotky. Že nemůže míti K_n bod trojnásobný neb vícenásobný mimo bod o, jest patrno; má-li však mimo bod o nějaký bod dvojnásobný, musí tento náležeti ose O. Neboť kdyby ležel mimo ni, příslušel by mu dle zákonů homologie na paprsku svazku o ještě druhý bod dvojnásobný, a paprsek onen měl by s křivkou společných $n-2+2 \cdot 2 = n+2$ bodů, což jest u vlastní křivky n. stupně nemožno. *Má-li tedy křivka* K_n *mimo* $(n-2)$*-násobný bod o ještě některé body dvojnásobné, leží tyto na přímce* O. Kolik takových bodů nanejvýš býti může, poznáme z následujícího.

Křivka n. stupně může míti, jak známo, nejvýše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bodů dvojnásobných, nemá-li se rozpadnouti ve křivky nižších stupňů; při tom bod k-násobný zastupuje $\frac{k(k-1)}{2}$ bodů dvojnásobných. Má-li křivka ta bod $(n-2)$-násobný, může mimo něj míti nanejvýš

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = n-2$$

bodů dvojnásobných. Tohoto maxima nemůže však počet dvojnásobných bodů u křivky K_n dosáhnouti, jest-li $n > 4$. Jelikož totiž všechny tyto dvojbody v jediné přímce jsou obsaženy, může jich býti nanejvýš $\frac{n}{2}$, jest-li n sudé aneb $\frac{n-1}{2}$ při n lichém. Rozdíl mezi tímto počtem skutečným a počtem maximálným dříve stanoveným — tak zvaný *rod křivky* (dle *Clebsche, defekt* dle *Cayleye*) — jest tedy nejméně buď $n-2-\frac{n}{2}=\frac{n-4}{2}$ aneb $n-2-\frac{n-1}{2}=\frac{n-3}{2}$. Tím přicházíme ku poznání věty:

Křivka K_n *může mimo bod* $(n-2)$*-násobný míti nanejvýš* $\frac{n}{2}$ *aneb* $\frac{n-1}{2}$ *bodů dvojnásobných, dle toho jest-li n sudé neb liché, a musí tedy býti rodu nejméně* $\frac{n-4}{2}$ *aneb* $\frac{n-3}{2}$.