

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Augustin Pánek

Počet pravděpodobnosti v geometrii

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 2, 121--122

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122068>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1882

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



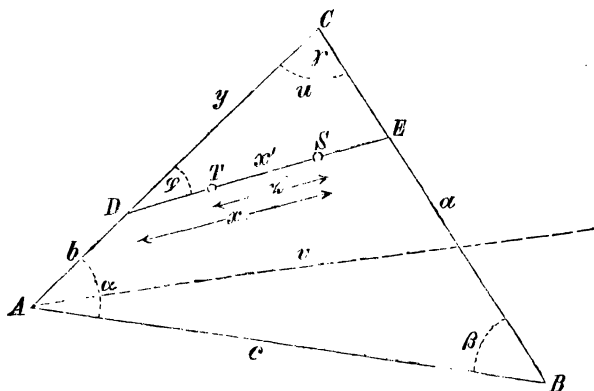
This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Počet pravděpodobnosti v geometrii.

Napsal

Augustin Pánek.

Volíme-li v daném trojúhelníku ABC , který pokládáme za jednotku, dva dovolné body S a T , jaká jest pravděpodobnost, že jiné dva body libovolné, které zcela maně v témž trojúhelníku si vytkneme, budou ležeti na jedné straně spojnice ST , resp. DE ?



Označíme-li při trojúhelníku libovolném ABC strany a , b , c , úhly protější α , β , γ , jest především dle supposice

$$\Delta ABC = \frac{ab}{2} \sin \gamma = 1.$$

Pokládejme $\sphericalangle CDE < CAB$ a nazvěmež $DS = x$, $CD = y$, $ST = z$, $DE = x'$, $\sphericalangle CDE = \varphi$ a obsah $\sphericalangle CDE = u$, pak bude dle věty sinusové

$$x' = \frac{y \sin \gamma}{\sin^2 (\gamma + \varphi)},$$

tedy

$$u = \frac{yx'}{2} \sin \varphi = \frac{y^2 \sin \gamma \sin \varphi}{2 \sin (\gamma + \varphi)}, \quad (1)$$

Mezní poloha spojnice ST jest přímka procházející vrcholem A daného trojúhelníka, tudíž bude ploský obsah vzniklého trojúhelníka dle (1)

$$v = \frac{b^2 \sin \gamma \sin \varphi}{2 \sin (\gamma + \varphi)}. \quad (2)$$

Prvek trojúhelníku u S jest $\sin \varphi dx dy$ a prvek u T bude $d\varphi z dz$. Meze φ jdou od o do α , meze y jdou od o do b , meze x půjdou od o do x' a meze z od o do x ; dále pak meze u od o do v a meze v od o do 1.

Počet poloh, v kterých možno dva body maně vytčené nad přímkou DE sobě mysliti, jest u^2 a pod touž přímkou $(1 - u)^2$, tedy dohromady

$$u^2 + (1 - u)^2 = 2u^2 - 2u + 1 = \psi(u).$$

Poněvadž počet poloh, ve kterých lze si čtyři body mysliti, pokládáme za jednotku a ježto dva body maně vytčené mohou ku přímce DE býti v šesti polohách, bude pravděpodobnost žádaná

$$\begin{aligned} P &= 6 \cdot 2 \int_0^\alpha \int_0^b \int_0^{x'} \int_0^x \psi(u) \sin \varphi d\varphi dx dy z dz \\ &= 12 \int_0^\alpha \int_0^b \int_0^{x'} \psi(u) \sin \varphi d\varphi dx dy \int_0^x \frac{z^2}{2} \\ &= 6 \int_0^\alpha \int_0^b \psi(u) \sin \varphi d\varphi dy \int_0^{x'} x^2 dx \\ &= 2 \int_0^\alpha \int_0^b \psi(u) \sin \varphi d\varphi x'^3 dy. \end{aligned}$$

Poněvadž y jest v mezích o a b , budou o a v mezemi veličiny u dle vzorce (1), a podobně nabudeme pro v dle vzorce (2) mezi o a 1, poněvadž o a α jsou mezemi veličiny φ ; tudíž bude

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_0^1 \int_0^v \psi(u) v^{-1} dv u du \\ &= 4 \int_0^1 v^{-1} dv \int_0^v (2u^3 - 2u^2 + u) du \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (3v^2 - 4v + 3) v dv, \end{aligned}$$

tedy konečně

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{2} = \frac{11}{3}.$$

V listopadu 1881.