Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Novotný

Příspěvek k sestrojení kuželoseček a jich tečných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 5, 209--224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122139

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1887

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

kde m je libovolná hodnota různá od nully, a_{44} pak zcela libovolná; zde

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = m,$$

a současně na př. $\Delta_{11} = -m \gtrless 0$.

Tuto rovnici nelze nižádnou transformací (27) činící totožně

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

t. j. hovící výminkám (25) a (26) převésti na tvar

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + a_{44} = 0.$$

Toto faktum lze stručně vyjádřiti slovy, že plocha (47) nemá tři hlavní osy.

Obdobný výrok platí o případu, kdy kubická rovnice má tři stejné kořeny.

V Praze, v září 1886.

Příspěvek k sestrojení kuželoseček a jich tečných.

Pro žáky středních škol napsal

Josef Novotný,
professor v Přerově.

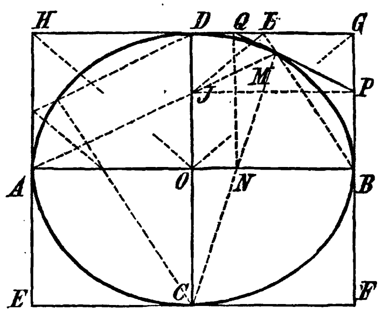
Článek tento jest příspěvkem k řešení známého problému „o sestrojení kuželoseček ze sdružených průměrů.“ Konstrukce vyvozené jsou dvojího druhu; jednak se tu sestrojují jednotlivé body kuželoseček jakožto průsečíky dvou paprsků a jednak se sestrojují tečné kuželoseček s body tečnými.

A. Ellipsa.

1. *Má se najíti poměr, ve kterém dělí paprsky sestrojené bodem* M *ellipsy ku krajním bodům* A, B *průměru, poloviční sdružený průměr* OD *a poloviční stranu* DG *opsaného rovnoběžníka.*

Řešení. Buďtež v této, jakož i ve všech následujících úlohách o ellipse a hyperbole, sdružené průměry $AB = 2a$, $CD = 2b$

(obr. 1.) osami soustavy souřadnic rovnoběžných. K vůli sn-
šímu řešení zvolme bod J na ose Y tak, aby měl pořadí
$y = OJ = r\frac{b}{n}$, kdežto úsečka $x = 0$. Souřadnice bodu A
jsou $x = -a$, $y = 0$.



Obr. 1.

Rovnice paprsku AJ zní tudíž

$$ay - \frac{r}{n}bx = \frac{r}{n}ab. \tag{α}$$

Paprsek AJ protne ellipsu v bodě M, jehož souřadnice vyhovují rovnici

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.\text{*)} \tag{β}$$

Pro bod M platí rovnice (α), (β) současně i vyjdou hodnoty pro jeho souřadnice řešením těch rovnic.

Z rovnice (α) jest $ay = \frac{r}{n}b(x + a)$.

Dosadíme-li tu hodnotu do rovnice (β), jest

$$(n^2 + r^2)x^2 + 2r^2ax = (n^2 - r^2)a^2.$$

Řešením této kvadratické rovnice vyjdou za x dvě hodnoty:

$$x_1 = \frac{n^2 - r^2}{n^2 + r^2}a, \quad x_2 = -a,$$

z nichž první přísluší bodu M; hodnota za y jest pak

$$y_1 = \frac{2nr}{n^2 + r^2}b.$$

Má tedy bod M souřadnice

*) Viz: Jandečka, Geometria, II. vyd., pag. 94.

$$(\gamma)\qquad x = \frac{n^2 - r^2}{n^2 + r^2}\,a, \quad y = \frac{2\,nr}{n^2 + r^2}\,b.$$

Souřadnice bodu B jsou $x = a$, $y = 0$.

Rovnice paprsku BM zní tudíž

$$(\delta)\qquad y = -\frac{n}{r}\,\frac{b}{a}\,x + \frac{n}{r}\,b.$$

Pro průsečík L paprsku BM se stranou HG se položí v rovnici (δ) za $x = \mathrm{DL}$, za $y = b$; pak jest

$$b = -\frac{n}{r}\,\frac{b}{a}\,\mathrm{DL} + \frac{n}{r}\,b,$$

z čehož

$$(1)\qquad \mathrm{DL} = \frac{n - r}{n}\,a = \frac{n - r}{n}\,\mathrm{DG}.$$

Dále jest $\mathrm{DJ} = \mathrm{DO} - \mathrm{JO}$.

Zavedeme-li za JO hodnotu, vyjde

$$(2)\qquad \mathrm{DJ} = \frac{n - r}{n}\,b = \frac{n - r}{n}\,\mathrm{DO}.$$

Z rovnic (1), (2) se snadno zjedná úměra

$$(3)\qquad \mathrm{DJ} : \mathrm{DO} = \mathrm{DL} : \mathrm{DG}.$$

Z úměry (3) jde, že *paprsky* AM, BM *dělí poloviční sdružený průměr a poloviční stranu v stejném poměru.*

Důsledek. Úměry (3) lze užiti k sestrojení ellipsy do rovnoběžníka. Sestrojení jest následující: Zvolme bod J (obr. 1.) na průměru CD, sestrojme JL || OG, vznikne bod L na straně HG. Paprsky AJ, BL se protnou v bodě M, jenž patří ellipse.

2. *Má se najíti poměr, ve kterém dělí tečná sestrojená v bodě ellipsy poloviční strany opsaného rovnoběžníka.*

Řešení. Souřadnice bodu M (obr. 1.) buďtež x_1, y_1.

Rovnice tečné v bodě M zní

$$(\alpha)\qquad b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2.$$

Pro průsečík P tečné se stranou FG se položí v rovnici (α) za $x = a$, za $y = \mathrm{BP}$, i jest pak

$$(1)\qquad \mathrm{BP} = \frac{b^2\,(a - x_1)}{a y_1}.$$

Rovnice paprsku AM pak zní

$$(\beta)\qquad y = \frac{y_1}{x_1 + a}\,x + \frac{a y_1}{x_1 + a}.$$

Pro průsečík J paprsku AM s průměrem CD se položí v rovnici (β) za $x = 0$, za $y =$ OJ, i jest pak

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{OJ} = \frac{ay_1}{x_1 + a}.$$

Pro bod M platí

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

z čehož se vypočte

$$b^2(a^2 - x_1^2) = a^2y_1^2.$$

Dělíme-li obě strany na $ay_1\,(a + x_1)$, vyjde:

$$(\gamma) \qquad \frac{b^2(a - x_1)}{ay_1} = \frac{ay_1}{a + x_1}.$$

Z rovnic (1), (2), (γ) plyne, že

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{BP} = \mathrm{OJ}.$$

Z rovnice (3) jest patrno, že *tečná v bodě* M *utíná na straně* FG *od bodu* B *takovou část, jakou utíná paprsek* AM *na průměru* CD *od bodu* O.

Dále stanovme průsečík Q tečné se stranou HG, tu jest třeba položiti v rovnici (α) za $x =$ DQ, za $y = b$; i jest pak

$$\text{(1}'\text{)} \qquad \mathrm{DQ} = \frac{a^2(b - y_1)}{bx_1}.$$

Rovnice paprsku CM pak zní

$$(\beta') \qquad y = \frac{y_1 + b}{x_1}\,x - b.$$

Pro průsečík N paprsku CM s průměrem AB se položí v rovnici (β') za $x =$ ON, za $y = 0$; i jest pak

$$\text{(2}'\text{)} \qquad \mathrm{ON} = \frac{bx_1}{y_1 + b}.$$

Pro bod M platí $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$, z čehož se vypočte:

$$b^2x_1^2 = a^2(b^2 - y_1^2).$$

Dělíme-li obě strany na $bx_1\,(b + y_1)$, vyjde

$$(\gamma') \qquad \frac{bx_1}{b + y_1} = \frac{a^2(b - y_1)}{bx_1}.$$

Srovnáním rovnic (1′), (2′), (γ') plyne, že

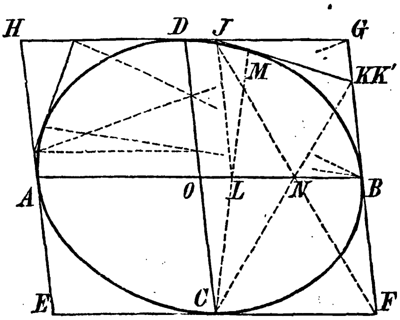
$$\text{(3}'\text{)} \qquad \mathrm{DQ} = \mathrm{ON}.$$

Z rovnice (3′) jde, že *tečná v bodě* M *utíná na straně* HG *od bodu* D *takovou část, jakou utíná paprsek* CM *na průměru* AB *od bodu* O.

Důsledek. Pravidla obsaženého v rovnicích (3) a (3′) lze užiti k sestrojení tečné v bodě ellipsy. Sestrojení jest následující: Spojme bod M (obr. 1.) s koncem průměru A, povstane na sdruženém průměru bod J. Rovnoběžka s průměrem AB sestrojená tím bodem protne stranu FG v bodě P, jímž prochází tečná. Bod Q, v němž protíná tečná stranu HG, sestrojí se rovnoběžkou s průměrem CD bodem N, v němž seče paprsek CM průměr AB.

3. *Má se najíti poměr, ve kterém dělí tečná sestrojená k ellipse bodem vytknutým na straně opsaného rovnoběžníka, poloviční stranu sousední.*

Řešení. Vytkněme bod J (obr. 2.) na straně GH tak, aby bylo $x = DJ = \frac{r}{n} a$, $y = b$. Tečná sestrojená bodem J k ellipse dotkne se této v bodě M (ξ, η) a protne sousední stranu v bodě K.



Obr. 2

Rovnice tečné v bodě M má tvar

$$(\alpha) \qquad b^2\xi x + a^2\eta y = a^2b^2.$$

Vzhledem k bodu J platí

$$(\beta) \qquad \frac{r}{n} b\xi + a\eta = ab.$$

Vzhledem k bodu M jest

$$(\gamma) \qquad b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2.$$

Souřadnice bodu M vyjdou tudíž řešením rovnic (β), (γ) a sice

$$\xi = \frac{2nr}{n^2 + r^2} a, \quad \eta = \frac{n^2 - r^2}{n^2 + r^2} b.$$

Rovnice tečné v bodě M pak zní

$$(\delta)\qquad \frac{2nr}{n^2+r^2}bx+\frac{n^2-r^2}{n^2+r^2}ay=ab.$$

Pro průsečík K tečné se stranou FG se položí v rovnici (δ) za $x=a$, za $y=\mathrm{BK}$; pak jest

$$(1)\qquad \mathrm{BK}=\frac{n-r}{n+r}b.$$

Napišme rovnici přímky FJ; ta zní

$$(\varepsilon)\qquad y=-\frac{2n}{n-r}\frac{b}{a}x+\frac{n+r}{n-r}b.$$

Pro průsečík N paprsku FJ s průměrem AB se položí v rovnici (ε) za $y=0$, za $x=\mathrm{ON}$; i jest

$$\mathrm{ON}=\frac{n+r}{2n}a.$$

Dále napišme rovnici přímky CN; ta jest

$$(\eta)\qquad y=\frac{2n}{n+r}\frac{b}{a}x-b.$$

Pro průsečík K′ paprsku CN se stranou FG se položí v rovnici (η) za $x=a$, za $y=\mathrm{BK}'$; i jest

$$(2)\qquad \mathrm{BK}'=\frac{n-r}{n+r}b.$$

Z rovnic (1), (2) jde

$$(3)\qquad \mathrm{BK}'=\mathrm{BK}.$$

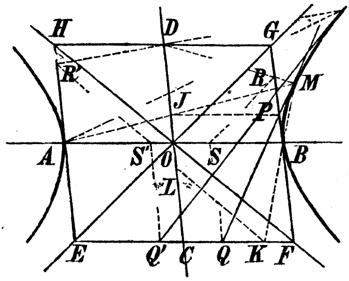
Z rovnice (3) plyne, že *tečná bodem* J *protíná stranu* FG *v témž bodě, ve kterém ji protíná paprsek* CN *jdoucí průsečíkem* N *paprsku* JF *s průměrem* AB.

Důsledek. Věty obsažené v rovnici (3) lze užiti k sestrojení ellipsy do rovnoběžníka pomocí tečných. Sestrojení jest následující: Vytkněme bod J (obr. 2.) na straně HG. Paprskem JF určí se bod N a paprskem CN bod K, jímž prochází tečná. Dotyčný bod leží v průsečíku paprsku CL s tečnou.

B. Hyperbola.

1. *Má se najíti poměr, ve kterém dělí paprsky sestrojené bodem* M *hyperboly ku krajním bodům* A, B *průměru, poloviční sdružený průměr* OD *a poloviční stranu* CF *opsaného rovnoběžníka.*

Řešení. Zvolme bod J (obr. 3.) tak, aby souřadnice jeho byly $x = 0$, $y = 0J = r\frac{b}{n}$. Souřadnice bodu A jsou $x = -a$, $y = 0$.



Obr. 3.

Rovnice paprsku AJ zní tudíž

$$(\alpha) \qquad ay - \frac{r}{n}bx = \frac{r}{n}ab.$$

Paprsek AJ protne hyperbolu v bodě M, jehož souřadnice vyhovují rovnici

$$(\beta) \qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.\text{*)}$$

Pro bod M platí rovnice (α), (β) současně i vyjdou hodnoty pro jeho souřadnice řešením těch rovnic a sice

$$(\gamma) \qquad x = \frac{n^2 + r^2}{n^2 - r^2}a, \quad y = \frac{2nr}{n^2 - r^2}b.$$

Souřadnice bodu B jsou $x = a$, $y = 0$.

Rovnice paprsku BM zní tudíž

$$(\delta) \qquad y = \frac{n}{r}\,\frac{b}{a}x - \frac{n}{r}b.$$

Pro průsečík K paprsku BM se stranou EF se položí v rovnici (δ) za $x = \mathrm{CK}$, za $y = -b$; pak jest

$$(1) \qquad \mathrm{CK} = \frac{n-r}{n}a = \frac{n-r}{n}\,\mathrm{CF}.$$

Dále jest

$$\mathrm{DJ} = \mathrm{DO} - \mathrm{JO}.$$

Zavedeme-li za JO hodnotu, vyjde

$$(2) \qquad \mathrm{DJ} = \frac{n-r}{n}b = \frac{n-r}{n}\,\mathrm{DO}.$$

*) Viz: Jandečka, Geometria, II. vyd., pag. 117.

Z rovnic (1), (2) se snadno zjedná úměra

(3) $$DJ : DO = CK : CF,$$

Z úměry (3) jde, že *paprsky* AM, BM *dělí poloviční sdružený průměr a poloviční stranu v stejném poměru.*

Důsledek. Úměry (3) lze užiti k sestrojení hyperboly opsané rovnoběžníku. Sestrojení jest následující: Zvolme bod J (obr. 3.) na průměru CD, učiňme $LO = OJ$ a $LK \parallel OF$, vznikne bod K na straně EF. Paprsky AJ, BK se protnou v bodě M, jenž patří hyperbole.

2. *Má se najíti poměr, ve kterém dělí tečná sestrojená v bodě hyperboly poloviční strany opsaného rovnoběžníka.*

Řešení. Souřadnice bodu M (obr. 3.) buďtež x_1, y_1.

Rovnice tečné v bodě M zní

(α) $$b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2.$$

Pro průsečík P tečné se stranou FG se položí v rovnici (α) za $x = a$, za $y = BP$, i jest pak

(1) $$BP = \frac{b^2(x_1 - a)}{a y_1}.$$

Rovnice paprsku AM pak zní

(β) $$y = \frac{y_1}{x_1 + a} x + \frac{a y_1}{x_1 + a}.$$

Pro průsečík J paprsku AM s průměrem CD se položí v rovnici (β) za $x = 0$, za $y = OJ$, i jest pak

(2) $$OJ = \frac{a y_1}{x_1 + a}.$$

Pro bod M platí

$$b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2,$$

z čehož se vypočte

$$b^2(x_1^2 - a^2) = a^2 y_1^2.$$

Dělíme-li obě strany na $a y_1 (x_1 + a)$, vyjde

(γ) $$\frac{b^2(x_1 - a)}{a y_1} = \frac{a y_1}{x_1 + a}.$$

Z rovnic (1), (2), (γ) plyne, že

(3) $$BP = OJ.$$

Z rovnice (3) jest patrno, že *tečná v bodě* M *utíná na straně* FG *od bodu B takovou část, jakou utíná paprsek* AM *na průměru* CD *od bodu* O.

Pro průsečík Q tečné se stranou EF se položí v rovnici (α) za $x = \mathrm{CQ}$, za $y = -b$, i jest pak

$$\mathrm{CQ} = \frac{a^2(b - y_1)}{bx_1}.$$

Dále jest $\quad \mathrm{FQ} = \mathrm{FC} - \mathrm{QC}.$

Dosadíme-li sem hodnotu za QC z předešlé rovnice, vyjde

$$(1') \quad \mathrm{FQ} = \frac{ay_1 + bx_1 - ab}{bx_1} \cdot a = \frac{ay_1 + bx_1 - ab}{bx_1} \cdot \mathrm{FC}.$$

Rovnice paprsku DM pak zní

$$(\beta') \qquad y = \frac{y_1 - b}{x_1} x + b.$$

Pro průsečík R paprsku DM se stranou FG se položí v rovnici (β') za $x = a$, za $y = \mathrm{BR}$, i jest pak

$$\mathrm{BR} = \frac{y_1 - b}{x_1} a + b,$$

což se snadno uvede na tvar

$$(2') \quad \mathrm{BR} = \frac{ay_1 + bx_1 - ab}{bx_1} \cdot b = \frac{ay_1 + bx_1 - ab}{bx_1} \cdot \mathrm{BG}.$$

Z rovnic (1′), (2′) se pak vyvodí úměra

$$(3') \qquad \mathrm{BR} : \mathrm{BG} = \mathrm{FQ} : \mathrm{FC}.$$

Z úměry (3) jde, že *tečná v bodě* M *dělí polovici strany* EF *v témž poměru, ve kterém dělí paprsek* DM *polovici strany* FG.

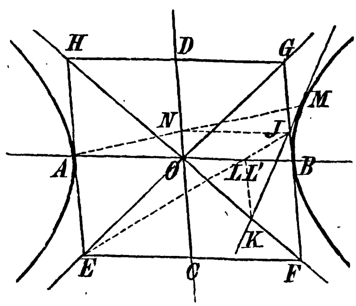
Důsledek. Pravidla obsaženého v rovnici (3) a úměře (3′) lze užiti k sestrojení tečné v bodě hyperboly. Sestrojení jest následující: Spojme bod M (obr. 3.) s konci A, D obou průměrů, i povstane na průměru CD bod J a na straně FG bod R. Rovnoběžka s průměrem AB bodem J sestrojená určí bod P a rovnoběžka s EG bodem R a rovnoběžka s průměrem CD bodem S sestrojená určí bod Q. Tečná jest pak spojnice bodů P, Q.

Poznamenání. Tečná sestrojená v průsečíku strany HG s hyperbolou, prochází půlícím bodem C strany EF, jelikož bod R splyne s bodem G. K stanovení bodů Q pro tečné ve vzdálenějších bodech hyperboly lze užiti bodů R′ na straně EH. Leží-li bod hyperboly v nekonečné vzdálenosti, splyne bod R′ s bodem A a tudíž bod Q′ s bodem E; dále splyne bod J s bodem D a tudíž bod P s bodem G. Z toho jde, že jest úhlopříčná EG *asymptotou.* Druhá asymptota jest úhlopříčná FH.

3. *Má se najíti poměr, ve kterém dělí tečná sestrojená k hyperbole bodem vytknutým na straně opsaného rovnoběžníka, poloviční úsek asymptoty.*

Řešení. Vytkněme bod J (obr. 4.) na straně FG tak, aby bylo $x = a$, $y = \mathrm{BJ} = \frac{r}{n} a$. Tečná sestrojená bodem J k hyperbole dotkne se této v bodě M (ξ, η) a protne asymptotu FH v bodě K. Rovnice tečné v bodě M zní

$$(\alpha) \qquad b^2\xi x - a^2\eta y = a^2 b^2.$$



Obr. 4.

Vzhledem k bodu J platí

$$(\beta) \qquad b\xi - \frac{r}{n} a\eta = ab.$$

Vzhledem k bodu M jest

$$(\gamma) \qquad b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = a^2 b^2.$$

Souřadnice bodu M vyjdou tudíž řešením rovnic (β), (γ)

$$\eta = \frac{2nr}{n^2 - r^2} b, \quad \xi = \frac{n^2 + r^2}{n^2 - r^2} a.$$

Rovnice tečné v bodě M pak zní

$$(\delta) \qquad \frac{n^2 + r^2}{n^2 - r^2} bx - \frac{2nr}{n^2 - r^2} ay = ab.$$

Rovnice asymptoty FH pak jest

$$(\varepsilon) \qquad y = -\frac{b}{a} x.$$

Pro průsečík K tečné s asymptotou platí rovnice (δ), (ε) současně. Řešením jich vyjde

$$(1) \qquad x = \mathrm{OL} = \frac{n - r}{n + r} a.$$

Rovnice paprsku EJ zní

$$(\eta)\qquad y=\frac{n+r}{2n}\frac{b}{a}x-\frac{n-r}{2n}b.$$

Pro průsečík L paprsku EJ s osou X se položí v rovnici (η) za $x=$ OL′, za $y=0$, i vyjde

$$(2)\qquad \mathrm{OL}'=\frac{n-r}{n+r}a=\mathrm{OL}.$$

Z rovnice (1) a (2) jest patrno, jak se vyšetří úsečka x bodu K průsečíkem L paprsku EJ s průměrem. Jelikož jest KL || FB, platí úměra

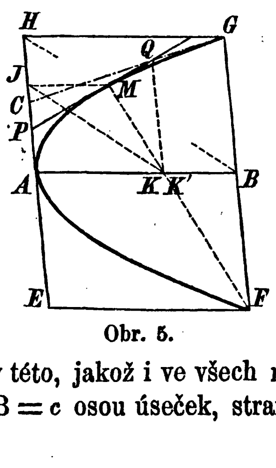
$$(3)\qquad \mathrm{OK}:\mathrm{OF}=\mathrm{OL}:\mathrm{OB}.$$

Úměra (3) značí, že *tečná bodem* J *dělí úsek* OF *asymptoty v tomtéž poměru, ve kterém dělí paprsek* JE *polovici průměru* AB.

Důsledek. Věty obsažené v úměře (3) lze užiti k sestrojení hyperboly opsané rovnoběžníku pomocí tečných. Sestrojení jest následující: Zvolme bod J (obr. 4.) na straně FG libovolně. Paprsek JE stanoví bod L, rovnoběžka s průměrem CD bodem L stanoví bod K a tečná prochází body J, K. Dotyčný bod se určí paprskem AN sestrojeným bodem N tak zvoleným, aby bylo ON = BJ.

C. Parabola.

1. *Má se najíti poměr, ve kterém dělí paprsek* JM *rovnoběžný s průměrem poloviční stranu* AH *a paprsek* FM *průměr* AB *paraboly vepsané do rovnoběžníka.*



Obr. 5.

Řešení. Budiž v této, jakož i ve všech následujících úlohách o parabole průměr AB $=c$ osou úseček, strana EH $=2b$ (obr. 5.)

osou pořadnic soustavy souřadnic rovnoběžných. Zvolme bod J tak, aby měl souřadnice $x=0$, $y=\frac{r}{n}b$.

Rovnice paprsku JM pak zní

$$(\alpha) \qquad y=\frac{r}{n}b.$$

Paprsek JM protne parabolu v bodě M, jehož souřadnice vyhovují rovnici

$$y^2=2qx.\text{*)}$$

Hodnota veličiny q se ustanoví z podmínky, že parabola prochází bodem G, jehož souřadnice jsou $x=c$, $y=b$, tedy

$$b^2=2q\,.\,c,$$

z čehož

$$2q=\frac{b^2}{c}$$

a rovnice paraboly zní

$$(\beta) \qquad y^2=\frac{b^2}{c}x.$$

Pro bod M platí rovnice (α), (β) současně i vyjdou hodnoty pro jeho souřadnice řešením těch rovnic:

$$x=\frac{r^2}{n^2}c,\quad y=\frac{r}{n}b.$$

Vzhledem k souřadnicím bodu F $x=c$, $y=-b$, jest rovnice paprsku FM

$$(\gamma) \qquad y=-\frac{n}{n-r}\frac{b}{c}x+\frac{r}{n-r}b.$$

Pro průsečík K paprsku FM s průměrem AB se položí v rovnici (γ) za $x=\mathrm{AK}$, za $y=0$; pak jest

$$(1) \qquad \mathrm{AK}=\frac{r}{n}c=\frac{r}{n}\mathrm{AB}.$$

Dále jest

$$(2) \qquad \mathrm{AJ}=\frac{r}{n}b=\frac{r}{n}\mathrm{AH}.$$

Z rovnic (1), (2) se snadno zjedná úměra

$$(3) \qquad \mathrm{AJ}:\mathrm{AH}=\mathrm{AK}:\mathrm{AB}.$$

---

*) Viz: Jandečka, Geometria, II. vyd., pag. 130.

Z úměry (3) jde, *že rovnoběžky* JM *dělí poloviční stranu v témž poměru, ve kterém dělí paprsky* FM *průměr.*

Důsledek. Úměry (3) lze užiti k sestrojení paraboly vepsané do rovnoběžníka. Sestrojení jest následující: Zvolme bod J (obr. 5.) na straně EH, sestrojme JK || HB, vznikne bod K na průměru AB. Rovnoběžka JM s průměrem a paprsek FK protnou se v bodě M, jenž patří parabole.

2. *Má se najíti poměr, ve kterém dělí tečná sestrojená v bodě paraboly stranu* EH *opsaného rovnoběžníka a tečnou v bodě* G.

Řešení. Souřadnice bodu M (obr. 5.) buďtež x_1, y_1.

Rovnice tečné v bodě M zní

$$(\alpha) \qquad y y_1 = \frac{b^2}{2c}(x + x_1).$$

Pro průsečík P tečné se stranou EH se položí v rovnici (α) za $x = 0$, za $y = \mathrm{AP}$, i jest pak

$$(1) \qquad \mathrm{AP} = \frac{b^2}{2c} \cdot \frac{x_1}{y_1}.$$

Dále jest

$$(2) \qquad \mathrm{AJ} = y_1.$$

Pro bod M platí

$$y_1^2 = \frac{b^2}{c} x_1,$$

z čehož se vypočte

$$(\beta) \qquad {}^1\!/_2 y_1 = \frac{b^2}{2c} \cdot \frac{x_1}{y_1}.$$

Z rovnic (1), (2), (β) plyne, že

$$(3) \qquad \mathrm{AP} = {}^1\!/_2 \mathrm{AJ}.$$

Z rovnice (3) jest patrno, že *tečná v bodě* M *utíná na straně* EH *od bodu* A *část, která obnáší polovinu části, již utíná rovnoběžka* MJ *s průměrem na téže straně.*

Dále hleďme vyšetřiti poměr, ve kterém dělí tečná v bodě M tečnou v bodě G. K vůli snazšímu provedení poznamenejme pořadnici bodu M

$$y_1 = \mathrm{AJ} = \frac{r}{n} b;$$

úsečka x_1 vyjde z rovnice paraboly, i jest

$$x_1 = \frac{r^2}{n^2} c.$$

Rovnice tečné bodem M pak zní

$$(\alpha') \qquad y=\frac{n}{2r}\frac{b}{c}x+\frac{r}{2n}b.$$

Rovnice tečné v bodě G zní

$$(\beta') \qquad y=\frac{b}{2c}x+\frac{b}{2}.$$

Rovnice paprsku MF pak jest

$$(\gamma') \qquad y=-\frac{n}{n-r}\frac{b}{c}x+\frac{r}{n-r}b.$$

Pro průsečík Q obou tečných platí současně rovnice (α'), (β') a řešením vyjde

$$(1') \qquad x=\mathrm{AK}'=\frac{r}{n}c.$$

Pro průsečík K paprsku MF s průměrem AB se položí v rovnici (γ') za $y=0$, za $x=\mathrm{AK}$, i jest

$$(2') \qquad \mathrm{AK}=\frac{r}{n}c.$$

Z rovnic (1′) a (2′) jest patrno, že jest $\mathrm{AK}'=\mathrm{AK}$, totiž že pořadnice bodu Q protne průměr AB v bodě K. Jelikož jest obrazec ABGC lichoběžník, platí

$$(3') \qquad \mathrm{CQ}:\mathrm{CG}=\mathrm{AK}:\mathrm{AB}.$$

Úměra (3′) praví, že *tečná v bodě* M *dělí tečnou v bodě* G *v témž poměru, ve kterém dělí paprsek* MF *průměr* AB.

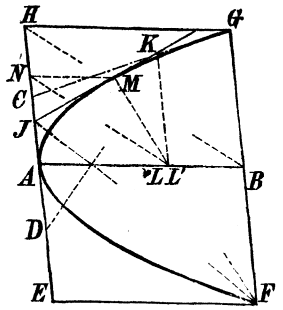
Důsledek. Rovnice (3) a úměry (3′) lze užiti k sestrojení tečné v bodě paraboly. Sestrojení jest následující: Paprsek MJ (obr. 5.) rovnoběžný s průměrem protne stranu EH v bodě J; bod P pak půlí úsek AJ. Paprsek MF protne průměr v bodě K, rovnoběžka KQ se stranou EH určí bod Q na tečné CG, kteráž prochází bodem C, půlícím délku AH. Žádaná tečná pak jest určena body P a Q.

3. *Má se najíti poměr, ve kterém dělí tečná sestrojená k parabole bodem vytknutým na straně opsaného rovnoběžníka tečnou sestrojenou v bodě* G.

Řešení. Vytkněme bod J (obr. 6.) na straně EH tak, aby bylo $y=\frac{r}{n}b$, kdežto $x=0$. Tečná sestrojená bodem J k parabole dotkne se této v bodě M (ξ, η) a protne tečnou bodem G v bodě K.

Rovnice tečné v bodě M pak zní:

$$(\alpha)\qquad \eta y = \frac{b^2}{2c}(x + \xi).$$



Obr. 6.

Vzhledem k bodu J platí

$$(\beta)\qquad \eta = \frac{n}{2r}\frac{b}{c}\xi.$$

Vzhledem k bodu M jest

$$(\gamma)\qquad \eta^2 = \frac{b^2}{c}\xi.$$

Souřadnice bodu M vyjdou řešením rovnic (β), (γ) a sice

$$(\delta)\qquad \xi = \frac{4r^2}{n^2}c,\quad \eta = \frac{2r}{n}b.$$

Rovnice tečné v bodě M pak zní

$$(1)\qquad y = \frac{n}{4r}\frac{b}{c}x + \frac{r}{n}b.$$

Rovnice tečné bodem G pak jest

$$(2)\qquad y = \frac{b}{2c}x + \frac{b}{2}.$$

Pro průsečík K tečných platí rovnice (1), (2) současně a řešením jich vyjde

$$(\varepsilon)\qquad x = \frac{2r}{n}c.$$

Učiníme-li JN = AJ, jest $AN = \frac{2r}{n}b$; sestrojíme-li dále NL || HB, jest i

$$(\eta)\qquad AL = \frac{2r}{n}c.$$

Z rovnic (ε), (η) jest patrno, že úsečka bodu K totiž $x = AL'$ se rovná délce AL. Z lichoběžníka ABGC pak jde

(3) $$CK : CG = AL : AB.$$

Úměra (3) značí, že *tečná bodem* J *dělí tečnou v bodě* G *v tomtéž poměru, ve kterém dělí rovnoběžka bodem* N *s úhlopříčnou* HB *průměr.*

Důsledek. Věty obsažené v úměře (3) lze užiti k sestrojení paraboly, vepsané rovnoběžníku, pomocí tečných. Sestrojení jest následující: Zvolme bod J (obr. 6.) na straně EH libovolně. Úsek AJ přenesme na JN. Paprsek NL rovnoběžný s HB stanoví bod L; rovnoběžka LK bodem L se stranou EH určí bod K a tečná prochází body J, K. Dotyčný bod se určí paprskem NM || AB anebo paprskem FL.

Poznam. Jestliže bod D (obr. 6.) půlí délku EA, lze snadno dokázati, že paprsky JF, DK se protínají v bodě průměru AB; ten průsečík vede též k sestrojení tečné JK.

Dodatek. 1. V obrazci 1. protne paprsek BM průměr CD v bodě J* a rovnoběžka tím bodem s AB sestrojená určí na straně EH bod P*, který náleží tečné ellipsy. Jak lze stanoviti bod Q*, v němž seče tečná stranu EF? — V obrazci 2. protne paprsek JE průměr AB v bodě N* a paprsek CN* určí na straně EH bod K*, jímž prochází tečná ellipsy. Jak lze stanoviti bod J* na straně EF, je-li dán bod K?

2. V obrazci 3. protne paprsek CM stranu FG v bodě R*, rovnoběžka tím bodem s HF určí na AB bod S* a rovnoběžka tímto bodem s FG stanoví na straně HG bod Q*, který náleží tečné hyperboly. Jak lze stanoviti bod P*, v němž seče tečná stranu EH? — V obrazci 4. protne paprsek JH průměr AB v bodě L* a rovnoběžka tím bodem s FG určí na EG bod K*, jímž prochází tečná hyperboly. Jak lze stanoviti bod J* na straně EH, je-li dán bod K?

3. Jak lze stanoviti v obrazci 5. bod Q* a v obrazci 6. bod K*, v němž protíná tečná paraboly tečnou v bodě F?

V Přerově, 1885.