Karel Rychlík

# O de la Vallée-Poussinově methodě sčítací

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 46 (1917), No. 4-5, 313--331

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122166

tečnami vratu obrysu. Sestrojíme-li posléze pro každou z nich dotyčný bod roviny jdoucí středem promítání s plochou, jsou centrálné průměty těchto bodů hledanými body vratu obrysu.

---

# O de la Vallée-Poussinově methodě sčítací.

Napsal Dr. **K. Rychlík.**

Jeden ze způsobů sčítání divergentních řad je založen na tvoření „středních hodnot“. Východiskem je věta, že pro konvergentní posloupnost čísel reálných neb komplexních $s_0$, $s_1$, $s_2$ ... $s_n$ ... posloupnost arithmetických středů

$$s_0, \frac{s_0 + s_1}{2}, \frac{s_0 + s_1 + s_2}{3}, \ldots \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n + 1}, \ldots$$

je také konvergentní a má tutéž limitu. Posloupnost arithmetických středů může však konvergovati, i když je daná posloupnost $s_0$, $s_1$, $s_2$ ... divergentní: na př. pro divergentní posloupnost 1, 0, 1, 0, 1, 0 ... $s_{2m} = 1$, $s_{2m+1} = 0$, ... je posloupnost arithmetických středů

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \ldots \frac{m+1}{2m+1}, \frac{1}{2} \ldots$$

konvergentní a má za limitu $\frac{1}{2}$.

O posloupnosti u níž konverguje posloupnost arithmetických středů, řekneme, že konverguje dle arithmetického středu.

Je-li při nekonečné řadě

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

posloupnost částečných součtů

$$s_0, s_1, s_2, \ldots$$

konvergentní dle arithmetického středu, nazývá se ona řada sčítatelná dle arithmetického středu. Tak známá řada divergentní

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

je sčítatelná dle arithmetického středu se součtem $\frac{1}{2}$.*)

---

*) O methodě arithmetického středu a použití jejím na řady Fourierovy viz: Petr, Počet integrální, str. 481—485.

Tvoříme-li z arithmetických středů dále arithmetické středy, tedy položíme-li

$$
\begin{aligned}
h_n^{(0)} &= s_n \\
h_n^{(1)} &= \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \\
h_n^{(2)} &= \frac{h_0^{(1)} + h_1^{(1)} + \ldots + h_n^{(1)}}{n+1} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
h_n^{(k)} &= \frac{h_0^{(k-1)} + h_1^{(k-1)} + \ldots + h_n^{(k-1)}}{n+1},
\end{aligned}
$$

říkáme, že posloupnost $s_0$, $s_1$, $s_2 + \ldots$ má $k$-tou Hölderovu limitu neb řada $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ je sčítatelná $k$-tého řádu ve smyslu Hölderově, existuje-li limita $h_n^{(k)}$ při $n$ rostoucím do nekonečna. Existuje-li $k$-tá ($k \geqq 0$) Hölderova limita, existuje i $k+1$-ní a všechny následující a mají tutéž hodnotu. Opak ovšem neplatí.

Položme dále

$$
\left.
\begin{aligned}
s_n^{(1)} &= s_0 + s_1 + \ldots + s_n \\
s_n^{(2)} &= s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \ldots + s_n^{(1)} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
s_n^{(k)} &= s_0^{(k-1)} + s_1^{(k-1)} + \ldots + s_n^{(k-1)};
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

$$
c_n^{(0)} = s_n, \quad c_n^{(1)} = \frac{s_n^{(1)}}{n+1}, \quad c_n^{(2)} = \frac{s_n^{(1)}}{\binom{n+2}{2}}, \quad \ldots \quad c_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} \text{*)} \quad (1')
$$

Pak má posloupnost $s_0$, $s_1$, $s_2 \ldots$ Cesàrovon limitu $k$-tého řádu neb řada $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ je sčítatelná $k$-tého řádu ve smyslu Cesàrově, existuje-li limita $c_n^{(k)}$ při $n$ rostoucím do nekonečna.

---

*) Vzhledem k tomu, že

$$
\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{n^k}{k!}}{\binom{n+k}{k}} = 1,
$$

mohli bychom místo $\dfrac{s_n^{(k)}}{\binom{n'+k}{k}}$ uvažovati též

$$
\frac{s_n^{(k)}}{\binom{n}{k}} \; (n \geqq k) \quad \text{neb} \quad \frac{s_x^{(k)}\, k!}{n^k}
$$

Dá se snadno dokázati, že, existuje-li $k$-tá Cesàrova limita, existuje i $k+1$-ní a tedy i všechny následující a mají tutéž hodnotu. Opak zase neplatí,

A tu platí věta Knopp-Schneeova*):

*Existuje-li k-tá Cesàrova limita, existuje i k-tá Hölderova limita a jsou si rovny a naopak.*

De la Vallé-Poussin uvažoval pro řadu $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ výraz

$$v_n = u_0 + \frac{n}{n+1} u_1 + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} u_2 + \ldots$$

$$+ \frac{n(n+1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2} u_n = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!} u_\lambda. \quad (2)$$

Existuje-li $\lim\limits_{n=\infty} v_n = s$, nazveme řadu $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ sčítatelnou dle methody de la Vallée-Poussinovy se součtem $s$.**)

*) Důkaz, jakož i literaturu viz Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, str. 30—38.

**) De la Vallée-Poussin, Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées pas des polynoms et des suites limitées de Forier, Bul. Ac. Sc. de Belgique 1908, str. 193 a násl. — K této sčítací methodě byl veden vyšetřováním výrazu

$$\frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n} dt}{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n} dt}.$$

Je-li $f(x)$ funkce jednoznačná o periodě $2\pi$, schopná integrace ve smyslu Riemannově neb obecněji absolutně schopná integrace neb konečně, schopná integrace ve smyslu Lebesgueově, nechť je příslušná řada Fourierova

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n+1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt,$$

(řada ta za uvedených podmínek nutně nekonverguje). Ustanovíme-li řadu Fourierovu pro výraz svrchu napsaný, obdržíme až na činitele konvergují-

Gronwall dokázal větu *):

*Je-li řada $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ sčítatelná k-tého řádu ve smyslu Cesàrově (tedy i sčítatelná k-tého řádu dle Hölderovy methody), je sčítatelná i dle de la Vallée-Poussinovy methody s týmž součtem.*

V následujícím chci podati jednodušší důkaz této věty.

* * *

Uvažované střední hodnoty pozůstávají v tom, že z dané posloupnosti $s_0, s_1, s_2, \ldots$ se tvoří nové $t_0, t_1, t_2, \ldots$ tímto způsobem:

$$
\begin{aligned}
t_0 &= a_{00} s_0 + a_{01} s_1 + \ldots + a_{0\nu_0} s_{\nu_0} \\
t_1 &= a_{10} s_0 + a_{11} s_1 + \ldots + a_{1\nu_1} s_{\nu_1} \\
&\ldots\ldots \\
t_n &= a_{n0} s_0 + a_{n1} s_1 + \ldots + a_{n\nu_n} s_{\nu_n}; \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$t_0, t_1, t_2, \ldots$ jsou lineární homogenní funkce, každé konečného počtu z $s_0, s_1, s_2, \ldots$ Naskytá se otázka, jaké vlastnosti musí míti matice koefficientů $a_{n\lambda}$, aby posloupnost $t_0, t_1, t_2, \ldots$ konvergovala pro každou posloupnost $s_0, s_1, s_2, \ldots$, která je konvergentní a aby limity obou těchto posloupností byly si rovny. Odpověď na to dává věta Toeplitzova **):

*Posloupnost $t_0, t_1, t_2, \ldots$ konverguje pro každou konvergentní posloupnost $s_0, s_1, s_2, \ldots$ a to k téže limitě, jsou-li splněny podmínky:*

---

cího s rostoucím $n$ k 1:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-\lambda)!(n+\lambda)!}(a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x),$$

tedy $n$-tý de la Vallée-Poussinův střed řady Fourierovy. Vlastnosti jsou podobné jako při sčítání dle arithmetického středu. Také by se dalo použíti tohoto výsledku k důkazu věty Weierstrassovy o vyjádření spojitých fnnkcí pomocí polynomů.

*) Gronwall, Über einige Summationsmethoden und ihre Anwendung auf die Fouriersche Reihe. Crelles Journal 147 (1917) str. 16. a násl. Tam ukazuje Gronwall též, že existují řady sčítatelné dle methody de la Vallée-Poussinovy, které nejsou sčítatelny ani pro libovolně vysoký řád dle methody Cesàrovy.

**) Toeplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace matematyczno-fizyczne, 22 (1911), str. 113—119.

I. *Limita řádkových součtů v matici koefficientů je 1,*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu_n} a_{n\lambda} = 1.$$

II. *Jednotlivé sloupce mají za limitu 0,*

$$\lim_{n=\infty} a_{n\lambda} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

III. *Součty absolutních hodnot prvků v řádkách jsou ohraničeny pro každé* $n \geqq 0$,

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu_n} | a_{n\lambda} | \leqq M \quad \textit{pro každé } n \geqq 0,$$

*kdež M je konečné číslo kladné, nezávislé na n.*

Tyto podmínky jsou nejen postačující, ale i nutné.

Vyjádřeme si tedy střední hodnotu de la Vallée-Poussinovu $v_n$ pomocí $k$-té střední hodnoty Cesàrovy.

Za tím účelem položme

$$K(0) = 1, \quad K(1) = \frac{n}{n+1}, \quad K(2) = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)},$$

vůbec

$$K(\lambda) = \frac{(n!)^2}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!}, \quad \text{pro } 0 \leqq \lambda \leqq n \tag{3}$$

a $K(\lambda) = 0$ pro $\lambda > n$.

$$\Delta K(\lambda) = K(\lambda + 1) - K(\lambda)$$

$$\Delta^2 K(\lambda) = \Delta K(\lambda + 1) - \Delta K(\lambda)$$
$$= K(\lambda + 2) - 2K(\lambda + 1) + K(\lambda)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta^r K(\lambda) = \Delta^{r-1} K(\lambda + 1) - \Delta^{2-1} K(\lambda)$$
$$= K(\lambda + r) - \binom{r}{1} K(\lambda + r - 1) + \binom{r}{2} K(\lambda + r - 2) + \ldots$$
$$+ (-1)^r K(\lambda)$$

a tedy

$$(-1)^r K(\lambda) = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} K(\lambda + l). \tag{4}$$

I bude $\Delta^r K(\lambda) = 0$ pro $\lambda > n$, $\quad$ (5')

$$(-1)^r \Delta^r K(n) = K(n) \tag{5''}$$

a dále stanovíme pro $0 \leqq \lambda \leqq n$

$$(-1)^r \Delta^r K(\lambda) = \frac{(n!)^2}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda+r)!} \varphi_r(\lambda) \tag{5}$$

$\varphi_r(\lambda)$ je mnohočlen v $\lambda$, $n$.

$$\varphi_r(\lambda) = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} (n-\lambda)(n-\lambda-1)\ldots(n-\lambda-l+1)$$
$$(n+\lambda+l+1)(n+\lambda+l+2)\ldots(n+\lambda+r) \tag{6}$$

$$\varphi_0(\lambda) = 1, \quad \varphi_1(\lambda) = 2\lambda + 1, \quad \varphi_2(\lambda) = 4\left(\lambda^2 + 2\lambda - \frac{n-1}{2}\right)\ldots \tag{6'}$$

$\varphi_r(\lambda)$ je v $\lambda$, $n$ stupně $r$. V $\lambda$ je stupeň mnohočlenu toho jistě $r$, poněvadž koefficient u $\lambda^r$ je patrně

$$\sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} = 2^r,$$

tedy 0, kdežto v $n$ je (při $r > 0$) stupně nižšího než $r$, poněvadž koefficient u $n^r$ je

$$\sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} \doteq 0.$$

Pak bude

$$v_n = \sum_{\lambda=0}^{n} K(\lambda) u_\lambda = u_0 + \sum_{\lambda=1}^{n} K(\lambda) n_2 = s_0 + \sum_{\lambda=1}^{n} K(\lambda)(s_\lambda - s_{\lambda-1})$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{n} (K(\lambda) - K(\lambda+1)) s_\lambda,$$

tedy

$$v_n = -\sum_{\lambda=0}^{n} K(\lambda) s_\lambda,$$

a podobně dále

$$v_n = \sum_{\lambda=0}^{n} K^2(\lambda)\, s_\lambda^{(1)}$$

. . . . . . . . . . .

$$v_n = (-1)^{k+1} \sum_{\lambda=0}^{n} \Delta^{k+1} K(\lambda)\, s_\lambda^{(k)},$$

a konečně

$$v_n = \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda)\, c_n^{(k)}. \tag{7}$$

Všimněme si nyní věty Toeplitzovy. Dle ní bude střední hodnota de la Vallée-Poussinova $v_n$ konvergovati, a to k téže limitě, je-li konvergentní střední hodnota Cesàrova řádu $k$, $c_n^{(k)}$, za těchto podmínek:

$$\text{I.} \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda) = 1.$$

$$\text{II.} \qquad \lim_{n=\infty} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda) = 0, \text{ pro } \lambda = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\text{III.} \qquad \sum_{\lambda=0}^{n} \left| \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda) \right| \leqq M \text{ pro každé } n \geqq 0,$$

při čemž $M$ je konečné číslo kladné nezávislé na $n$.

Dokážeme si nejprvé, že splněna je podmínka II. I musí býti

$$\lim_{n=\infty} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda) = 0 \tag{8}$$

pro $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ při $k \geqq 0$.

Jest však

$$(-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda) = \frac{n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)\, \varphi_{k+1}(\lambda)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+\lambda+k+1)}.$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi_{k+1}(\lambda)$ je při $k \geqq 0$ mnohočlen v $n$ stupně $\leqq k$, je ve výraze pro $(-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda)$ v čitateli mnohočlen v $n$ stupně $\leqq \lambda + k$, ve jmenovateli stupně vyššího, totiž právě $\lambda + k + 1$. Tím tvrzení dokázáno.

Dříve než přikročíme k důkazu I. a III., dokážeme si vzorec

$$\sum_{\lambda=M}^{N-1} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda)$$
$$= \sum_{l=0}^{k} \left[ \binom{M+l-1}{l} (-1)^l \Delta^l K(M) - \binom{N+l-1}{l} (-1)^l \Delta^l K(N) \right], \tag{9}$$

platný pro každou funkci celistvého argumentu $K(\lambda)$.

Zaveďme na okamžik označení

$$\Sigma_k = \sum_{\lambda=M}^{N-1} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda).$$

I je

$$\Sigma_k = \sum_{\lambda=M}^{N-1} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} (\Delta^k K(\lambda+1) - \Delta^k K(\lambda))$$
$$= \sum_{\lambda=M}^{N-1} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k} (\Delta^k K(\lambda) - \Delta^k K(\lambda+1)).$$

Jest však

$$\sum_{\lambda=M}^{N-1}\binom{\lambda+k}{k}(-1)^k\Delta^k K(\lambda+1)$$

$$=\sum_{\lambda=M}^{N-1}\binom{\lambda+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(\lambda)$$

$$-\binom{M+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(M)+\binom{N+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(N),$$

a tedy

$$\Sigma_k=\sum_{\lambda=M}^{N-1}\left[\binom{\lambda+k}{k}-\binom{\lambda+k-1}{k}\right](-1)^k\Delta^k K(\lambda)$$

$$+\binom{M+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(M)-\binom{N+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(N)$$

$$=\sum_{\lambda=M}^{N-1}\binom{\lambda+k-1}{k-1}(-1)^k\Delta^k K(\lambda)$$

$$+\binom{M+k-1}{k}(-k)^k\Delta^k K(M)-\binom{N+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(N),$$

t. j.

$$\Sigma_k=\Sigma_{k-1}+\binom{M+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(M)$$

$$-\binom{N+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(N)$$

a podobně

$$\Sigma_{k-1}=\Sigma_{k-2}+\binom{M+k-2}{k-1}(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}K(M)$$

$$-\binom{N+k-2}{k}(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}K(N)$$

. . . . . .

$$\Sigma_1=\Sigma_0-\binom{M}{1}\Delta K(M)+\binom{N}{1}\Delta K(N).$$

Sečtením těchto vzorců dostaneme

$$\Sigma_k=\Sigma_0-\binom{M}{1}\Delta K(M)+\binom{N}{1}\Delta K(N)$$

$$+\binom{M+1}{2}\Delta^2 K(M)-\binom{N+2}{2}\Delta^2 K(N)+\dots$$

$$+\binom{M+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(M)-\binom{M+k-1}{k}(-1)^k\Delta^k K(N).$$

Avšak

$$\Sigma_0 = -\sum_{\lambda=M}^{N-1} \Delta K(\lambda) = K(M) - K(N),$$

z čehož pak plyne okamžitě platnost vzorce (9), svrchu napsaného.

Pro součet v I. se vyskytující dostaneme, uvážíme-li, že

$$\Delta^l K(n+1) = 0 \quad \text{pro} \quad l = 0, 1, 2, \ldots k,$$

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda) = \sum_{l=0}^{k} \binom{l-1}{l} (-1)^l \Delta^l K(0)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \binom{-1}{l} (-1)^l \Delta^l K(0) = \sum_{l=0}^{k} \Delta^l K(l),$$

ježto

$$\binom{-1}{l} = (-1)^l.$$

Jest však

$$K(0) = 1, \quad \lim_{n=\infty} \Delta^l K(0) = 0 \quad \text{pro } l > 0$$

dle (8), čímž dokázáno, že podmínka I. skutečně splněna.

Obraťme se nyní k uvažování III.

Pro $k = 0$ je

$$-\Delta K(\lambda) = \frac{(n!)^2 \varphi_1(\lambda)}{(n-\lambda)!(n+\lambda-1)!},$$

při čemž

$$\varphi_1(\lambda) = 2\lambda + 1$$

je v intervalu $0 \leqq \lambda \leqq n$ kladné, tedy i $-\Delta K(\lambda)$ je v intervalu tom kladné. Plyne tedy III. okamžitě z I.

Ale již při $k = 1$ vyskytuje se obtíž. $\Delta^2 K(\lambda)$ mění v intervalu $0 \leqq \lambda \leqq n$ znamení, poněvadž $\varphi_2(\lambda) = 0$ má v něm kořen $-1 + \sqrt{\frac{n+1}{2}}$ (jakmile $n \geqq 1$).

Bude se nám jednati o to, odhadnouti horní hranici kořenů mnohočlenů $\varphi_r(\lambda)$ (pro velké hodnoty $n$). Jsou to, jak již bylo řečeno, mnohočleny v $\lambda$ stupně $r$ s koefficientem $2^r$ u $\lambda^r$.

Z (6) plyne ihned, že

$$\varphi_r(-r-\lambda) = (-1)^r \varphi_r(\lambda), \tag{10}$$

tak že při $r$ lichém je $\lambda = -\frac{r}{2}$ kořenem rovnice $\varphi_r(\lambda) = 0$.

Dále je

$$\varphi_r(n) = (2n + 1)(2n + 2) \dots (2n + r) \tag{10'}$$

a tedy

$$\varphi_r(-n - r) = (-1)^r \varphi_r(n). \tag{10''}$$

Z relace

$$\Delta^r K(\lambda) = \Delta^{r-1} K(\lambda + 1) - \Delta^{r-1} K(\lambda)$$

a z (5″) plyne ihned

$$\varphi_r(\lambda) = (\lambda - n)\varphi_{r-1}(\lambda + 1) + (\lambda + n + r)\varphi_{r-1}(\lambda) \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \tag{11}$$

Pomocí tohoto vztahu si dokážeme, že *kořeny rovnice* $\varphi_r(\lambda) = 0$ *jsou pro* $n > 0$ *vesměs reálné, od sebe různé a leží mezi* $-n\ -r$ *a* $n$. *Jsou-li kořeny ty*

$$-n - r < \lambda_1^{(r)} < \lambda_2^{(r)} < \dots < \lambda_{r-1}^{(r)} < \lambda_r^{(r)} < n,$$

*je*

$$\lambda_{l+1}^{(r)} - \lambda_l^{(r)} > 1 \quad (l = 1, 2, \dots r - 1).$$

Důkaz provedeme úplnou indukcí. Pro rovnici $\varphi_r(\lambda) = 0$ o kořenech $-1 \pm \sqrt{\frac{n+1}{2}}$ věta jistě platí. Předpokládejme tedy platnost věty pro rovnici $\varphi_{r-1}(\lambda) = 0$, tak že kořeny rovnice té jsou pro $n > 0$ vesměs reálné, od sebe různé, leží mezi $-n\ -r + 1$ a $n$, označíme-li je pak

$$-n - r + 1 < \lambda_1^{(r-1)} < \lambda_2^{(r-1)} < \dots < \lambda_r^{(r-1)} < n,$$

že platí

$$\lambda_{l+1}^{(r-1)} - \lambda_l^{(r-1)} > 1 \quad (l = 1, 2, \dots r - 2).$$

I bude

$$sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_1^{(r-1)} - 0) = (-1)^{r-1}, \quad sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_1^{(r-1)} + 0) = (-1)^r$$

$$sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_2^{(r-1)} - 0) = (-1)^r, \quad sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_2^{(r-1)} + 0) = (-1)^{r+1}$$

. . . . . . .

$$sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_l^{(r-1)} - 0) = (-1)^{r-l}, \quad sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_l^{(r-1)} + 0) = (-1)^{r+l+1}$$

. . . . . . .

$$sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_{r-1}^{(r-1)} - 1) = -1, \quad sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_{r-1}^{(r-1)} + 0) = 1.$$

Vzhledem ke vztahům

$$\lambda_l^{(r-1)} - \lambda_{l-1}^{(r-1)} > 1, \quad \lambda_{l+1}^{(r-1)} - \lambda_l^{(r-1)} > 1$$

neleží v intervalu

$$(\lambda_l^{(r-1)}-1,\ \lambda_l^{(r-1)}+1)$$

vyjma $\lambda_l^{(r-1)}$ žádný jiný kořen. Bude tedy

$$sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_l^{(r-1)}-1)=(-1)^{r+1};$$
$$sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_l^{(r-1)}+1)=(-1)^{r+l+1}.$$

Z (11) plyne pro $\lambda=\lambda_l^{(r-1)}$, že

$$sgn\,\varphi_r(\lambda_l^{(r-1)})=-sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_l^{(r-1)}+1)=(-1)^{r+l}.$$

Z toho vidíme, poněvadž dle (10′) a (10″)

$$sgn\,\varphi_r(-n-r)=(-1)^r,\quad sgn\,\varphi_r(n)=1,$$

že v každém z intervalů, jichž je $r$ na počet,

$$-n-r,\ \lambda_1^{(r-1)},\ \lambda_2^{(r-1)},\ \ldots\ \lambda_{l-1}^{(r)},\ \lambda_l^{(r-1)},\ \lambda_{l+1}^{(r-1)},\ \lambda_{r-1}^{(r-1)},\ n$$

leží jeden kořen rovnice $\varphi_r(\lambda)=0$.

Označme je po řadě $\lambda_1^{(r)},\ \lambda_2^{(r)},\ \ldots\ \lambda_l^{(r)},\ \lambda_{l+1}^{(r)}\ \ldots\ \lambda_r^{(r)}$. I je $\lambda_{l+1}^{(r)}>\lambda_l^{(r-1)}$ $(l=1,2,\ldots r-1)$ a z (11) plyne pro $\lambda=\lambda_l^{(r-1)}-1$, že

$$sgn\,\varphi_r(\lambda_l^{(r-1)}-1)=sgn\,\varphi_{r-1}(\lambda_l^{(r-1)}-1)=(-1)^{r+1}$$
$$(l=1,2,\ldots r-1),$$

tak že je tedy $\lambda_l^{(r)}<\lambda_l^{(r-1)}-1$ $(l=1,2,\ldots r-1)$.

Z těchto dvou nerovnin vychází

$$\lambda_{l+1}^{(r)}-\lambda_l^{(r)}>1\quad(l=1,2,\ldots r-1).$$

Tím dokázána i druhá část věty.

Je-li $r$ liché, je $-\frac{r}{2}$ kořenem rovnice $\varphi_r(\lambda)=0$; $\frac{r-1}{2}$ kořenů je mezi $-n-r$ a $-\frac{r}{2}$ a rovněž tolik mezi $-\frac{r}{2}$ a $n$. Je-li $r$ sudé, je $\frac{r}{2}$ kořenů mezi $-n-r$ a $-\frac{r}{2}$ a $\frac{r}{2}$ kořenů mezi $-\frac{r}{2}$ a $n$.

Nyní si odvodíme rekurentní vzorce vyjadřující $\varphi_{r+1}(\lambda)$ pomocí $\varphi_r(\lambda)$ a $\varphi_{r-1}(\lambda)$.

Za tím účelem položme

$$\psi_r(x)=\sum_{l=0}^{r}\binom{r}{l}(n-l)\ldots(n-\lambda-l+1)(n+\lambda+l+1)\ldots(n+\lambda+r)\,x_l,$$

tak že

$$q_r(\lambda) = \psi_r(-1).$$

Zkoumejme, není-li možno stanoviti $A, B, C, D$ neodvisle od $x$ tak, aby platilo identicky v $x$.

$$\psi_{r+1}(x) = (A + Bx)\,\psi_r(x) + (C + Dx)\,\psi_{r-1}(x).$$

I je koefficient u $x^l$ pro $0 \leqq l \leqq r$ ve výrazech

$$\psi_r(x) : \binom{r}{l}(n-\lambda)\ldots(n-\lambda-l+1)\,(n+\lambda+l+1)\ldots (n+\lambda+r) = N,$$

$$x\psi_r(x) : \binom{r}{l-1}(n-\lambda)\ldots(n-\lambda-l+2)\,(n+\lambda+l)\ldots (n+\lambda+r) = N\frac{l(n+\lambda+l)}{(r-l+1)(n-\lambda+1)},$$

$$\psi_{r+1}(x) : \binom{r+1}{l}(n-\lambda)\ldots(n-\lambda-l+1)\,(n+\lambda+l+1)\ldots (n+\lambda+r+1) = N\,\frac{(r+1)(n+\lambda+r+1)}{r-\lambda+1},$$

$$\psi_{r-1}(x) : \binom{r-1}{l}(n-\lambda)\ldots(n-\lambda-l+1)(n+\lambda+l+1)\ldots (n+\lambda+r-1) = N\frac{r-l}{r(n+\lambda+r)},$$

$$x\psi_{r-1}(x) : \binom{r-1}{l-1}(n-\lambda)\ldots(n-\lambda-l+2)\,(n+\lambda+l)\ldots (n+\lambda+r-1) = N\frac{l(n+\lambda+l)}{r(n-\lambda-l+1)(n+\lambda+r)}.$$

Srovnáním v koefficientů u $x^l$ v rovnici (12′) dostaneme k určení $A, B, C, D$ vztah

$$\frac{(r+1)(n+\lambda+r+1)}{r-l+1} = A + B\frac{l(n+\lambda+l)}{(r-l+1)(n-\lambda-l+1)} + C\frac{r-1}{r(n+\lambda+r)} + D\,\frac{l(n+\lambda-l+1)}{r(n-\lambda+l)},$$

který má býti splněn pro všechny celé hodnoty $0 \leqq l \leqq r$. Je možno jej splniti identicky pro $l$. Odstraníme-li zlomky a převedeme vše na jednu stranu, obdržíme mnohočlen třetího stupně v $l$. Klademe-li pak postupně $l = r + 1, n - \lambda + 1, \infty, 0,$ obdržíme

$$B = n - \lambda - r,\ D = r(n + \lambda + r),\ C = -r(n + \lambda + r)$$
$$A = n + \lambda + 2r + 1$$

rovná-li se pak mnohočlen 3. stupně 0 pro 4 hodnoty, je roven 0 identicky. Poněvadž pak také koefficienty u $n^{r+1}$ se rovnají je

$$\psi_{r+1}(x) = [(n + \lambda + 2r + 1) + (n - \lambda - r)\,n]\,\psi_r(x)$$
$$- r(n + \lambda + r)(1 - n)\,\psi_{r-1}(x)\,{}^*).$$

Klademe-li pak $n = -1$, obdržíme hledaný vzorec

$$\varphi_{r+1}(\lambda) = (2\lambda + 3r + 1)\,\varphi_r(\lambda) - 2r(\lambda + n = r)\,\varphi_{r-1}(\lambda).$$

Odtud můžeme snadno nalézti rekurentní relaci pro koeficienty mnohočlenů $\varphi_r(\lambda)$.

Položme

$$\varphi_r(\lambda) = 2^r(\lambda^r + A_2^{(r)}\lambda^{r-1} + A_2^{(r)}\lambda^{r-2} + \ldots + A_l^{(r)}\lambda^{r-k}$$
$$+ \ldots + A_r^{(r)}),$$

kdež $A_1^{(r)}, A_1^{(r)}, \ldots A_r^{(r)}$ jsou mnohočleny v $n$.

Dosaďme do (12). Srovnáním koefficientů u $\lambda^{r+1-l}$ dostaneme

$$A_l^{(r+1)} = A_l^{(r)} + \frac{3r+1}{2} A_{l-1}^{(r)} - \frac{r}{2} A_{l-1}^{(r-1)}$$

$$-\frac{r}{2}(n + r)\,A_{l-2}^{(r-1)}$$

$$l = 1, 2, \ldots r + 1,$$

$$A_{-1}^{(r)} = 0,\ A_0^{(r)} = 1,\ A_{r+1}^{(r)} = A_{r+2}^{(r)} = \ldots = 0.$$

Nám bude stačiti znalost koefficientů $A_1^{(r)}, A_2^{(r)}$.

---

*) $\psi_r(x)$ dá se vyjádřiti pomocí řady hypergeometrické

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}\,x + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)\,\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}\,x^2 + x\ldots$$

Jest totiž

$$\psi_r(x) = (n + \lambda + 1)\ldots(n + \lambda + r)\ F(-r, \lambda - n, \lambda + n + 1, x).$$

Rekurentní vzorec (12) vzniká pak z relace pro tři sousední funkce hypergeometrické

$$[2\alpha - \gamma + (\beta - \alpha)x]\ F(\alpha, \beta, \gamma, x) + (\gamma - \alpha)\ F(\alpha - 1, \beta, \gamma, x)$$
$$- \alpha(1 - x)\,F(\alpha + 1, \beta, \gamma, x) = 0.$$

Pro $l = 1$ dostaneme

$$A_1^{(r+1)} = A_1^{(r)} + \tfrac{1}{2}(2r + 1).$$

Klaďme $r = 0, 1, 2, \ldots r - 1$ a sečtěme; ježto $A_1^{(0)} = 0$, bude

$$A_1^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r} (2r - 1) = \frac{1}{2} r^2.$$

Pro $l = 2$ dostaneme

$$A_2^{(r+1)} = A_2^{(r)} + \frac{3r + 1}{2} A_1^{(r)} - \frac{r}{2} A_1^{(r-1)} - \frac{r(n + r)}{2},$$

a odtud, ježto

$$A_1^{(r)} = \tfrac{1}{2} r^2, \quad A_1^{(r-1)} = \tfrac{1}{2}(r - 1)^2,$$

dostaneme

$$A_2^{(r+1)} = A_2^{(r)} - \tfrac{1}{2} rn + \tfrac{1}{4}(2r^3 + r^2 - r).$$

Klademe-li $r = 1, 2, \ldots r - 1$, uvážíme, že $A_2^{(r)} = 0$, obdržíme sečtením

$$A_2^{(r)} = - \frac{n}{2} \sum_{r=1}^{r-1} r + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r-1} r^3 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r-1} \frac{r(r - 1)}{2}$$

a tedy, ježto

$$\sum_{r=1}^{r-1} r^3 = \left[\frac{r(r - 1)}{2}\right]^2, \quad \sum_{r-1}^{r-1} \binom{r}{2} = \binom{r}{3},$$

$$A_2^{(r)} = \frac{r(r - 1)}{4} \left[- n + \frac{(r + 1)(3r - 4)}{6}\right].$$

Pomocí $A_1^{(r)}$ a $A_2^{(r)}$ můžeme určiti horní hranici kořenů rovnice $\psi_r(\lambda) = 0$ pro $n$ dostatečně velké. Jest totiž součet čtverců kořenů rovnice té

$$\lambda_1^{(r)2} + \lambda_2^{(r)2} + \ldots + \lambda_r^{(r)} = A_1^{(r)2} - 2A_2^{(r)}$$
$$= \tfrac{1}{2} r(r - 1) n + \frac{r(4r^2 + 3r - 4)}{12}.$$

Bude tedy pro dostatečně velké $n$ (patrně jakmile bude

$$- \frac{rn}{2} + \frac{r(4r^2 + 3r - 4)}{12} < 0$$

t. j.
$$n > \frac{(4r^2 + 3r - 4)}{6}$$

$$\lambda_1^{(r)2} + \lambda_2^{(r)2} + \ldots \quad \lambda_r^{(n)2} < \tfrac{1}{2} r^2 n.$$

Z reálností kořenů $\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \ldots \lambda_r^{(r)}$ plyne, že tím spíše bude

$$\lambda_r^{(r)2} < \tfrac{1}{2} r^2 n$$
$$\lambda_r^{(r)} < \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{n}.$$

*Jest tedy* $\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$ *horní hranice kořenů kladných rovnice* $\varphi_r(\lambda) = 0$ *pro dosti velké* $n$.

Dokážeme si nyní větu:

*Je-li* $0 \leqq \lambda \leqq c\sqrt{n}$, *kdež* $c$ *je kladné číslo nezávislé na* $n$, *je pro dosti velké* $n$

$$|\varphi_r(\lambda)| < c_r n^{\frac{r}{2}}, \tag{13}$$

*kdež* $c_r$ *je kladné číslo nezávislé na* $n$.

Důkaz provedeme pomocí vzorce (12) úplnou indukcí. Pro $\varphi_0(\lambda) = 1$ a $\varphi_1(\lambda) = 2\lambda + 1$ věta jistě platí. Předpokládejme její platnost pro $\varphi_0(\lambda), \varphi_1(\lambda), \ldots \varphi_r(\lambda)$ a dokažme ji na základě toho také pro $\varphi_{r+1}(\lambda)$.

Ze vzorce (12) plyne

$$|\varphi_{r+1}(\lambda)| < (2\lambda + 3r + 1) c_r n^{\frac{r}{2}} + 2r(\lambda + n + r)\, c_{r-1} n^{\frac{r-1}{2}}$$

a ježto pro dosti velké $n$

$$2\lambda + 3r + 1 < (2c + 1)\sqrt{n}$$
$$\lambda + n + r < 2n,$$

bude

$$|\varphi_{r+1}(\lambda)| < n^{\frac{r+1}{2}} [(2c + 1) c_r + 4r\, c_{r-1}],$$

takže, klademe-li $c_{r+1} = (2c + 1) c^r + 4r\, c_{r-1}$, je věta dokázána. (Patrně je $c_{r+1} > c_r$).

Na základě toho dokážeme:

*Pro všechna* $\lambda$ *v intervalu* $0 \leqq \lambda \leqq n$ *je při dosti velkém* $n$

$$|\Delta^r K(\lambda)| < \frac{c_r}{n^{\frac{r}{2}}},$$

*kdež* $c_r$ *je kladné číslo nezávislé na* $n$.

Poněvadž horní hranice kořenů kladných rovnice $\varphi^{r+1}(\lambda) = 0$ je $\frac{r+1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$, bude pro $\lambda \geqq \frac{r+1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$ platiti $\varphi_{r+1}(\lambda) > 0$, t. j. též $(-1)^{r+1}\Delta^{r+1}K(\lambda) > 0$.

Horní hranice kořenů rovnice $\varphi_r(\lambda)$ je $\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$, tedy tím spíše pro

$$\lambda \geqq \frac{r+1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$$

platí

$$\varphi_r(\lambda) > 0 \quad \text{a} \quad (-1)^r \Delta^r K(\lambda) > 0.$$

Položme

$$\bar{\lambda} = \left[\frac{r+1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\right],$$

tak, že $\lambda$ je celé číslo, pro které platí nerovnosti

$$\frac{r+1}{\sqrt{2}}\sqrt{n} \leqq \bar{\lambda} < \frac{r+1}{\sqrt{2}}\sqrt{n} + 1.$$

I bude pro $\bar{\lambda} \leqq \lambda \leqq n$

$$\Delta^r K(\lambda) = \Delta^r K(\bar{\lambda}) + \sum_{l=1}^{\lambda-1} \Delta^{r+1} K(l),$$

t. j.

$$(-1)^r \Delta^r K(\lambda) = (-1)^r \Delta^r K(\bar{\lambda}) - \sum_{l=\bar{\lambda}}^{\lambda-1} (-1)^{r+1} \Delta^{r-1} K(l),$$

nebo-li

$$|\Delta^r K(\lambda)| = |\Delta^r K(\bar{\lambda})| - \sum_{l=\bar{\lambda}}^{\lambda-1} |\Delta^{r+1} K(l)|.$$

Z toho plyne, že $|\Delta^r K(\lambda)|$ klesá, roste-li $\lambda$ od $\bar{\lambda}$ do $n$ a je

$$|\Delta^r K(\lambda)| \geqq |\Delta^r K(\bar{\lambda})| \tag{14'}$$

pro $\bar{\lambda} \leqq \lambda \leqq n$.

Užijme věty předešlé. Zvolme $c$ tak, aby $\bar{\lambda} < c\sqrt{n}$. (Stačí při $n > 1$ patrně položiti

$$c = \frac{r+1}{\sqrt{2}} + 1).$$

Pak bude

$$|\varphi_r(\lambda)| < c_r n^{\frac{r}{2}}.$$

Ježto

$$(-1)^r \Delta^r K(\lambda) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+2} \cdots \frac{n-\lambda+1}{n+\lambda}$$

$$\cdot \frac{\varphi_r(\lambda)}{(n+\lambda+1)\ldots(n+\lambda+r)},$$

$$\frac{n}{n+1} < 1, \frac{n-1}{n+2} < 1, \ldots \frac{n-\lambda+1}{n+\lambda} < 1,$$

$$(n+\lambda+1)\ldots(n+\lambda+r) > n^r,$$

bude

$$|\Delta^r K(\lambda)| < \frac{c_r}{n^{\frac{r}{2}}} \text{ pro } 0 \leqq \lambda \leqq c\sqrt{n}.$$

Ježto $\bar{\lambda} < c\sqrt{n}$ bude také

$$|\Delta^r K(\bar{\lambda})| < \frac{c_r}{n^{\frac{r}{2}}}$$

a na základě (14′), bude

$$|\Delta^r K(\lambda)| < \frac{c_r}{n^{\frac{r}{2}}}$$

pro $\bar{\lambda} \leqq \lambda \leqq n$.

I vidíme, že skutečně platí pro dosti velké $n$ nerovnost (14) pro celý interval $0 \leqq \lambda \leqq n$.

Nyní je již důkaz III. zcela snadný.

Horní hranice kořenů rovnice $\varphi_{k+1}(\lambda) = 0$ je $\frac{k+1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$.

Označme

$$m = \left[\frac{k+1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\right].$$

Pak existuje kladné číslo $\gamma$ nezávislé na $n$ takové, že při dosti velkém $n$ je $m < \gamma\sqrt{n}$. (Stačí pro $n > 1$ voliti $\gamma = \frac{k+1}{\sqrt{2}} + 1$).

Pro $m \leqq \lambda \leqq n$ je pak $(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}K(\lambda) > 0$. I bude

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \left|\binom{\lambda+k}{k}(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}K(\lambda)\right| \leqq S_1 + S_2,$$

kdež

$$S_1 = \sum_{\lambda=0}^{m-1} \left| \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda) \right|,$$

$$S_2 = \sum_{\lambda=m}^{n} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda).$$

Ježto

$$| \Delta^{k+1} K(\lambda) | < \frac{c_{k+1}}{n^{\frac{k+1}{2}}},$$

bude

$$S_1 < \frac{c_{k+1}}{n^{\frac{k+1}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \binom{\lambda+k}{k} = \frac{c_{k+1}}{n^{\frac{k+1}{2}}} \binom{m+k}{k+1} = \frac{c_{k+1}(m+k)\ldots m}{n^{\frac{k+1}{2}}\,.\,(k+1)!}.$$

Pro dosti velké $n$ jest však jistě

$$m+k < (\gamma+1)\sqrt{n},\; m+k-1 < (\gamma+1)\sqrt{n}, \ldots m < (\gamma+1)\sqrt{n},$$

$$(m+k)\ldots m < (\gamma+1)^{k+1} n^{\frac{k+1}{2}},$$

tedy

$$S_1 < \frac{c_{k+1}(\gamma+1)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Užijeme-li vzorce (9), obdržíme

$$S_2 = \sum_{\lambda=m}^{n} \binom{\lambda+k}{k} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda) = \sum_{l=0}^{k} \binom{m+l-1}{l} (-1)^l \Delta^l K(m).$$

Zde

$$\binom{m+l-1}{l} = \frac{(m+l-1)(m+l-2)\ldots m}{l} < \frac{(\gamma+1)^l n^{\frac{l}{2}}}{l!}$$

a tedy

$$S_2 < \sum_{l=0}^{k} \frac{(\gamma+1)^l n^{\frac{l}{2}}}{l!} \frac{c_l}{n^{\frac{k}{2}}},$$

$$S_2 < \sum_{l=0}^{k} \frac{(\gamma+1)^l}{l!} c_l,$$

$$S_1 + S_2 < \sum_{l=0}^{k+1} \frac{(\gamma+1)^l}{l!} c_l.$$

(Uvážíme-li, že $c_l < c_{k+1}$ pro $\lambda = 0, 1, 2, \ldots k$, bude

$$S_1 + S_2 < c_{k+1} \sum_{l=0}^{k+1} \frac{(\gamma+1)^l}{l!} < c_{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\gamma+1)^l}{l!} = e^{\gamma+1}).$$

Tím tvrzení III. dokázáno.

*Poznámka.*

Také pomocí relace (12) můžeme dokázati realitu kořenů rovnic $\varphi_r(\lambda) = 0$ na základě věty Sturmovy.

Pišme

$$\varphi_r(\lambda) = \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} (\lambda - n)(\lambda - n - 1) \ldots (\lambda - n + l - 1)(\lambda + n + l + 2) \ldots (\lambda + n + r).$$

Z toho vidíme ihned, že při $n > 0$ pro $\lambda \leqq - n - r$ je

$$sgn\, \varphi_r(\lambda) = (-1)^r,$$

takže všechny kořeny rovnice $\varphi_r(\lambda)$ jsou $> - n - r$.

Nyní vidíme, že pro interval $- \infty \ldots \infty$ má posloupnost mnohočlenů $\varphi_r(\lambda)$, $\varphi_{r-1}(\lambda)$, $\ldots \varphi_1(\lambda)$, $\varphi_0(\lambda) = 1$ tyto vlastnosti:

1. Poslední mnohočlen $\varphi_0(\lambda) = 1$ nemění znamení.
2. Dva sousední mnohočleny nemizí pro tutéž hodnotu $\lambda$.
3. Zmizí-li některý z mnohočlenů vnitřních, mají mnohočleny s ním sousedící protivná znamení.
4. Vlastnost Sturmových posloupností, že totiž podíl $\frac{\varphi_r(\lambda)}{\varphi_{r-1}(\lambda)}$ stává-li $\lambda = 0$, přechází při rostoucím se vždy od hodnoty záporné ke kladné, je jistě splněna dle poznámky na konci odst. 133., Serret: Cours d'Algébre I. (5. vyd. str. 288.), poněvadž posloupnost mnohočlenů pro $\lambda = - \infty$ poskytuje samé variace, pro $\lambda = \infty$ vesměs znaménka kladná, takže počet variací, které se ztrácejí při přechodu od $- \infty$ k $\infty$, je roven právě stupni rovnice $\varphi_r(\lambda) = 0$. Rovnice ta má vesměs reálné kořeny a tyto jsou oddělovány kořény rovnice $\varphi_{r-1}(\lambda) = 0$.