Jan Sobotka
Poznámka ku známé jedné větě geometrické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 5, 231--235

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122137

$$\binom{r+1}{2}(n-r+2)+\binom{r}{2}+\binom{r-1}{2}+\binom{r-2}{2}+\ldots+\binom{2}{2}$$
$$=\binom{r+1}{2}(n-r+2)+\binom{r+1}{3}=\frac{r(r+1)(3n-2r+5)}{6}.$$

Podmínka, že určitá přímka má býti r-násobnou přímkou plochy n-ho řádu, zastupuje tedy

$$\frac{r(r+1)(3n-2r+5)}{6}$$

jednoduchých podmínek.

Myslím, že toto číslo bylo již jinde vyšetřeno, ale poněvadž jsem ho nenašel v Salmonových a Cremonových spisech o plochách a poněvadž též v Peškově deskriptivní gnometrii, v níž podobných čísel dosti jest sneseno, vytčeno není, dovolil jsem si tuto je odvoditi.

Budiž ještě podotčeno, že platí vzorec

$$H_n(r)-3\,H_{n-1}(r-1)+3\,H_{n-2}(r-2)-H_{n-3}(r-3)=1,$$

kdež $H_n(r)$ značí číslo svrchu vyšetřené.

Poznámka ku známé jedné větě geometrické.

Napsal

Jan Sobotka,

kandidát prof. v Praze.

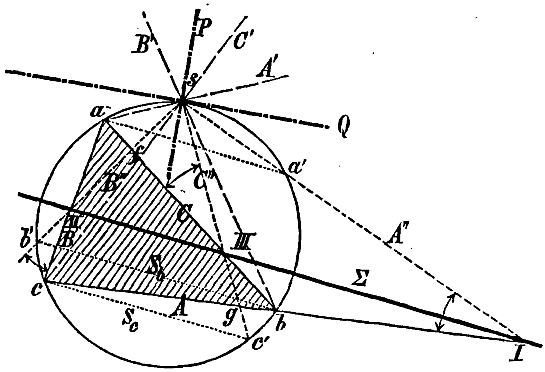
V základech vyšší geometrie od dr. *Em.* a *Ed. Weyra*, díl I. str. 93. uvedena jest věta tato:

I. Vedeme-li z libovolného bodu kruhu opsaného jistému trojúhelníku k stranám kosé přímky o témž sklonu, v témž směru rotace, protínají nám ony přímky řečené strany v bodech téže přímky.

Dovoluji si především ku větě té poněkud jiný důkaz podati.

Mějmež trojúhelník abc vepsaný do kruhu K (obr. 1.). Promítněme si jej v libovolném směru stejnosměrně poznovu na kruh.

Obdržíme tak na obvodu tři další body a', b', c'. Spojnice těchto bodů resp. A″, B″, C″ s libovolným bodem obvodovým *s* protínati budou příslušným vrcholům protilehlé strany A, B, C v bodech téže přímky Σ.



Obr. 1.

Vysvítá to z úvahy následující:

Spojíme-li *s* s vrcholy trojúhelníka přímkami A', B', C', obdržíme tři páry paprsků A'A'', B'B'', C'C''.

Přímky A', B', C' uzavírají na vzájem tytéž úhly jako A'', B'', C'', ježto se úhly ty opírají o stejné oblouky.

Vedeme-li přímky P, Q rozpolující úhly paprsků A'A'', budou jimi rozpůleny i úhly B'B'' a C'C'', t. j. přímky A', A'', B', B'', C', C'' jsou v involuci. Ježto A', B', C' procházejí vrcholy daného trojúhelníku, protínají A'', B'', C'' příslušné jeho strany v bodech téže přímky. Hledíce nyní k trojúhelníkům

$$s\mathrm{I}g \text{ a } b\mathrm{III}g;\quad s\mathrm{III}f \text{ a } a\mathrm{II}f;$$

atd. shledáme, jelikož mají vždy dva úhly stejné, že i třetí jsou stejné, t. j. přímky A'', B'', C'' odchylují se v témž úhlu i směru od příslušných stran trojúhelníku *abc*.

Tím jest vytčená věta dokázána.

Ze vztahu $\triangle\, s\mathrm{III}f \sim \triangle\, a\mathrm{II}f$, plyne úměra

$$\overline{f\mathrm{II}} : \overline{f\mathrm{III}} = \overline{af} : \overline{sf},$$

a ze vztahu $\triangle\, saf \sim \triangle\, fbb'$ úměra

$$\overline{fb'} : \overline{fb} = \overline{af} : \overline{sf}.$$

Srovnáme-li tyto úměry, bude

$$\overline{f\mathrm{II}} : \overline{f\mathrm{III}} = \overline{fb'} : \overline{fb},$$

čili $\Sigma \parallel S$.

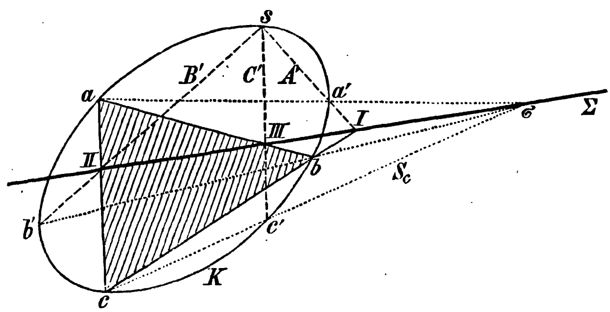
Příčka Σ náleží tedy sama k osnově promítajících paprsků.

Dle uvedeného lze řešiti úlohu:

Nechť se daný trojúhelník protne příčkou známého směru tak, by přímky, vedené průsečnými body pod daným úhlem ku stranám, setkaly se v jediném bodě.

K těmže výsledkům dospěli bychom úvahou obecnější.

K tomu cíli budiž abc trojúhelník vepsaný kuželosečce K (obr. 2.).



Obr. 2.

Zvolme si libovolný bod σ co střed promítání, z něhož promítneme body a, b, c v a', b', c'. Máme nyní na kuželosečce tři páry bodů aa', bb', cc' v involuci a σ je středem involuce.

Spojíme-li body ty s libovolným bodem s na obvodě, obdržíme tři páry paprsků v involuci. Poněvadž tři paprsky této involuce procházejí vrcholy trojúhelníku abc, budou involutorně jim příslušící tři paprsky pronikati strany onoho trojúhelníku v bodech téže přímky Σ.

Tvrdíme ještě, že přímka ta prochází též středem promítání σ.

Myslíme-li si na př. s a c spojeny s body a, a', b, b', jsou svazky $s(aa'b\ldots)$ a $c(aa'b\ldots)$ promětny. Z toho jde, že spojnice bodu $(\overline{sb'}, \overline{ca})$ a bodu $(\overline{sa'}, \overline{cb})$ prochází středem promětnosti a tím jest v našem případě bod σ, poněvadž aa', bb' ... si na vzájem přísluší.

Tím jest tvrzení naše odůvodněno.

Větu právě dokázanou lze vysloviti takto:

II. Spojíme-li libovolný bod kuželosečky opsané jistému troj-

úhelníku s průměty vrcholů jeho na řečenou kuželosečku, protínají spojnice ty příslušným vrcholům protilehlé strany v bodech téže přímky, procházející středem promítání.

Pošineme-li σ do nekonečna, bude Σ stejnosměrné se směrem promítání a nahradíme-li kuželosečku libovolnou kruhem, přijdeme opět ku větě (I). Snadně plyne tu opak věty poslední. Mysleme si v obr. 2. týž trojúhelník abc a transversálu Σ, tu přímky $\overline{sa}$, $\overline{sb}$, $\overline{sc}$; $\overline{s\mathrm{I}}$, $\overline{s\mathrm{II}}$, $\overline{s\mathrm{III}}$ tvoří involuční svazek paprsků $s(aa'b\ldots)$ a proto přímky $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ procházejí týmž bodem σ na Σ.

Máme tudíž větu:

III. Vedeme-li libovolným bodem kuželosečky a průsečíky dané transversály se stranami trojúhelníku oné kuželosečce vepsaného přímky: protínají nám tyto kuželosečku v bodech, jejichž spojnice s vrcholy řečeným stranám protilehlými se protínají v jediném bodě na vytčené transversále.

Nyní bez dalšího plynou z vět (II) a (III) věty reciproké, jichž direktní odvození budiž pozůstaveno laskavému čtenáři. Lze je stylisovati takto:

IV. Protneme-li strany jednoho z dvou perspektivických trojúhelníků opsaných dané kuželosečce libovolnou její tečnou a spojíme-li body ty s vrcholy druhého trojúhelníka (a sice s těmi, jež perspektivicky odpovídají oněm vrcholům prvního trojúhelníka, které protnutým stranám protilehly jsou): tu spojnice ty vesměs protínají se v bodě jediném (σ) osy perspektivické (Σ) daných trojúhelníků.

V. Promítneme-li vrcholy trojúhelníka dané kuželosečce opsaného na její libovolnou tečnu, obdržíme tři body, z nichž vedené další tečny opisují kuželosečce trojúhelník perspektivický k danému.

Osa perspektivická prochází tu zvoleným středem promítání.

Věty poslední vedou nás ku spůsobům sestrojování kuželoseček.

Z věty (II) přicházíme k sestrojení kuželosečky z daných pěti bodů a, b, c, a', b' — obr. 2. — takto: abc určují trojúhelník; aa', bb' bod σ; tento budiž stálý, Σ pak nechť se otáčí kolem σ, tu každé poloze jeho odpovídá jeden bod s křivky, který dle dřívějšího snadno si vyhledáme.

Tím dospíváme k větě *Pascalově.*

Z věty (IV) přicházíme ku sestrojení kuželosečky z daných pěti tečen A, B, C, A′, B′ takto: ABC určují trojúhelník, (AA′) a (BB′) osu perspektivickou Σ (ve větě IV. zmíněnou); tato budiž pevna a na ní nechť se pohybuje bod σ, jehož každé poloze odpovídá jedna tečna S, kterou dle dřívějšího též snadno si vyhledáme.

Tím dospíváme k větě *Brianchonově.*

Nyní jest patrno, jak jsme mohli na základě věty Pascalovy odvoditi opět větu (I), jejíž věta reciproká, z Brianchonovy plynoucí, jest tato:

VI. Jsou-li kruhu (kuželosečce) opsány dva trojúhelníky stejnosměrných stran, tu libovolná tečna protíná strany jednoho trojúhelníku v bodech, jichž spojnice s vrcholy protilehlými trojúhelníka druhého jsou stejnosměrny.

V Praze, 1885.

Příspěvek k odvození rovnice evoluty a vzorců pro souřadnice středů křivosti kuželosečky.

Podává

F. Machovec, professor v Karlíně.

Budiž rovnice *středové* kuželosečky dána ve tvaru

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = C. \tag{1}$$

Potom jest rovnice poláry libovolného bodu (x' y') vzhledem k dané kuželosečce

$$\frac{xx'}{A} + \frac{yy'}{B} = C$$

a tudíž

$$\xi' = \frac{x'}{AC}, \quad \eta' = \frac{y'}{BC} \tag{2}$$

jsou souřadnice této poláry.

Rovnice přímky s touto polárou vzhledem k (1) kolmo sdružené jest

$$\frac{AC}{(A-B)x'}\, x + \frac{BC}{(B-A)\, y'}\, y = C,$$