Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

Počet pravděpodobnosti v geometrii

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 2, 121--122

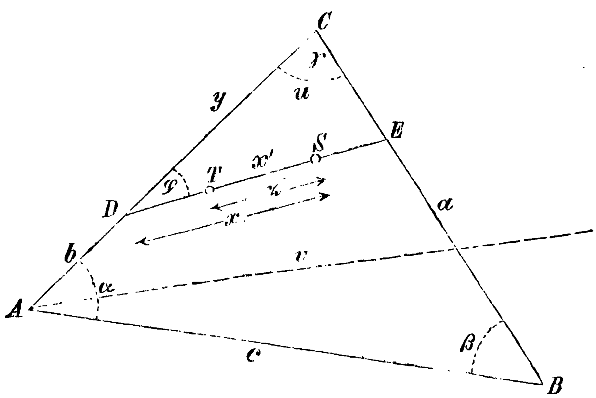
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122068

Počet pravděpodobnosti v geometrii.

Napsal

Augustin Pánek.

Volíme-li v daném trojúhelníku ABC, který pokládáme za jednotku, dva dovolné body S a T, jaká jest pravděpodobnost, že jiné dva body libovolné, které zcela maně v témž trojúhelníku si vytkneme, budou ležeti na jedné straně spojnice ST, resp. DE?



Označíme-li při trojúhelníku libovolném ABC strany a, b, c, úhly protější α, β, γ, jest především dle supposice

$$\triangle ABC = \frac{ab}{2} \sin\gamma = 1.$$

Pokládejme $\sphericalangle$ CDE $<$ CAB a nazvemež DS $= x$, CD $= y$, ST $= z$, DE $= x'$, $\sphericalangle$ CDE $= \varphi$ a obsah $\triangle$CDE $= u$, pak bude dle věty sinusové

$$x' = \frac{y \sin\gamma}{\sin(\gamma + \varphi)},$$

tedy

$$u = \frac{yx'}{2} \sin\varphi = \frac{y^2}{2} \frac{\sin\gamma \sin\varphi}{\sin(\gamma + \varphi)}, \qquad (1)$$

Mezní poloha spojnice ST jest přímka procházející vrcholem A daného trojúhelníka, tudíž bude ploský obsah vzniklého trojúhelníka dle (1)

$$v = \frac{b^2}{2} \frac{\sin\gamma \sin\varphi}{\sin(\gamma+\varphi)}. \qquad (2)$$

Prvek trojúhelníku u S jest $\sin\varphi\, dx\, dy$ a prvek u T bude $d\varphi\, z\, dz$. Meze φ jdou od o do α, meze y jdou od o do b, meze x půjdou od o do x' a meze z od o do x; dále pak meze u od o do v a meze v od o do 1.

Počet poloh, v kterých možno dva body maně vytčené nad přímkou DE sobě mysliti, jest u^2 a pod touž přímkou $(1-u)^2$, tedy dohromady

$$u^2 + (1-u)^2 = 2u^2 - 2u + 1 = \psi\,(u).$$

Poněvadž počet poloh, ve kterých lze si čtyři body mysliti, pokládáme za jednotku a ježto dva body maně vytčené mohou ku přímce DE býti v šesti polohách, bude pravděpodobnost žádaná

$$\begin{aligned}
P &= 6.2 \int_o^\alpha \int_o^b \int_o^{x'} \int_o^x \psi\,(u) \sin\varphi\, d\varphi\, dx\, dy\, z\, dz \\
&= 12 \int_o^\alpha \int_o^b \int_o^{x'} \psi\,(u) \sin\varphi\, d\varphi\, dx\, dy \Big/_o^x \frac{z^2}{2} \\
&= 6 \int_o^\alpha \int_o^b \psi\,(u) \sin\varphi\, d\varphi\, dy \int_o^{x'} x^2\, dx \\
&= 2 \int_o^\alpha \int_o^b \psi\,(u) \sin\varphi\, d\varphi\, x'^3\, dy.
\end{aligned}$$

Poněvadž y jest v mezích o a b, budou o a v mezemi veličiny u dle vzorce (1), a podobně nabudeme pro v dle vzorce (2) mezí o a 1, poněvadž o a α jsou mezemi veličiny φ; tudíž bude

$$\begin{aligned}
P &= 4 \int_o^1 \int_o^v \psi\,(u)\, v^{-1}\, dv\, u\, du \\
&= 4 \int_o^1 v^{-1}\, dv \int_o^v (2u^3 - 2u^2 + u)\, du \\
&= \tfrac{2}{3} \int_o^1 (3v^2 - 4v + 3)\, v\, dv,
\end{aligned}$$

tedy konečně

$$P = \tfrac{2}{3} . \tfrac{11}{12} = \tfrac{11}{18}.$$

V listopadu 1881.