Rudolf Hruša
Poznámky k theorii kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 1, 93--105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122212

bod Q' s E_4. Přímka ta nechť protne přímku t v bodě E_5. Pak bude přímka OE_5 rovnoběžna s přímkou $Q'F_1$ a tedy $\sphericalangle QOE_5 = \frac{\delta}{2}$. Přímka OE_5 protne kružnici k v bodě F. Průsečík $(Q'F, x)$ jest G, průsečík (PF, y) jest H. Přenesení úsečky OG do polohy KP provedeme takto: Označme $F_1 \equiv (Q'F, t)$. Veďme dále přímku PF_1 a ta nechť protne t' v bodě F_2. Průsečík (QF_2, x) bude K. Spojíme-li body, v nichž přímka $l \equiv HK$ kružnici k protíná s bodem Q', protnou nám tyto dvě přímky přímku x v bodech P_4, P_8, takže $\overline{OP_4} = x_4$, $\overline{OP_8} = x_8$.

Poznámky k theorii kuželoseček.

Napsal **R. Hruša.**

I.

Budiž dána kuželosečka rovnicí středovou tvaru:

$$E \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - D = 0 \tag{1}$$

v soustavě pravoúhlé.

Úloha, stanoviti osy této kuželosečky, řeší se pomocí orthogonální transformace, nebo užitím invariantů kvadratické formy.

Zajímavou elementární methodu naznačil p. B. Niewenglowski ve dvojsvazkovém díle „Cours de géométrie analytique“, atd. (Tome I, Sections coniques, p. 294, Exercices 3), kteráž pochází od znamenitého francouzského algebristy E. Galoisa. Methoda ta se opírá o názor geometrický a proto vyniká svou jednoduchostí.

Pro pochopení základní myšlenky této methody uvažujme kuželosečku danou rovnicí osovou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{1*}$$

soustředné kruhy, které mají s kuželosečkou styk dvojnásobný, dány jsou rovnicemi:

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 = a^2,$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 = b^2.$$

Libovolně zvolený kruh soustředný má rovnici:

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1. \tag{2*}$$

Odečtením rovnic (1*), (2*) dospějeme k rovnici degenerované čáry 2. stupně, totiž:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right)=0,$$

která zároveň prochází společnými průsečíky kruhu a dané kuželosečky.

Je-li $\begin{matrix} R=a \\ R=b \end{matrix}$, přejde degenerovaná čára v osu $\begin{matrix} x\text{-ovou.} \\ y\text{-ovou.} \end{matrix}$

V tom případě, kdy je kuželosečka dána obecnou středovou rovnicí (1), můžeme této okolnosti použíti ke stanovení velikosti a polohy os této kuželosečky.

Jakmile totiž se soustředný kruh dotýká kuželosečky dvojnásobně, jest jeho poloměr roven délkou svou buď malé nebo velké poloose.

Je-li kuželosečka dána rovnicí tvaru:

$$E \equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2-D=0; \tag{1}$$

pak kruh s ní soustředný má rovnici:

$$K \equiv x^2+y^2-R^2=0; \tag{2}$$

rovnice: $E.R^2-KD=0$ patří oné čáře druhého stupně, která prochází společnými průseky kruhu s danou kuželosečkou. Rozvineme-li tuto rovnici ve tvar:

$$x^2(AR^2-D)+2\,BR^2xy+(CR^2-D)\,y^2=0; \tag{3}$$

seznáváme, že je to čára degenerovaná, jíž tvoří dvě přímky procházející počátkem.

Při dvojnásobném doteku kruhu K s kuželosečkou E splynou obě posledně jmenované přímky v jedinou, čehož bezprostřední je následek, že rovnice (3) dělením nebo násobením jistým stálým faktorem dá se redukovati na dvojmoc.

Kdy nastane ten případ, na to nám odpovídá algebra, že v tom případě, když mezi koefficienty rovnice (3) existuje vztah:

$$B^2R^4-(AR^2-D)(CR^2-D)=0.$$

Upravíme-li tuto relaci, poznáváme, že jest to rovnice 4. stupně vzhledem k veličině R; vypadá pak takto v definitivní úpravě:

$$(B^2 - AC) R^4 + (A + C) DR^2 - D^2 = 0. \qquad (4)$$

Dle toho, co bylo shora řečeno, jsou kořeny této rovnice:

$$R_1 = + a, \; R_2 = - a, \; R_3 = + b, \; R_4 = - b.$$

Poněvadž rovnice ta obsahuje sudé mocniny veličiny R, dá se snadno řešiti. Takto tedy pro osy kuželosečky dostáváme výrazy:

$$a = \sqrt{D \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2 (B^2 - AC)}}$$

$$b = \sqrt{D \frac{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2 (B^2 - AC)}} \qquad (5)$$

Směry os dostaneme řešením rovnice (3) dle x ve tvaru:

$$x (AR^2 - D) + \dot{y} BR^2 = 0;$$

při tom nutno za R vložiti hodnoty a, b plynoucí z rovnice (5).

Zajímavo je, že methoda uvedená vede k cíli i v tom případě, když rovnice (1) vztahuje se k osám souřadným, které nejsou kolmé, nýbrž svírají spolu obecně úhel ω, ať ostrý nebo tupý, v prvé čtvrti.

V tom případě rovnice soustředného kruhu má poněkud složitější tvar a sice:

$$K \equiv x^2 - 2xy \cos \omega + y^2 - R^2 = 0. \qquad (6)$$

Degenerovaná čára, procházející průseky kruhu K a kuželosečky E, má patrně rovnici:

$$(AR^2 - D) x^2 + 2 (BR^2 + D \cos \omega) xy + (CR^2 - D) y^2 = 0 \quad (7)$$

Při dvojnásobném styku obou zmíněných čar přejde degenerovaná čára ve dvojitou přímku, což se početně zračí tím, že levá strana rovnice (7) je až na stálý faktor úplná dvojmoc. Ta okolnost vede k relaci tvaru:

$$(B^2 - AC) R^4 + [A + C + 2B \cos \omega] DR^2 - D^2 \sin^2 \omega = 0. \quad (8)$$

Kořeny této rovnice musí býti opět délky poloos a, b, proto řešením té rovnice dle R obdržíme:

$$\frac{a}{\sqrt{D}} = \sqrt{\frac{A + C + 2B\cos\omega + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2 + 4(A+C)B\cos\omega}}{2(B^2 - AC)}} \tag{9}$$

$$\frac{b}{\sqrt{D}} = \sqrt{\frac{A + C + 2B\cos\omega - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2 + 4(A+C)B\cos\omega}}{2(B^2 - AC)}}$$

Směry os dány jsou rovnicemi:

$$x(Aa^2 - D) + y(Ba^2 + D\cos\omega) = 0;$$
$$x(Ab^2 - D) + y(Bb^2 + D\cos\omega) = 0. \tag{10}$$

Diskusse rovnic (9) vede nás k známému výsledku, že kuželosečka E je v případě $B^2 - AC \gtrless 0$ $\begin{matrix}\text{ellipsa}\\ \text{hyperbola}\end{matrix}$; je-li konečně $B^2 - AC = 0$, přejde ve dvojici rovnoběžných přímek.

Zajímavo jest, jak na základě téže myšlenky dokazuje p. Niewenglowski theoremy Apolloniovy [Cours de géométrie analytique, tome I, p. 292].

Zvolíme-li za osy souřadné průměry kuželosečky, nabývá její rovnice tohoto tvaru:

$$\frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1;$$

rovnici soustředného kruhu můžeme psáti ve tvaru:

$$\frac{x^2}{R^2} - \frac{2xy}{R^2}\cos\omega + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Degenerovaná čára vedená průseky kruhu s kuželosečkou dána je rovnicí:

$$x^2\left[\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{R^2}\right] + 2xy\frac{\cos\omega}{R^2} + y^2\left[\pm\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{R^2}\right] = 0.$$

Při dvojnásobném styku obou svrchu zmíněných čar redukuje se degenerovaná čára opět na jedinou přímku; to nastane tehdy, když rovnice oné degenerované čáry bude až na stálý faktor úplná dvojmoc, což jest aequivalentní s relací:

$$\frac{cos^2\omega}{R^4} = \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{R^2}\right)\left(\pm\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{R^2}\right).$$

V definitivní své úpravě relace zmíněná má tento tvar:

$$\pm R^4 - R^2 (b_1^2 \pm a_1^2) + a_1^2 b_1^2 \sin^2 \omega = 0,$$

při čemž pro ellipsu se bere horní znaménko, pro hyperbolu dolní.

Kořeny této rovnice jsou patrně a, b, respekt. a, bi. Známými kořenovými vlastnostmi rovnic algebraických vedeni jsme přímo k relacím tvaru:

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2,\quad a^2b^2 = a_1^2b_1^2 \sin^2 \omega$$

jedná-li se o ellipsu; pro hyperbolu dostaneme analogicky tyto relace:

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2,\quad a^2b^2 = a_1^2b_1^2 \sin^2 \omega.$$

Tyto relace však jsou v algebraické formě zakuklené theoremy Apolloniovy.

II.

Kuželosečky obdélníku vepsané.

1. Dán jest obdélník o stranách $2u$, $2v$, jest nalézti rovnici kuželosečky vepsané. Poněvadž úloha jest neurčitá, obdržíme celou soustavu křivek, jež dané podmínce hoví; libovolným bodem roviny procházejí obecně dvě kuželosečky soustavy, dané přímky se dotýká jediná křivka téže soustavy. Takovou soustavu křivek jmenují mathematikové řada.

Počátek soustavy pravoúhlých souřadnic budiž ve středu daného obdelníku; osy nechť jsou rovnoběžné se stranami jeho.

Uvažované kuželosečky jsou s obdélníkem soustředné, pročež rovnice jejich bude tvaru:

$$E \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - D = 0 \qquad (1)$$

Fakt, že křivka E se dotýká stran obdélníku, jež jsou dány rovnicemi: $x = \pm u$, $y = \pm v$, zračí se v tom, že kvadratické rovnice:

$$Cy^2 + 2Buy + Au^2 - D = 0$$
$$Ax^2 + 2Bvx + Cv^2 - D = 0$$

mají dvojný kořen; to nastane, když příslušné diskriminanty vymizejí.

Máme tudíž dvě relace mezi koefficienty rovnice (1), jež jsou resp.

$$B^2u^2 = C(Au^2 - D)$$
$$B^2v^2 = A(Cv^2 - D).$$

Přehlednější jsou tyto rovnice ve tvaru:

$$AD = v^2(AC - B^2)$$
$$DD = u^2(AC - B^2).$$

Koefficienty A, B, C dají se vyjádřiti pomocí výrazu:

$$AC - B^2,$$

který jest, jak známo, diskriminantem kvadratické formy:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Položíme-li tudíž $AC - B^2 = \varDelta$, přicházíme k relacím:

$$A = \frac{\varDelta v^2}{D}, \quad C = \frac{\varDelta u^2}{D}, \quad B = \frac{\varDelta}{D}\sqrt{u^2v^2 - \frac{D^2}{\varDelta}} \qquad (2)$$

Osy kuželosečky, jak dříve bylo dokázáno, jsou kořeny této rovnice [Poznámky k theorii kuželoseček, rovnice 4.]:

$$X^4(B^2 - AC) + X^2D(A + C) - D^2 = 0;$$

vložíme-li sem příslušné hodnoty za A, C, B (2), uvedeme rovnici tu do tvaru:

$$X^4\varDelta - X^2\varDelta(u^2 + v^2) + D^2 = 0. \qquad (3)$$

Jde-li o ellipsu, jsou kořeny té rovnice $\pm a$, $\pm b$, jde-li o hyperbolu, jsou kořeny $\pm a$, $\pm bi$. Z vlastností kořenů algebraických rovnic plyne v prvém případě relace:

$$a^2 + b^2 = u^2 + v^2;$$

v druhém případě jest:

$$a^2 - b^2 = u^2 + v^2,$$

což nás vede k pozoruhodnému poznatku tomuto:

Součet čtverců poloos pro všechny ellipsy, které se stran obdélníku dotýkají, je stálý a rovná se čtverci poloviční úhlopříčky; rozdíl čtverců poloos všech hyperbol, které se prodloužených stran obdélníku dotýkají, je roven čtverci poloviční úhlopříčny obdélníku.

Z rovnice (3) řešením pro poloosy a, b vypočítáme tyto hodnoty:

$$a = \sqrt{\frac{u^2+v^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2 - \frac{D^2}{\Delta}}},$$

$$b = \sqrt{\frac{u^2+v^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2 - \frac{D^2}{\Delta}}}.$$

V případě, že b jest reálné, jest uvažovaná kuželosečka ellipsou, jejíž výstřednost je dána relací:

$$e^2 = a^2 - b^2 = \sqrt{(u^2+v^2)^2 - \frac{4D^2}{\Delta}} \tag{4}$$

$$a^2 = \frac{u^2+v^2+e^2}{2}, \quad b^2 = \frac{u^2+v^2-e^2}{2}.$$

Tytéž rovnice mají platnost pro vepsanou hyperbolu.

Osy kuželoseček tvoří spolu degenerovanou čáru druhého stupně, jež má rovnici:

$$(AX^2 - D)\,x^2 + 2BX^2xy + (CX^2 - D)y^2 = 0.$$

Pro hlavní osu dostaneme rovnici:

$$Ba^2x + (Ca^2 - D)y = 0;$$

pro vedlejší:

$$Bb^2x + (Cb^2 - D)y = 0;$$

při tom dlužno za A, B, C, a, b vložiti hodnoty plynoucí z rovnic (2) a (4).

Z rovnice třetí plyne tato relace:

$$a^2b^2 = \frac{D^2}{\Delta},$$

a tudíž obsah vepsané ellipsy je dán formulí:

$$\pi ab = \pi\sqrt{\frac{D^2}{\Delta}} = \frac{\pi D}{\sqrt{\Delta}} \tag{5}$$

Pozoruhodnou veličinu $\frac{D^2}{\Delta} = L$ zaveďme do rovnic (2) a

(4), načež tyto nabudou tvaru jednoduššího a sice:

$$L = \frac{D^2}{AC - B^2}, \quad A = \frac{Dv^2}{L}, \quad B = \frac{D}{L}\sqrt{u^2v^2 - L},$$

$$C = \frac{Du^2}{L} \tag{2*}$$

$$e^2 = \sqrt{(u^2 + v^2)^2 - 4L}, \quad a^2 = \frac{u^2 + v^2 + e^2}{2}$$

$$b^2 = \frac{u^2 + v^2 - e^2}{2} \tag{4*}$$

2. Obraťme se k úloze, nalézti geometrické místo pro ohniska všech kuželoseček vepsaných; výhodně tu můžeme použíti souřadnic polárných r, φ.

Ohnisko hyperboly má tyto souřadnice:

$$r^2 = e^2 = \sqrt{(u^2 + v^2)^2 - 4L}$$

$$tg\,\varphi = - \frac{Ba^2}{Ca^2 - D};$$

umocníme-li poslední rovnici, obdržíme postupně:

$$tg^2\varphi = \frac{B^2a^4}{(Ca^2 - D)^2} = \frac{(u^2v^2 - L)a^4}{(u^2a^2 - L)^2}$$

$$= \frac{(u^2v^2 - L)(u^2 + v^2 + r^2)^2}{[u^2(u^2 + v^2 + r^2) - 2L]^2}.$$

Eliminací veličiny L z obou rovnic obdržíme hledané místo geometrické.

Z prvé rovnice řešením dle L obdržíme:

$$L = \frac{(u^2 + v^2)^2 - r^4}{4},$$

což vloženo do poslední rovnice (pro $tg^2\varphi$) dává tento resultát:

$$tg^2\varphi[u^4 + 2u^2r^2 + r^4 - v^4]^2 = [r^4 - (u^2 - v^2)^2]\,[u^2 + v^2 + r^2]^2$$

aneb v upravené formě:

$$0 = sin^2\varphi[u^2 + v^2 + r^2]^2\,[u^2 - v^2 + r^2]^2 - cos^2\varphi\,[r^2 - u^2 + v^2]\,[r^2 + u^2 - v^2]\,[u^2 + v^2 + r^2]^2$$

Případ: $u^2 + v^2 + r^2 = 0$ vede k imaginárné kružnici, a neodpovídá reálným ohniskům, proto jej vylučujeme; supponujíce $u^2 + v^2 + r^2 \gtrless 0$, můžeme tím zkrátiti danou rovnici. Při $u > v$ vylučujeme rovněž případ ten, kdy $u^2 - v^2 + r^2 = 0$ a můžeme tudíž výrazem tím rovnici zkrátiti. Následkem toho nabývá tato postupně tvaru:

$$(u^2 - v^2 + r^2) \sin^2\varphi - (r^2 - u^2 + v^2) \cos^2\varphi = 0$$
$$r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = u^2 - v^2.$$

To jest rovnice rovnoramenné hyperboly, jak se přesvědčíme přechodem k soustavě pravoúhlé. Značme tuto charakteristickou hyperbolu H, načež její rovnice jest:

$$H \equiv x^2 - y^2 = u^2 - v^2, \tag{6}$$

ze které patrno, že prochází všemi vrcholy obdélníku.

Přicházíme k tomuto dalšímu poznatku:

„Geometrické místo, které vyplňují ohniska všech kuželoseček obdélníku vepsaných, je rovnoramenná hyperbola procházející vrcholy tohoto.“

3. Rovnici vepsaných kuželoseček můžeme upraviti ve tvar:

$$v^2x^2 + 2\sqrt{u^2v^2 - L}\, xy + u^2y^2 - L = 0, \tag{a}$$

která obsahuje pouze jedinou neurčitou konstantu.

Prochází-li kuželosečka bodem $(x_1 y_1)$, vyhovuje konstanta rovnici:

$$v^2x_1^2 + 2\sqrt{u^2v^2 - L}\,.\, x_1y_1 + u^2y_1^2 - L = 0, \tag{b}$$

která vhodnou úpravou přejde v tuto kvadratickou rovnici pro L:

$$L^2 - 2L[v^2x_1^2 + u^2y_1^2 - 2x_1^2y_1^2] + (u^2y_1^2 - v^2x_1^2)^2 = 0. \tag{c}$$

Z ní patrno, že každému bodu $(x_1 y_1)$ odpovídají dvě hodnoty L, L'; daným bodem procházejí dvě kuželosečky řady.

Přímým řešením obdržíme:

$$L = v^2x_1^2 + u^2y_1^2 - 2x_1^2y_1^2 \pm 2x_1y_1 \sqrt{(u^2 - x_1^2)(v^2 - y_1^2)}. \tag{d}$$

Reálné kuželosečky dostaneme v tom případě, že buď jest

$$u^2 > x_1^2 \quad v^2 > y_1^2$$

nebo

$$u^2 < x_1^2 \quad v^2 < y_1^2.$$

Prvé podmínce odpovídají body uvnitř obdélníku, druhé podmínce body vnější. Prodlouženými stranami obdélníku se rozděluje celá rovina na 9 dílů, z nichž jeden je plocha obdélníku, 4 nekonečné pásy a 4 úhly. Body uvnitř obdélníku procházejí dvě ellipsy, body v některém úhlu umístěnými procházejí dvě hyperboly. Je-li bod v některém pásu, neprochází jím žádná reálná kuželosečka.

Vskutku, ježto $L = \frac{D^2}{\Delta}$, závisí znamení diskriminantu na znamení veličiny L, která je kořenem rovnice (c).

Z theorie rovnic známo, že znaménka kořenů závisí na počtu změn a shod znamének v rovnici (c). Je-li výraz:

$$v^2x_1^2 + u^2y_1^2 - 2x_1^2y_1^2 > 0,$$

má rovnice kladné kořeny, v opačném případu záporné.

Podmínku tu pišme ve tvaru:

$$\frac{x_1^2}{u^2} + \frac{y_1^2}{v^2} - 2 \gtrless 0,$$

ze kterého patrno, že body uvnitř obdélníku splňují první podmínku, kdežto body vnější v úhlech druhou. Tím pak výrok vyslovený dokázán.

4. Další úlohou těchto řádků jest stanoviti úhel, ve kterém se protínají kuželosečky v daném bodu $N(x_1y_1)$. Tečna ke kuželosečce:

$$E \equiv v^2x^2 + 2xy\sqrt{u^2v^2 - L} + u^2y^2 - L = 0 \qquad (a)$$

v bodě $N(x_1y_1)$ je dána rovnicí:

$$v^2xx_1 + (x_1y + xy_1)\sqrt{u^2v^2 - L} + u^2yy_1 - L = 0.$$

Pro směrnici tečny máme rovnici:

$$tg\,\alpha = -\frac{v^2x_1 + y_1\sqrt{u^2v^2 - L}}{u^2y_1 + x_1\sqrt{u^2v^2 - L}},$$

při čemž souřadnice x_1y_1 splňují rovnici tuto:

$$v^2x_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{u^2v^2 - L} + u^2y_1^2 - L = 0.$$

Násobme obě strany předešlé rovnice zlomkem $\frac{2x_1}{2y_1}$, načež se zřetelem k poslední rovnici obdržíme:

$$\frac{x_1}{y_1}\,tg\,\alpha = -\frac{L - u^2y_1^2 + v^2x_1^2}{L + u^2y_1^2 - v^2x_1^2}.$$

Označme výraz $v^2x_1^2 - u^2y_1^2$ stručně P, načež jest směrnice prvé tečny:

$$tg\,\alpha = -\frac{y_1}{x_1}\frac{L+P}{L-P}$$

a druhé:

$$tg\,\alpha' = -\frac{y_1}{x_1}\frac{L'+P}{L'-P};$$

při čemž L, L' jsou kořeny rovnice (c).

Úhel tečen stanovíme podle formule:

$$tg\,\varphi = \frac{tg\,\alpha - tg\,\alpha'}{1 + tg\,a\,tg\,\alpha'};$$

napřed obdržíme totiž

$$tg\,\varphi = \frac{x_1y_1\,[(L'+P)(L-P) - (L+P)(L'-P)]}{x_1^2\,(L-P)(L'-P) + y_1^2\,(L+P)(L'+P)},$$

načež po úpravě dostaneme:

$$tg\,\varphi = \frac{2x_1y_1P\,(L-L')}{(x_1^2+y_1^2)\,(LL'+P^2) - P\,(L+L')\,(x_1^2-y_1^2)};$$

zbývá pouze dosaditi výrazy za $L - L'$, $L + L'$ LL' z rovnice (c) plynoucí.

Tím dospějeme o krok dále, totiž k relaci:

$$tg\,\varphi = \frac{8x_1^2y_1^2P\sqrt{(u^2-x_1^2)\,(v^2-y_1^2)}}{2P^2(x_1^2+y_1^2) - 2P\,(v^2x_1^2 + u^2y_1^2 - 2x_1^2y_1^2)\,(x_1^2-y_1^2)},$$

ze které po náležité úpravě a zkrácení obdržíme konečnou formuli:

$$tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{(u^2-x_1^2)\,(v^2-y_1^2)}}{x_1^2 - y_1^2 + v^2 - u^2}; \tag{7}$$

této můžeme dáti tvar:

$$2cot\,\varphi = \sqrt{\frac{x_1^2-u^2}{y_1^2-v^2}} - \sqrt{\frac{y_1^2-v^2}{x_1^2-u^2}} \tag{7*}$$

Formule ta nám podává úhel kuželoseček pro každý bod roviny, pokud jím procházejí reálné kuželosečky. Danému úhlu φ však odpovídá nekonečné množství hodnot pro souřadnice x_1y_1, což značí, že body, v nichž kuželosečky se protínají v daném úhlu, tvoří ve své souvislosti čáru. Na první pohled by se zdálo, že to je čára 4. stupně, avšak při zevrubném vyšetřování vychází na jevo, že ta čára se rozpadá ve dvě kuželosečky.

Rovnici (6) ve tvaru racionálném můžeme psáti takto:

$$(x_1^2 - y_1^2 + v^2 - u^2)^2 \sin^2\varphi = 4 \cos^2 \varphi \cdot (u^2 - x_1^2)(v^2 - y_1^2),$$

kdež považujíce $x_1 y_1$ za plynulé souřadnice, můžeme index vypustiti.

Zavedením kosinusu do té rovnice dostane tato jednodušší tvar a sice:

$$(x^2 - y^2 - u^2 + v^2)^2 - (x^2 + y^2 - u^2 - v^2)^2 \cos^2 \varphi = 0;$$

odtud bezprostředně plyne, že levá strana se dá rozložiti v součin dvou kvadratických mnohočlenů, kterážto okolnost souvisí s tím, že čára biquadratická se rozpadá. Rovnice kuželoseček, z nichž se skládá, mají tvar:

$$\begin{aligned} x^2(1 - \cos \varphi) - y^2(1 + \cos \varphi) &= u^2(1 - \cos \varphi) \\ &\quad - v^2(1 + \cos \varphi) \\ x^2(1 + \cos \varphi) - y^2(1 - \cos \varphi) &= u^2(1 + \cos \varphi) \\ &\quad - v^2(1 - \cos \varphi), \end{aligned} \tag{7}$$

ze kterého patrno, že jsou to hyperboly a že obě procházejí vrcholy daného obdélníku. V jiném tvaru rovnice psány vypadají asi takto:

$$\begin{aligned} x^2 \, tg^2 \frac{\varphi}{2} - y^2 &= u^2 \, tg^2 \frac{\varphi}{2} - v^2 \\ x^2 - y^2 \, tg^2 \frac{\varphi}{2} &= u^2 - v^2 \, tg^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{7*}$$

Každému úhlu φ příslušejí v mezích $0-90^0$ dvě hyperboly, a tedy každému úhlu φ v mezích $0-180^0$ jediná hyperbola.

Posledně odvozené výsledky nás opravňují k tomuto výroku:

Geometrické místo pro všechny body, ve kterých se kuželosečky protínají v daném úhlu, jsou dvě hyperboly s obdélníkem soustředné; obě zároveň procházejí vrcholy obdélníku. Každému úhlu φ v mezích $0-360^0$ náleží jedna hyperbola.

Ve zvláštním případě, kdy $\varphi = 90^0$, splynou obě hyperboly a přejdou v rovnoramennou hyperbolu, jejíž rovnice jest:

$$x^2 - y^2 = u^2 - v^2.$$

To jest ona známá hyperbola H, která obsahuje všechna ohniska kuželoseček řady uvažované. Můžeme tudíž vysloviti tuto větu:

Všechny body, ve kterých se kuželosečky vepsané do obdélníku protínají v pravém úhlu, náleží rovnoramenné hyperbole; tato čára jest zároveň geometrickým místem všech ohnisek týchž kuželoseček a prochází vrcholy obdélníku.

Z dosavadních úvah plyne bezprostředně řešení těchto dvou úloh:

a) Do daného obdélníku vepsati kuželosečku daného obsahu,

b) nebo dané výstřednosti.

Řešení prvé úlohy podává formule (5) (4) (*a*), řešení druhé formule (4), (*a*).

Jedná-li se o čtverec, nutno všude do formulí dosadíti

$$u = v = s.$$

Na př. geometrické místo ohnisek jsou úhlopříčky čtverce dané rovnicí: $x^2 - y^2 = 0$; kuželosečky, které procházejí body úhlopříčen, protínají se v pravém úhlu.

Geometrické místo bodů, ve kterých se kuželosečky vepsané do čtverce protínají v úhlu daném φ, jsou dvě hyperboly se čtvercem soustředné. Rovnice jejich jsou tvaru:

$$x^2\, tg^2 \frac{\varphi}{2} - y^2 = s^2 \left(tg^2 \frac{\varphi}{2} - 1\right)$$

$$x^2 - y^2\, tg^2 \frac{\varphi}{2} = s^2 \left(1 - tg^2 \frac{\varphi}{2}\right).$$

Výsledky tyto svou jednoduchostí jsou pozoruhodné, a zdá se, že dosud nebyly nikde uveřejněny.