Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

O geom. místě bodů, z nichž se promítá trojúhelník daný na rovinu danou do trojúhelníků podobných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 1, 14--16,17--30

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122216`

O geom. místě bodů, z nichž se promítá trojúhelník daný na rovinu danou do trojúhelníků podobných.

Podává **V. Jeřábek**.

V článku „*O perspektivní souvislosti trojúhelníku nerovnostranného a trojúhelníku rovnostranného*“ pojednal jsem poprvé o svrchu uvedeném geom. místě v „*Archivu mathematiky a fysiky*“*), a později o témž předmětu jedná ve výtahu článek „*Sur un problème de perspective*“, uveřejněný v *Mathesis.***) Že se k témuž předmětu vracím, má ten účel, abych některé vlastnosti v dotčených článcích již uvedené jednodušším způsobem vyvinul a jiné připojil.

1. Buďtež zobrazeny daného trojúhelníku abc průměty $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ (obr. 1.) a jeho roviny stopa P^ϱ jdoucí body α, β, γ, v nichž bc, ca, ab protínají prvou průmětnu Π. Centrálným průmětem (vrženým stínem) trojúhelníku abc z jistého středu s (bodu svítícího) na průmětně Π budiž trojúhelník $a'b'c'$, o němž předpokládáme, že jest podoben danému trojúhelníku $a^0b^0c^0$.

Kružnice $(a'b'c')$ nechť má s kružnicí $B \equiv (\alpha b'\gamma)$ mimo b' ještě společný bod S. V trojúhelníku $\alpha\beta c'$ jest úhel

$$a'\beta\gamma = b'\alpha\gamma - b'c'a' = b'S\gamma - b'Sa' = a'S\gamma,$$

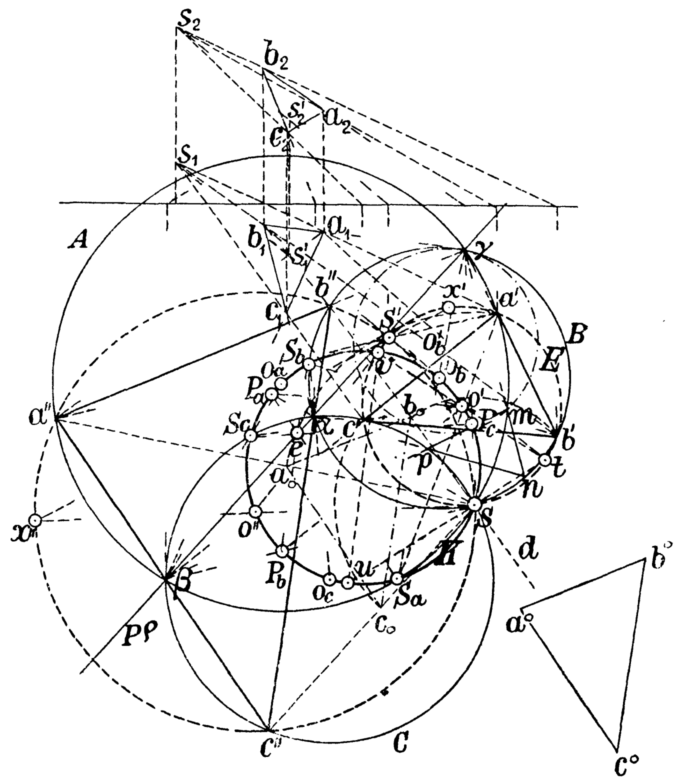
leží tudíž $a'\gamma\beta S$ na kružnici A. Dle analogie jsou body $\alpha\beta c'S$ na kružnici C.

Jest nekonečně mnoho trojúhelníkův $a'b'c'$ podobných trojúhelníku $a^0b^0c^0$, jejichž strany $a'b'$, $b'c'$, $c'a'$ procházejí pevnými body γ, α, β, vrcholy jejich vyplňují kružnice A, B, C, a kružnice $(a'b'c')$ stále prochází pevným společným bodem S těchto kružnic. Trojúhelník $a'b'c'$ jest ve všech svých polohách persp. kollineárný (homologický) dle osy P^ϱ s trojúhelníkem abc i jeho průmětem $a_1b_1c_1$; střed kollineační s, jak později ukážeme, vyplňuje prostorovou křivku L a střed kollineační s_1 její průmět L_1.

*) Dr. *Emil Weyr*, Archiv mathematiky a fysiky. 1876.

**) *Mathesis*, 1882. »*Sur un problème de perspective*«, d'après Jeřábek (J. Neuberg).

Buď $a''b''c''$ jinou polohou trojúhelníku proměnného $a'b'c'$, a předpokládejme, že v určité poloze je trojúhelník $a'b'c'$ shodný s trojúhelníkem $a^0b^0c^0$.



Obr. 1.

Úhly $a'Sb'$ a $a''Sb''$ jsou stejny, neboť se rovnají stejným úhlům trojúhelníkův $a'b'c'$, $a''b''c''$ při vrcholech c', c''. Přičteme-li k těmto stejným úhlům úhel $a'Sb''$, dostaneme též stejné úhly $a'Sa''$ a $b'Sb''$. Z týchž důvodů úhel $b'Sc' = b''Sc''$ a úhel $c'Sa' = c''Sa''$; dále pak úhel $b'Sb'' = c'Sc'' = a'Sa''$. Tedy:

Každé dvě homologické strany podobných trojúhelníkův $a'b'c'$, $a''b''c''$ lze z bodu S viděti stejnými úhly.

Úsečky spojující homologické vrcholy trojúhelníků podobných $a'b'c'$, $a''b''c''$ lze spatřiti z bodu S stejnými úhly.

Trojúhelníky $a'b'S$, $a''b''S$ mají kromě úhlů při vrcholu S ještě stejné úhly při vrcholech b', b'', neboť oba jsou výplňkem úhlu $Sb''\gamma$; jest tudíž trojúhelník $a'b'S \sim a''b''S$. Též takové trojúhelníky jsou $Sb'c'$, $Sb''c''$ a $Sc'a'$, $Sc''a''$.

Nyní lze trojúhelník $a'b'c'$ otočiti okolo bodu S, až přijde a' do a_0 na $a''S$, b' do b_0 na $b''S$ a c' do c_0 na $c''S$. Otočený trojúhelník $a_0b_0c_0$ jest homothetický (podobný a podobně položený) k trojúhelníku $a''b''c''$ dle středu S a shodný s trojúhelníkem $a^0b^0c^0$. Bod S je samodružným bodem (středem otáčení) nejen rovin shodných trojúhelníkův $a'b'c'$, $a_0b_0c_0$, ale i trojúhelníků podobných $a'b'c'$, $a''b''c''$.

Po těchto úvahách řešme úlohu:

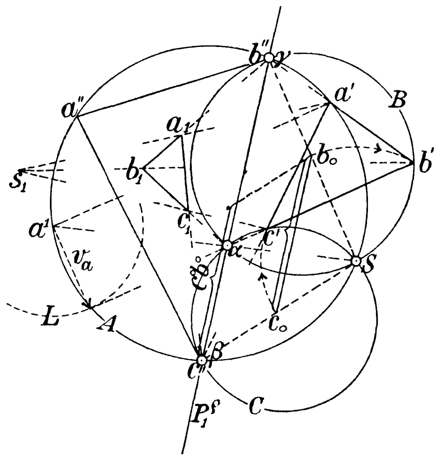
Sestrojiti daného trojúhelníku abc cent. průmět $a'b'c'$ na průmětně Π shodný s trojúhelníkem $a^0b^0c^0$.

Sestrojme na průmětně Π některý trojúhelník $a''b''c''$ (obr. 1.) podobný trojúhelníku $a^0b^0c^0$ tak, aby jeho strany $b''c''$, $c''a''$, $a''b''$ procházely resp. body α, β, γ, v nichž strany daného trojúhelníku abc protínají průmětnu Π. Potom kružnicemi $A \equiv (a''\beta\gamma)$, $B \equiv (b''\gamma\alpha)$, $C \equiv (c''\alpha\beta)$ stanovme samodružný bod S, a narýsujme trojúhelník $a_0b_0c_0$ homothetický k trojúhelníku $a''b''c''$ dle středu S a shodně s trojúhelníkem $a^0b^0c^0$. Nyní otočme vrcholy $a_0b_0c_0$ okolo středu S o stejné úhly ve smyslu souhlasném do kružnic A, B, C, tím dostaneme vrcholy hledaného trojúhelníku $a'b'c'$. Střed promítání s je středem perspektivně kollineárných trojúhelníkův $a'b'c'$, abc, a v jeho průmětu s_1 protínají se spojnice $a'a_1$, $b'b_1$, $c'c_1$; sestrojení průmětu s_2 provede se, jak ukazuje obrazec.

Sestrojení poněkud se zjednoduší, zvolíme-li trojúhelník $a''b''c''$ tak (obr. 2.), aby se stotožnil jeho vrchol b'' s γ a c'' s β. Kruhem $A \equiv (a''b''c'')$ jest v kruhu B, jenž prochází bodem α a dotýká se strany $a''b''$ v bodě γ, určen samodružný bod S, který též náleží kruhu $C \equiv (\alpha\beta S)$, dotýkajícímu se strany $a''c''$ ve vrcholu $c'' \equiv \beta$. Sestrojíme-li dále $b_0c_0 = b^0c^0$ homotheticky k $b''c''$ dle středu S, můžeme pak otočiti okolo bodu S bod b_0 do b' na B a c_0 do c' na C. Třetí vrchol a' na A stanoví se již snadno spojnicí $b'\gamma$ nebo $c'\beta$.

Vrcholy trojúhelníku $a_0b_0c_0$ (obr. 1.) mohli bychom ještě otočiti okolo bodu S do kružnic A, B, C ve smyslu dřívějšímu protivném, tím obdrželi bychom druhý trojúhelník, jenž úloze dané vyhovuje.

Trojúhelník $a''b''c''$ lze sestrojiti též po druhé straně stopy P^ϱ, vyhovují tedy úloze dané ještě dva trojúhelníky shodné, avšak smyslu protivného s trojúhelníkem $a^0b^0c^0$. V celku jsou tedy čtyři středy, z nichž se trojúhelník abc promítá na II do trojúhelníků shodných s trojúhelníkem $a^0b^0c^0$; dva z nich jsou s trojúhelníkem $a''b^0c^0$ smyslu souhlasného a dva protivného.



Obr. 2.

Veďme bodem a' (obr. 2.) rovnoběžku se stranou $b'c'$, a její průsečík s přímkou $S\alpha$ buď a^1. Úhel $a'a^1S = b'\alpha S = b'\gamma S = a'\gamma S$, pročež leží a^1 na kružnici A a má v ní polohu pevnou, paprskem $S\alpha$ stanovenou. Ježto vzdálenost bodu a^1 od strany $b'c'$ rovná se výšce v_a trojúhelníku $a'b'c'$ jdoucí jeho vrcholem a', jest $b'c'\alpha$ tečnou kruhu L sestrojeného ze středu a^1 poloměrem v_a. Z toho plyne toto sestrojení trojúhelníku $a'b'c'$.

Sestrojí se dvěma kružnicemi, na př. A, B, bod S, pak spojnice $S'\alpha$ protíná kružnici A v dalším bodě a^1, tak že bude $a^1a'' \parallel b''c''$. Ze středu a^1 poloměrem v_a narýsuje se kružnice L, bodem α vede se k ní tečna, jež stanoví v kružnici B vrchol

b' hledaného trojúhelníku $a'b'c'$; ostatní dva vrcholy a', c' sestrojí se již snadno. Ježto z bodu α lze vésti ještě jednu tečnu ke kružnici L, vyhovuje úloze ještě druhý trojúhelník, jak již dříve bylo uvedeno.*)

2. Mějme (obr. 1.) polohu trojúhelníku $a'b'c'$ za proměnlivou, při čemž arci předpokládáme, že trojúhelník tento svou podobu nemění a že jeho strany stále procházejí pevnými body α, β, γ. Vytkneme-li některý bod o' v podobně proměnlivém trojúhelníku $a'b'c'$, jehož vrcholy popisují kružnice A, B, C, pak bod zmíněný přemísťuje se zároveň s trojúhelníkem $a'b'c'$ a zůstává svým vlastním bodem homologickým. Úhly obvodové $b'a'o'$, $c'a'o'$ nemění své velikosti, a že jejich ramena $a'b'$, $a'c'$ stále procházejí resp. body γ, β kružnice A, otáčí se přímka $a'o'$ okolo pevného bodu S_a kružnice A. Podobně přímky $b'o'$, $c'o'$ otáčejí se okolo pevných bodů S_b, S_c kružnic B, C.

Geom. místem bodu o' jest kružnice K, opsaná trojúhelníku $S_aS_bS_c$, neboť úhly $S_ao'S_b$, $S_bo'S_c$, $S_co'S_a$ jsou stálé a body S_a, S_b, S_c pevné.

Kružnice K prochází též bodem S, neboť skutečně promění se trojúhelník $a'b'c'$ v bod S, směřují-li jeho strany k tomuto bodu, a s bodem tímto stotožňuje se zároveň bod o'.

Buď o' středem kruhu opsaného trojúhelníku $a'b'c'$**). Středy o_a, o_b, o_c kruhův A, B, C jsou zvláštními polohami středu o', obsahuje tudíž kružnice K též středy o_a, o_b, o_c.

Tedy:

Geom. místem středu o' kruhu, který opsán jest podobně proměnnému trojúhelníku $a'b'c'$, je kružnice K obsahující body $S_aS_bS_co_ao_bo_cS$.

Tato věta vede nás k jinému sestrojení trojúhelníku $a'b'c'$. Sestrojme kružnici K, určenou středy o_a, o_b, o_c kruhův A, B, C, protněme ji ze středu S kruhovým obloukem, jehož poloměr rovná se poloměru kruhu trojúhelníku $a^0b^0c^0$ opsaného, ve dvou bodech; body tyto jsou středy centr. průmětů trojúhelníku abc.

---

*) Srovnej článek prof. Jar. Doležala: Trojúhelník abc osvětliti tak, aby stín jeho na průmětně měl daný tvar $a_0b_0c_0$. Časopis pro pěstování math. a fysiky, 1907, str. 203.

**) Pro tuto polohu bodu o' jsou pevné body S_a, S_b, S_c a kružnice K v obr. 1. vyznačeny.

Je-li o' jedním z těchto středů, lze z něho sestrojiti kružnici jdoucí bodem S; kružnice tato určuje na A, B, C vrcholy a', b', c' hledaného trojúhelníku $a'b'c'$.

3. Sestrojíme-li střed o'' (obr. 1.) trojúhelníku $a''b''c''$, bude střed tento ležeti též na kružnici K. Buďtež x', x'' koncové body průměrů $So'x'$, $So''x''$ kruhův $(a'b'c')$, $(a''b''c'')$, které mají mimo bod S ještě druhý společný bod S'. Ježto úhly $x'S'S$, $x''S'S$ jsou pravé, leží body x', S', x'' v téže přímce. Středové úhly $a'o'x'$, $a''o''x''$ jsou stejny, neboť rovnají se stejným úhlům obvodovým $So'S_a$, $So''S_a$ v kruhu K; avšak poloviny řečených úhlů středových jsou obvodovými úhly $a'S'x'$, $a''S'x''$, pročež jsou i tyto úhly stejny, a že mají smysl souhlasný a dvě ramena v téže přímce, leží body $a'S'a''$ v jedné přímce. Obdobně procházejí i spojnice $b'b''$, $c'c''$ bodem S'. Máme-li trojúhelník $a''b''c''$ za pevný a $a'b'c'$ za podobně proměnný, můžeme pronésti větu:

*Jest nekonečně mnoho trojúhelníkův $a'b'c'$ zároveň podobných a perspektivně kollineárných k pevnému trojúhelníku $a''b''c''$ dle osy P^ϱ; středy kollineační S' jsou na kružnici $(a''b''c'')$, a vrcholy trojúhelníkův $a'b'c'$ vyplňují kružnice $A \equiv (a''\beta\gamma)$, $B \equiv (b''\gamma\alpha)$, $C \equiv (c''\alpha\beta)$.**)

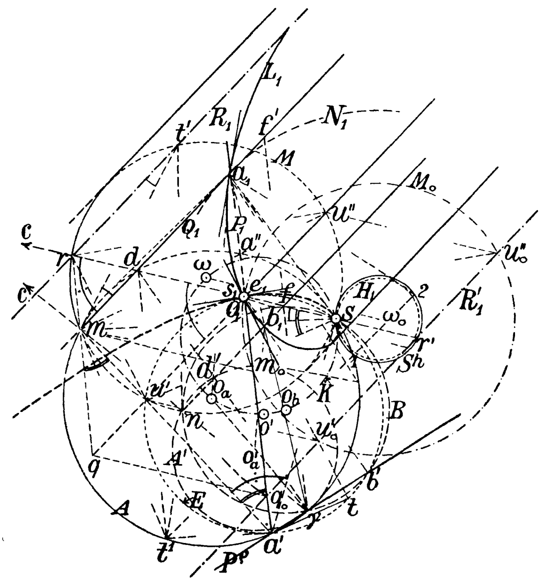
4. Můžeme si mysliti tři soustavy Σ_a, Σ_b, Σ_c ve stejném smyslu podobné, v nichž jsou α, β, γ body homologickými a $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ přímkami homologickými; S_a, S_b, S_c jsou body samodružnými soustav $\Sigma_b\Sigma_c$, $\Sigma_c\Sigma_a$, $\Sigma_a\Sigma_b$. Přímky vedené bodem o kruhu K (cercle de similitude) rovnoběžně s přímkami homologickými $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ protínají tento kruh v bodech neproměnlivých (points invariables) P_a, P_b, P_c; střed e homologie (perspekt. kollineace) trojúhelníků $S_aS_bS_c$, $P_aP_bP_c$ leží na P^ϱ, a přímky αP_a, βP_b, γP_c procházejí bodem S. Je-li o' průsečíkem výšek trojúhelníku $a'b'c'$, jest e středem kruhu K, jenž je vyplněn orthocentrem o' měnícího se trojúhelníku $a'b'c'$.**)

---

*) *V. Jeřábek: Sur les triangles a la fois semblables et homologiques* (Nouvelle démonstration d'un théoreme de M. Sondat). Mathesis, roč. 1896, stránka 81.

**) Ibid. str. 82. Vlastnosti zde uvedené a jiné najde čtenář elementárně odvozeny v článku »*O některých vlastnostech dvou a tří soustav homografických* etc.«, který jsem uveřejnil ve *Výroční zprávě* c. k. české reálky v Brně r. 1886, str. 25—27.

5. *Geom. místo středů* s, s_1. Přímky aa', bb', cc' procházející středem kollineačním s (obr. 1.) jsou přímkami povrchovými kuželů (aA), (bB), (cC), mající za vrcholy body a, b, c a za podstavy kruhy A, B, C. Kterékoliv dvě z těchto ploch, na př. (aA), (bB), protínají se v křivce stupně čtvrtého, která jest geom. místem průsečíku s jejich povrchových přímek aa', bb'; avšak plochy (aA), (bB) mají společnou přímku $ab\gamma$, skládá se tedy jejich pronik z jedné přímky $ab\gamma$ a křivky L stupně třetího, která prochází body $abcS$ a nekonečně vzdálenými body kruhovými, jimiž kružnice A, B též probíhají. Průmět L_1 křivky L obsahuje body $a_1 b_1 c_1 S$ jakož i úběžné body kruhové průmětny Π, pročež jest L_1 cirkulárnou křivkou kubickou.



Obr. 3.

Křivka L_1 jest v obr. 3. zobrazena jakožto průmět křivky proniku L kuželů (aA), (bB), jejichž kruhové podstavy A, B o středech o_a, o_b jsou v průmětně Π. Společná površka ab těchto kuželů má svou stopu v bodě γ ležícím zároveň v kružnicích A, B, které mimo bod γ mají ještě společný bod S. Přímkou ab proložená kterákoliv rovina ϱ má svou stopu P^ϱ na Π v přímce $a'\gamma b'$, jejíž jeden bod a' leží na A a druhý b' na B. Rovina ϱ seče povrchy kuželů (aA), (bB) v přímkách aa', bb', jejichž společný bod s má svůj průmět v průsečíku $s_1 \equiv (a_1a', b_1b')$. Otáčíme-li rovinu ϱ kolem přímky $ab\gamma$, vytvoří bod s křivku proniku L ploch kuželových (aA), (bB), a jeho průmět s_1 popíše průmět L_1 této křivky.

K úběžnému bodu křivky L dospějeme, pošineme-li ve směru ab kužel (aA), až jeho vrchol a přijde do vrcholu b; kruhová podstava A' posunutého kužele (bA') dotýká se kružnice A v bodě γ, a její střed o'_a na $o_a\gamma$ určen je přímkou $b_1o'_a \parallel a_1o_a$. Kružnice A', B mají mimo bod γ ještě společný bod n, spojnice tohoto bodu s vrcholem b stanoví společnou přímku povrchovou kuželů (b, B), (b, A'), která jest rovnoběžna s přímkou am plochy kuželové (aA); jest tudíž společný úběžný bod přímek am, bn úběžným bodem křivky L a úběžný bod průmětů a_1m, b_1n úběžným bodem průmětu L_1.

Obdobně jest určen v obr. 1. úběžný bod křivky L, která není sestrojena, směrem přímky am, jež jest společnou površkou kužele (aA) a (aB')*), jenž jest posunutou polohou kužele (bB) ve směru ba, tak že $b \equiv a$. Střed kruhové podstavy $B' \equiv (o'_b, o'_b\gamma)$ jdoucí bodem γ, je na $o_b\gamma$ určen přímkou $a_1o'_b \parallel b_1o_b$; v bodě m protínají se mimo γ kružnice A, B'. Obrazec zároveň ukazuje sestrojení trojúhelníku mnp, do něhož promítá se směrem am trojúhelník abc.

Tečna křivky L (obr. 3.) v bodě s je průsečnicí tečných rovin kuželů (aA), (bB) podél přímek saa', sbb', stopy těchto tečných rovin dotýkají se kruhův A, B v bodech a', b', a jejich společný bod t jest stopou tečny st, pročež dává spojnice ts_1 tečnu křivky L_1 v bodě s_1.

Víme, že na kuželi (aA) je přímka $am \parallel bn$ a že její stopou m jest průsečík jejího průmětu $a_1m \parallel b_1n$ s kružnicí A. Tečny mt', nt' kruhův A, B jsou stopami tečných rovin kuželů (aA), (bB) podél jejich přímek rovnoběžných am, bn. Vedeme-li tedy bodem t', v němž se zmíněné tečny protínají, rovnoběžku R s $am \parallel bn$, dostaneme asymptotu křivky L jakožto průsečnici

*) Písmeno B' není v obrazci vyznačeno.

rovin tečných v jejím bodu úběžném. Asymptota křivky L_1 jest tudíž v přímce R_1 jdoucí bodem t' rovnoběžně s $a_1m \parallel b_1n$, do níž promítá se asymptota R mající svou stopu v bodě t'.

Z každého svého bodu s promítá se křivka L kuželovou plochou stupně druhého, neboť rovina procházející tímto bodem seče L jen ve dvou dalších bodech a tedy kužel promítající (sL) ve dvou přímkách povrchových. Průmětem křivky L z bodu s jest tudíž kuželosečka E probíhající úběžnými body kruhovými průmětny Π; proto je E kružnicí jdoucí body $a'b'S$, neboť body a, b z bodu s promítají se do a', b' a bod S křivky jest svým vlastním průmětem. Ježto do bodu t promítá se tečnou st bod ku s soumezný, prochází kružnice E též bodem t.

Ze svého úběžného bodu u promítá se křivka L plochou válcovou do kružnice M probíhající body $mnSt'$, do nichž směrem am promítají se body $abSu$.

7. Sestrojme průmět s'_1 (obr. 1.) středu kollineačního s' perspektivných trojúhelníkův abc, $a''b''c''$. Přímka ss' jest společnou přímkou povrchovou kuželů $s(a'b'c')$, $s'(a''b''c'')$, pročež má přímka tato svou stopu v průsečíku S' kružnic $(a'b'c')$, $(a''b''c'')$ procházejících bodem S. Ježto trojúhelník abc ze středu s promítá se do trojúhelníku $a'b'c'$ a ze středu s' do trojúhelníku $(a''b''c'')$, jest S' středem a P^{ϱ} osou perspektivně kollineárných trojúhelníkův $a'b'c'$, $a''b''c''$, jak bylo již dříve jiným způsobem dokázáno.

8. Středové přímky (obr. 1.) $o_a o_b$, $o_a o_c$ stojí kolmo na příslušných společných tětivách $S\gamma$, $S\beta$ kruhův AB, AC, jest tedy ostrý úhel $o_b o_a o_c$ výplňkem tupého úhlu $\beta S \gamma$ jakož i úhlu $\beta a' \gamma$; avšak tohoto úhlu je též výplňkem $b'a'c'$, pročež jsou si úhly $o_b o_a o_c$ a $b'a'c'$ rovny. Obdobně rovnají se úhly trojúhelníku $o_a o_b o_c$ při vrcholech o_b, o_c úhlům trojúhelníku $a'b'c'$ při vrcholech b', c'; *jsou tudíž trojúhelníky* $o_a o_b o_c$ *a* $a'b'c'$ *podobny.*

Již dříve jsme poznali, že tečny kruhův A, B, C v bodech a', b', c' jsou stopami tečných rovin kuželův (aA), (bB), (cC) podél přímek aa', bb', cc' a že se protínají na kružnici $E \equiv (a'b'c')$ v témž bodě t. Kolmice, v bodech a', b', c' na uvedené tečny postavené, procházejí koncovým bodem v průměru $to'v$ kruhu E a zároveň středy o_a, o_b, o_c kruhův A, B, C, neboť kolmice zmíněné jsou poloměry těchto kruhův. Úhel $o_a v o_b$ jest výplňkem úhlu

$a'vb' = a'c'b' = o_a o_c o_b$, pročež leží bod v též na kružnici K. Máme tedy větu:

Trojúhelníky $a'b'c'$, $o_a o_b o_c$ jsou v perspektivné kollineaci vzhledem ke středu kollineačnímu v, v němž kružnice E mimo bod S protíná ještě kružnici K.

9. Nyní ještě ukážeme, že stopa t tečny st křivky L v průmětně π popíše kardioidu, mění-li bod s po křivce L svou polohu. Jest totiž, jak jsme nahoře uvedli, stopa t průsečíkem tečen vedených ke kružnicím A, B, C v bodech $a'b'c'$, a otáčíme-li $a'b'$ kolem bodu γ, svírají tečny v bodech a', b' úhel $a'tb' = a'c'b'$ nepromněnné velikosti; pročež popisuje bod t *Pascalovu závitnici (kardioidu).*

Přímo můžeme vésti důkaz takto: Veďme v kruhu K (obr. 1.) průměr uv a v kruhu E průměr $to'v$; body t, S, u leží v téže přímce, neboť pravoúhlé trojúhelníky uSv, tSv mají společnou odvěsnu Sv; avšak tětiva uo' kruhu K půlí kolmo průměr tv, pročež jest $ut = uv$.

Geom. místem bodu t jest tedy konchoida (kardioida) kruhu K pro pól S a stálou délku ut, rovnající se průměru kruhu K.

10. *Dvojný bod křivky L_1.* Asymptota R_1 křivky L_1 (obr. 3.) nechť protíná ještě kruh M v bodě r a průsečíkem přímek Sr, $Q_1 \equiv a_1 m$ budiž d. Potom jest

$$\sphericalangle\, t'md = \sphericalangle\, mt'r,$$

$$\sphericalangle\, mSd \equiv \sphericalangle\, mSr = \sphericalangle\, mt'r,$$

tedy $$\sphericalangle\, t'md = \sphericalangle\, mSd.$$

Uvážíme-li ještě, že mt' dotýká se kruhu A v bodě m, pak vysvitne, že bod d jest na kružnici A. Z téhož důvodu prochází kružnice B bodem f, ve kterém $b_1 n$ protíná přímku Sr.

Ježto úhel $m\gamma d = mSd \equiv mSr = mnr$, jest $d\gamma \parallel rn$. Protněme přímkou $mn\gamma$ přímku Sr v bodě c, jest tedy

$$\frac{cr}{cd} = \frac{cn}{c\gamma};$$

též jsou dm a fn spolu rovnoběžny, pročež

$$\frac{cd}{cf} = \frac{cm}{cn};$$

znásobíme-li tyto úměry, bude

$$\frac{cr}{cf} = \frac{cm}{c\gamma}$$

a

$$rm \parallel f\gamma.$$

Rovnoběžkou $P_1 \parallel rm \parallel f\gamma$, vedenou bodem a_1, protněme přímku rS v bodě O_1. Dále budiž d' průsečíkem přímek $d\gamma$, $b_1 n$ a f' přímek $a_1 m$, γf.

Nyní jest $\frac{dO_1}{fO_1} = \frac{da_1}{f'a_1} = \frac{d'b_1}{fb_1}$, z rovnosti prvního a posledního poměru jde dále, že $b_1 O_1 \parallel dd'\gamma \parallel rn$. Mějme úsečku $a_1 m$ za pevnou a body b_1, n na příslušných křivkách L_1, M za pohyblivé. Bodem O_1 proložená přímka $u'u'' \parallel a_1 m \parallel b_1 n$ protniž kružnici M v bodech u', u''. Přijde-li proměnný bod n po kružnici M do u', stotožní se proměnný bod b_1 křivky L_1 s bodem O_1, tím se stane tento bod po prvé bodem křivky L_1, a jeho tečna jest rovnoběžna s $u'r$. Zaujme-li bod n na kružnici M polohu u'', stane se O_1 po druhé bodem křivky L_1, jehož tečna jde rovnoběžně s $u''r$. Bod O_1 jest tudíž dvojným bodem křivky L_1, a určení jeho na rS jest jednoduché, neboť $a_1 O_1 \parallel mr$ a $b_1 O_1 \parallel nr$. Dle toho, protíná-li $\overline{u'u''}$ kružnici M, nebo dotýká-li se jí anebo jde mimo, jest O_1 bodem uzlovým, úvratu nebo isolovaným.

11. *Křivka Ĺ jakožto pronik válce s hyp. paraboloidem.* Vytkněme na válci, jehož základní křivkou jest kružnice M, přímku $R \parallel Q \equiv am$ jdoucí bodem r *) a postavme v bodě O_1 kolmici O na průmětnu π. Průmětem přímky R jest $R_1 \equiv rt'$, a kolmice O má svůj průmět v bodě O_1.

Přímku $P_1 \equiv a_1 O_1$ lze míti za průmět přímky $P \parallel P_1 \parallel rm$ protínající povrchovou přímku Q, jíž přináleží průmět $Q_1 \equiv a_1 m$ v bodě a; je tedy bod $(P_1 Q_1) \equiv a_1$ průmětem bodu a. Podotkneme-li ještě, že přímka P, jsouc rovnoběžna s mr, protíná též přímku R, můžeme přímky O, R a průmětnu π prohlásiti za útvary řídící hyp. paroboloidu. Jeho přímkou tvořící jest P, ona protíná proměnnou přímku Q válce v bodě a, jenž svou

*) Tuto přímku R od asymptoty, kterou jsme dříve též R značili, dlužno rozlišovati.

polohu po křivce L mění; jeví se nám tudíž L_1 jakožto průmět křivky proniku L plochy válcové a hyp. paraboloidu.

Řídící přímka O proniká plochu válce ve dvou bodech s, e, z čehož též patrno, že má L_1 v bodě $s_1 \equiv e_1 \equiv O_1$ svůj bod dvojný. Povrchové přímky válce, které procházejí body s, e, mají své stopy v bodech u', u'' na M; stopou plochy kužele (sL) jest kružnice E, obsahující body $a'b'Ss_1u'$. Je-li s_1 isolovaným bodem dvojným, je kužel (sL) imaginárný.

12. *Tečna křivky L_1 jakožto průmět průsečnice roviny tečné hyp. paraboloidu a roviny tečné válce v bodě a*

Je-li t^1 na A stopou površky t^1a plochy (aA), dotýkající se křivky L v bodě a_1, je stopa tato stanovena stopami rovin tečných hyp. paraboloidu a válce v bodě a. Stopa roviny tečné válce jest tečnou mt^1 jeho kruhové podstavy M v bodě m. Zbývá nám tudíž ještě určiti stopu roviny tečné hyp. paraboloidu v bodě a. K tomu cíli uvažme, že první rovinou řídící jest průmětna Π a druhou rovina promítající (RR_1). Přímky R, O mají své stopy v bodech r, O_1, pročež je rO_1 stopou hyp. paraboloidu. Jeho rovina tečná v bodě a je určena přímkou první soustavy $P \parallel \Pi$ a druhé $Q^1 \parallel (RR_1)$, jež má svůj průmět v Q_1 a svou stopu v bodě d na stopě rO_1; sestrojíme-li tedy dt^1 rovnoběžně s $P_1 \parallel P \parallel rm$, dostaneme stopu roviny tečné hyp. paraboloidu. Spojíme-li posléze stopu t^1, v níž se stopy dotčených rovin tečných protínají, s bodem a_1, obdržíme tečnu křivky L_1 jakož průmět průsečnice rovin tečných válce a hyp. paraboloidu.

13. *Křivka L_1 jest cissoidálou.* Buď q průsečíkem přímek rm a $u'u''$ (obr. 3.); pošiňme kruh M směrem rs_1 o délku rs_1, při tom pošinou se o touž délku jeho střed ω do ω_0 $(\omega\omega_0 = rs_1)$, bod m do m_0 $(mm_0 = rs_1)$ a q do q_0 $(qq_0 = rs_1)$; body m_0, q_0 jsou na $P_1 \equiv a_1s_1$. Posunutý kruh M_0 má svůj střed v ω_0 a prochází body s_1, m_0 a kromě toho posunutými body

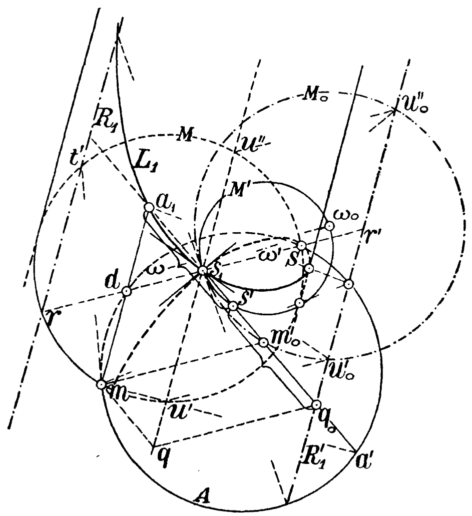
$$u'_0,\ u''_0\ (u'u'_0 \# u''u''_0 \# rs_1),$$

v nichž přímka R'_1, jdoucí bodem q_0 rovnoběžně k $u'u''$, protíná kružnici M_0. Nyní je zřejmo, že $a_1s_1 = mq = m_0q_0$, pročež jest L_1 cissoidálou.*)

---

*) Křivka L_1 jest i tehdy cissoidálou, je-li M jakoukoliv křivkou základní válce.

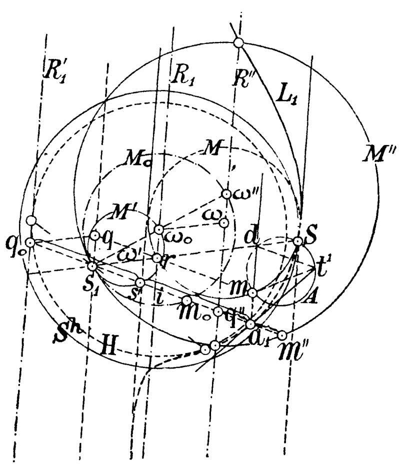
14. *Křivkou L lze proložiti rotační hyperboloid přímkový.* Ze shodných trojúhelníkův $a_1 s_1 \omega_0$, $m_0 q_0 \omega_0$ jde, že $\omega_0 a_1 = \omega_0 q_0$; pročež prochází kružnice N_1 ze středu ω_0 poloměrem $\omega_0 q_0$ sestrojená bodem a_1. *Křivka L_1 jest tedy výtvarem svazku paprskového o středu s_1 a s ním projektivného soustředného svazku kružnic.* Křivka L_1, procházejíc imaginárnými body kruhovými soustředného svazku kružnic, má v těchto bodech se svazkem kružnic společné tečny, jejichž průsečíkem jest bod ω_0; proto jest bod tento mimořádným ohniskem křivky L_1.



Obr. 4.

Vytkněme na přímce $R'_1 \equiv u'_0 u''_0$ bod r', jenž má souměrnou polohu k bodu r dle středu s_1. Bod r' budiž stopou a R'_1 průmětem přímky R' druhé soustavy hyperbolického paraboloidu již dříve vzpomenutého. Přímka R' protíná přímku $P \parallel P_1$ první soustavy v bodě p, jehož průmět p_1 jest v bodě q_0. Kruh N_1 o středu ω_0 a poloměru $\omega_0 q_0$ lze míti za orth. průmět kruhu N, jenž prochází bodem a křivky L jakož i průsečíkem p přímek P, R. Geom. místem proměnného kruhu N, jehož střed ω' stále zůstává na kolmici postavené v bodě ω_0 na π, jest rotační hyperboloid přímkový, mající $\omega' \omega_0$ za osu. Stopou hyperboloidu jest kruh S_h o středu ω_0 a poloměru $\omega_0 r'$; rovník H (kruh zúžení) hyperboloidu promítá se do kruhu H_1, jenž prochází bodem S a má ω_0 za střed. *Ježto P a N protínají se v bodě a, jeví se L_1 jakožto průmět křivky průniku L rotačního hyperboloidu sborceného s hyp. paraboloidem.*

Rovina tečná hyperboloidu v bodě a jest určena přímkami $a1$, $a2$, které mají své průměty v tečnách $a_1 1$, $a_1 2$ kruhu H_1 a své stopy 1, 2 v bodech na S_h tak položených, že dotyčné jejich body na H_1 leží uvnitř úseček $a_1 1$, $a_1 2$, neboť rovník H a bod a leží nad stopou S_h. Přímka 12, jsouc stopou roviny tečné, prochází stopou t^1 tečny at^1.



Obr. 5.

15. *Jiné vytvoření křivky.* Víme, že trojúhelník $a_1 q_0 \omega_0$ jest rovnoramenný ($\omega_0 a_1 = \omega_0 q_0$), (obr. 4.), proto půlí pata s' jeho výšky $\omega_0 s'$ úsečku $a_1 q_0$ i úsečku $s_1 m_0$, a bod s' leží na kružnici M' mající $s_1 \omega_0$ za průměr. Můžeme tedy křivku L_1 definovati takto: *Jest dán kruh M'* (obr. 4., 5. a 6.), *na jeho obvodě pevný bod s_1 a v jeho rovině pevná přímka R'_1. Bodem s_1 jdoucí paprsek protíná M' v bodě s' a přímku R'_1 v bodě q_0; učiníme-li $a_1 s' = s' q_0$, jest geom. místem bodu a_1 křivka L_1.*

Z koncového bodu ω_0 průměru $s_1\omega'\omega_0$ sestrojme ještě kruh M_0 a v něm bod m_0 paprskem s_1s' (obr. 5. a 6.). Prodlužme tětivu s_1m_0 o délku $m_0m'' = s_1m_0$ a sestrojme kruh M'' jdoucí bodem m'' tak, aby se dotýkal kruhů M_0, M' v bodě s_1; střed ω'' kruhu M'' jest koncovým bodem průměru $s_1\omega_0\omega''$ kruhu M_0. Je-li i průsečíkem asymptoty R_1, jež jest souměrna k R'_1 dle s_1, s přímkou s_1a_1, jest $s_1i = q_0s_1 = m_0a_1$;

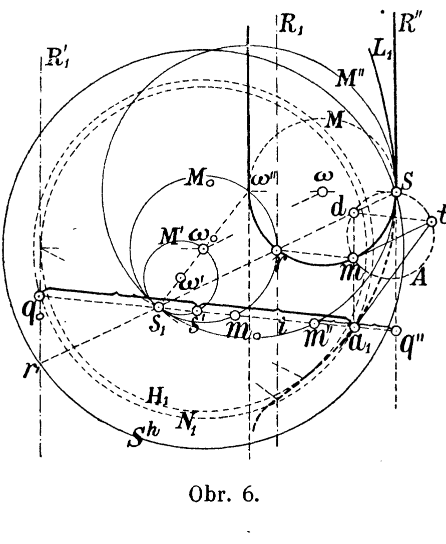
$$ia_1 = is_1 + s_1a_1 = s_1q_0 + q_0m_0 = s_1m_0.$$

Učiňme na s_1a_1 úsečku $iq'' = s_1i = m_0a_1$ a veďme bodem q'' přímku $R'' \parallel R_1 \parallel R'_1$. Nyní bude

$$a_1m'' = a_1m_0 + m_0m'' = is_1 + s_1m_0 = im_0,$$

$$q''a_1 = q''i + ia_1 = is_1 + s_1m_0 = im_0,$$

pročež $$a_1m'' = q''a_1.$$



Obr. 6.

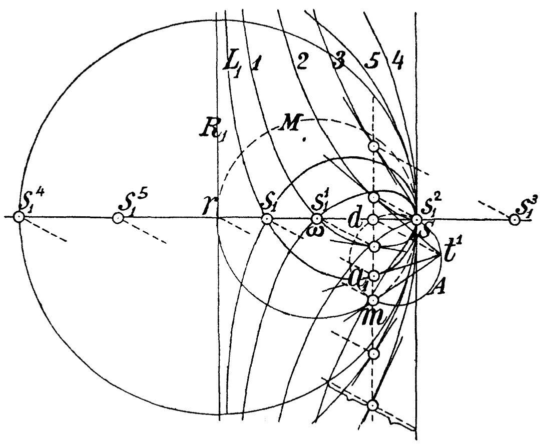
Můžeme tedy křivku L_1 definovati takto:

Jest dána kružnice M'', její bod s_1 a pevná přímka R''. Bodem s_1 vedený paprsek nechť protíná přímku R'' v bodě q'' a kružnici M'' v bodě m''; geom. místem bodu a_1, jenž půlí délku $q''m''$, jest cissoidála L_1.

Zvláštní případy.

16. Je-li $u'r$ kolmo k R_1 (obr. 4.) a bod S na kružnici M kdekoliv, bude jedna tečna $u'_0 s_1$ dvojného bodu s_1 státi kolmo na asymptotě R_1; cissoidála L_1 nazývá se *ophiurida*. Tečna druhá v dvojném bodě jest rovnoběžna s ru''.

17. Předpokládejme, že $u'u''$ jest průměrem kruhu M, v tomto případě stojí tečny dvojného bodu na sobě kolmo a s_1 půlí úsečku rS; křivka L_1 obsahuje své mimořádné ohnisko ω^0 a sluje *šikmá strophoida*. Je-li rs_1S průměrem kruhu M kolmým k R_1, dostaneme *strophoidu* souměrnou. (Obr. 7. L_1 jest označena číslicí 1 a dvojný bod $s_1^1 \equiv \omega$.)



Obr. 7.

18. Přijde-li bod s_1 do některé zobrazené přímky obrysové válce, stane se s_1 bodem úvratu křivky, která zove šikmá cissoida. Předpokládáme-li, že $r\omega s_1$ jest průměrem, jest L_1 cissoidou Diocles-ovou. (Obr. 7. $L_1 \equiv 2$, dvojný bod $s_1^2 \equiv S$.)

19. Mezi cissoidálami objevuje se jedna, jejíž mimořádné ohnisko ω_0 jest na asymptotě (obr. 5.); ona má isolovaný bod dvojný s_1, R'' spojuje středy ω, ω'' kruhů M, M'' a protíná kružnici M'' ve dvou bodech křivky L_1. Obr. 5. ukazuje zobrazení cissoidály L_1 jakožto průmětu křivky proniku přímkových ploch stupně druhého, jak již bylo dříve ve všeobecném případě

provedeno. Je-li rS průměrem kruhu M, splývá bod r se středem ω_0 kruhu M_0, $s_1 r = r\omega$, $\omega'' \equiv \omega$, R_1 dotýká se kruhu M v bodě r, a R'' jest společným průměrem kruhů soustředných M, M''. (V obr. 7. $L_1 \equiv 5$, dvojný bod s_1^5 jest souměrně položen ku středu ω dle R_1.)*)

20. Buď $R'' \parallel R_1$ tečnou kruhu M v bodě S (obr. 6.) a $s_1 r = rS$, pak prochází kruh M_0 bodem r a má s kruhem M ještě společný bod ω'', který jest středem kruhu M'' dotýkajícího se kružnice M v bodě S a M_0 v s_1. Paprsek jdoucí bodem s_1 protíná ještě kruh M'' v bodě m'' a přímku R'' v bodě q''; cissoidála L_1 jest geom. místem bodu a_1, jenž půlí délku $m''q''$. Splyne-li bod r se středem ω'', dotýkají se kruhy M, M_0 v bodě $\omega'' \equiv r$, a s_1 stane se v M'' bodem diametrálně protilehlým k bodu S. Křivka L_1 jmenuje se *visiera Peanova.* (Obr. 7. $L_1 \equiv 4$, dvojný bod s_1^4, $\omega'' \equiv r$.) **)

V obr. 7. jest vyznačena ještě trisektorie Maclaurin-ova, jejíž dvojný bod s_1 půlí poloměr ωr kruhu M, a pak křivka označena číslicí 3, jejíž isolovaný bod dvojný s_1^3 jest souměrně položen k středu ω dle bodu S.

O větě Desargues-Weyrově.

Napsal **V. Jeřábek.**

Věta v nadpise uvedená má toto znění:

Kuželosečky svazku protínají pevnou kuželosečku, vedenou dvěma základními body svazku, mimo tyto body ještě ve dvou bodech, jež tvoří páry involuce na pevné kuželosečce; střed této involuce jest na spojnici druhých dvou základních bodů. ***)

---

*) *V. Jeřábek*: „Sur une cubique circulaire". Mathesis. 1898, pag. 224. Později *V. Retali*: „Sur une cubique circulaire". Mathesis, 1899, pag. 27.

Dr. K. Zahradník: „Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen". Sitzb. der kön. böhm. Ges. der Wiss., Prag 1906.

**) Dr. K. Zahradník l. c. pag. 12.

***) Dr. *Ed. Weyr*: »Projektivná geometrie základních útvarů prvého řádu.« Praha 1898, str. 147.

Ed. Weyr: »Erweiterung des Satzes von Desargues nebst Anwendungen.« Sitzb. der k. Akademie der Wissenschaften, Wien, II. Abth. 1868.