Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Řehořovský

O vytvořující funkci Borchardt-ově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 2, 111--120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122066

ni nejasnost mezi subjektivnou a objektivnou stránkou, kde těžko přísnou mez stanoviti. Něco z toho osvětlí a doplní se časem; jiné ale ostane snad věčnou hádankou. Předmět sám, z něhož jsem zde pouze mathematickou částku, totiž vzrůst a spor přesvědčení probral, ponechávaje šíření (vědecké bádání) a sdělování přesvědčení budoucnosti, jest ale převelmi vážný jako sotva jiná část počtářství. Nejednáť se tu o nic více ani méně než o sílu pravdy. A kdož by mohl mohutnost její popírati? Působíť nejen v soukromých rozmluvách, ve školách, spisech a na řečništích, ale ozbrojuje i paže, prolévá krev na bojištích, a neleká se ani smrti na popravišti, vědouc, že tělo sice zmařeno býti může, duch ale nikoli. Ano sama smrt jest její vydatnou pomocnicí v zápase s mocnými bludy. Jednou jest mučednictví, byť i jen subjektivným, ale vždy silným důvodem ve všech příbuzných myslech, a po druhé odchází z duchovního bojiště s tělem i nenapravitelná bludná mysl. Mimo to nemůže našemu materialismem prosáklému století býti na škodu, pakli i o něčem duchovním počítati bude.

Z těch a podobných příčin doufám, že neostanu osamělým dělníkem na tomto novém poli.

V Jenšovicích u Vys. Mýta, v květnu 1881.

O vytvořující funkci Borchardt-ově.

Napsal **Václav Řehořovský.**

1. *Borchardt* ukázal,*) že možno obdržeti veškeré homogenní souměrné funkce kořenů algebraické rovnice $n^{\text{tého}}$ stupně co koefficienty jednotlivých členů, rozvineme-li jistou funkci v nekonečnou řadu. Funkci tu nazval *vytvořující funkcí* souměrných funkcí kořenů. Jest to funkce

$$(1) \qquad T = \Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)(t_2 - \alpha_2) \dots (t_n - \alpha_n)},$$

kdež značí $t_1, t_2, \dots, t_n$ libovolné veličiny, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ kořeny rovnice $n^{\text{tého}}$ stupně

*) Bericht über die Verhandlungen der k. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1855. str. 165.

$$(2) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

a znamení Σ vztahuje se na všechny členy, které z napsaného vznikají tím spůsobem, že jednu řadu veličin ku př. t podržíme co pevnou a druhou, totiž veličin α, všemožným spůsobem přestavujeme.

Rozvine-li se výraz takto vzniklý dle klesajících mocnin veličin t, objeví se co koefficienty u jednotlivých těchto mocnin veškeré souměrné homogenní funkce kořenů α_1, $\alpha_2 \dots, \alpha_n$; aby však tyto funkce obdržely se vyjádřeny v koefficientech $a_1, a_2, \dots, a_n$ rovnice (2), oč v theorii souměrných funkcí kořenů hlavně se jedná, nutno výraz T přetvořiti v jiný totožný, v kterém se vyskytují veličiny t a koefficienty $a_1, a_2, \dots, a_n$, takže rozvine-li se tento druhý výraz opět dle klesajících mocnin veličin t, obdrží se porovnáním součinitelů stejných mocnin veličin t na obou stranách souměrné funkce kořenů vyjádřeny co funkce koefficientů. Přetvoření to provedl *Borchardt* velmi důmyslným spůsobem na základě souvislosti výrazu T s dvěma determinanty, kteráž zní:

Jest-li že

$$(3) \qquad \mathrm{D} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1-\alpha_1)^2}, & \frac{1}{(t_2-\alpha_1)^2}, & \dots, & \frac{1}{(t_n-\alpha_1)^2} \\ \frac{1}{(t_1-\alpha_2)^2}, & \frac{1}{(t_2-\alpha_2)^2}, & \dots, & \frac{1}{(t_n-\alpha_2)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(t_1-\alpha_n)^2}, & \frac{1}{(t_2-\alpha_n)^2}, & \dots, & \frac{1}{(t_n-\alpha_n)^2} \end{vmatrix},$$

$$(4) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1-\alpha_1}, & \frac{1}{t_2-\alpha_1}, & \dots, & \frac{1}{t_n-\alpha_1} \\ \frac{1}{t_1-\alpha_2}, & \frac{1}{t_2-\alpha_2}, & \dots, & \frac{1}{t_n-\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{t_1-\alpha_n}, & \frac{1}{t_2-\alpha_n}, & \dots, & \frac{1}{t_n-\alpha_n} \end{vmatrix},$$

a T *značí výraz v* (1) *udaný, pak platí*

$$(5) \qquad \mathrm{D} = \Delta \mathrm{T}.$$

Borchardt na výše uvedeném místě zmiňuje se pouze, jak možno větu tu dokázati, aniž by důkaz sám podával. Jelikož důkaz ten neleží tak na snadě, pokusili jsme se podati jej zde úplně, abychom čtenářstvu studium těchto částí moderní algebry usnadnili; provedli jsme zde důkaz pro případ $n = 3$ tak, že možno jej ihned rozšířiti na libovolné n.*)

Důkaz věty založen jest na Lagrange-ově průkladném vzorci a třeba tedy dříve zmíniti se krátce o vzorci tomto rozšířeném na více proměnných.

2. Průkladný vzorec Lagrange-ův pro funkce o jedné proměnné jest všeobecně znám. Dle vzorce toho jest celistvá racionalná funkce $\varphi(x)$ stupně $(n-1)^{ho}$ určena, známe-li hodnoty této funkce, které obdrží, položíme-li za x jednu z n zvláštních hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$; jest pak

$$(6) \qquad \varphi(x) = \frac{(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\varphi(x_1) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\varphi(x_n).$$

Jedná-li se o funkci $\varphi(x, y, \ldots, u)$ m proměnných a stupně $(n-1)^{ho}$ vzhledem ku každé z těchto proměnných, jest funkce ta určena, známe-li hodnoty její, které obdrží, položíme-li za x některou z n zvláštních hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$, současně za y některou ze zvláštních hodnot $y_1, y_2, \ldots, y_n$, a t. d. až současně za u některou ze zvláštních hodnot $u_1, u_2, \ldots, u_n$; poněvadž možných tu spojení mezi zvláštními těmito hodnotami jest n^m, nutno znáti n^m zvláštních hodnot funkce $\varphi(x, y, \ldots, u)$. Vyjádření funkce φ pomocí těchto hodnot děje se pak postupně; nejprvé se zavedou hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ dle (6), aniž by se bral zřetel ku ostatním proměnným $y, \ldots u$. Obdrží se

$$\varphi(x, y, \ldots, u) = \frac{(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\varphi(x_1, y, \ldots, u) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\varphi(x_n, y, \ldots, u);$$

pak se do každé funkce $\varphi(x_k, y, \ldots, u)$ zavedou dle téhož vzorce veličiny y_i, takže jest

*) Jiný důkaz dle Cayley-e viz ve Faà de Bruno: Théorie des formes binaires. Turin 1876. str. 39.

$$\varphi(x_k, y, \ldots, u) = \frac{(y - y_2)\ldots(y - y_n)}{(y_1 - y_2)\ldots(y_1 - y_n)}\,\varphi(x_k, y_1, \ldots, u) + \ldots$$
$$+ \frac{(y - y_1)\ldots(y - y_{n-1})}{(y_n - y_1)\ldots(y_n - y_{n-1})}\,\varphi(x_k, y_n, \ldots, u);$$

funkce $\varphi(x_k, y_l, z, \ldots, u)$ se opět vyjádří dle téhož vzorce a tak se pokračuje, až konečně funkce tvaru $\varphi(x_k, y_l, \ldots v_p, u)$ vyjádří se funkcemi $\varphi(x_k, y_l, \ldots, v_p, u_q)$, jež pokládají se za známé. Dosazujeme-li pak postupně zpět, obdržíme funkci $\varphi(x, y, \ldots, u)$ vyjádřenu co součet n^m členů tvaru $A\varphi(x_k, y_l, \ldots, u_q)$, kdež A jest funkce obsahující každou z proměnných $x, y, \ldots, u$ v stupni $n - 1$ a mimo to známé veličiny $x_k, y_l, \ldots, u_q$.

3. Obraťme se nyní k důkazu rovnice (5) a předpokládejme hned $n = 3$. Tu jest

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)^2}, & \frac{1}{(t_2 - \alpha_1)^2}, & \frac{1}{(t_3 - \alpha_1)^2} \\ \frac{1}{(t_1 - \alpha_2)^2}, & \frac{1}{(t_2 - \alpha_2)^2}, & \frac{1}{(t_3 - \alpha_2)^2} \\ \frac{1}{(t_1 - \alpha_3)^2}, & \frac{1}{(t_2 - \alpha_3)^2}, & \frac{1}{(t_3 - \alpha_3)^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1 - \alpha_1}, & \frac{1}{t_2 - \alpha_1}, & \frac{1}{t_3 - \alpha_1} \\ \frac{1}{t_1 - \alpha_2}, & \frac{1}{t_2 - \alpha_2}, & \frac{1}{t_3 - \alpha_2} \\ \frac{1}{t_1 - \alpha_3}, & \frac{1}{t_2 - \alpha_3}, & \frac{1}{t_3 - \alpha_3} \end{vmatrix}$$

a
$$T = \Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)(t_2 - \alpha_2)(t_3 - \alpha_3)}.$$

Společný jmenovatel prvků v sloupci prvním determinantu D jest $(t_1 - \alpha_1)^2 (t_1 - \alpha_2)^2 (t_1 - \alpha_3)^2$, t. j. dle (2) $[f(t_1)]^2$, oněch v sloupci druhém podobně $[f(t_2)]^2$ a v třetím $[f(t_3)]^2$, takže převedeme-li veškeré členy v D na společný jmenovatel, bude tento

$$J^2 = [f(t_1) . f(t_2) . f(t_3)]^2$$

a možno tedy položiti

$$D = \frac{M}{J^2},$$

kdež M značí jistou celistvou funkci veličin t a α.

Z tvaru determinantu D plyne však dále, že obsahuje kterýkoliv z rozdílů $\alpha_k - \alpha_j$. jakož i $t_k - t_j$ co činitel, neboť položíme-li kterékoliv dvě z veličin α aneb z veličin t sobě rovny, stávají se dvě řádky neb dva sloupce stejnými a determinant se stává rovným nulle. Označíme-li tedy

$$\Pi(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) = (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1),$$
$$\Pi(t_3, t_2, t_1) = (t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_2 - t_1),$$

předpokládajíce rozdíly tak tvořeny, že α resp. t s nižším ukazovatelem jest vždy odečténo od α resp. t s vyšším ukazovatelem, můžeme dále položiti

$$M = \Pi(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \,.\, \Pi(t_3, t_2, t_1) \,.\, N,$$

kdež N opět jistou celistvou funkci veličin t a α značí, avšak stupně nižšího jak M. Jest tedy

$$N = \frac{J^2 D}{\Pi(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \,.\, \Pi(t_3, t_2, t_1)}.$$

Tvar této funkce N zjednáme si pomocí Lagrange-ova průkladného vzorce rozšířeného na tři proměnné.

Dle právě uvedeného jest

$$N = \frac{\begin{vmatrix} (t_1-\alpha_2)^2(t_1-\alpha_3)^2, & (t_2-\alpha_2)^2(t_2-\alpha_3)^2, & (t_3-\alpha_2)^2(t_3-\alpha_3)^2 \\ (t_1-\alpha_3)^2(t_1-\alpha_1)^2, & (t_2-\alpha_3)^2(t_2-\alpha_1)^2, & (t_3-\alpha_3)^2(t_3-\alpha_1)^2 \\ (t_1-\alpha_1)^2(t_1-\alpha_2)^2, & (t_2-\alpha_1)^2(t_2-\alpha_2)^2, & (t_3-\alpha_1)^2(t_3-\alpha_2)^2 \end{vmatrix}}{\Pi(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \,.\, \Pi(t_3, t_2, t_1)}.$$

Považujeme N co funkci proměnných t_1, t_2, t_3; jest to funkce celistvá a vzhledem ku každé z těchto proměnných stupně druhého; dle toho, co o Lagrange-ově vzorci předesláno bylo, třeba znáti $3^3 = 27$ (pro všeobecné D n^n) zvláštních hodnot, které N obdrží, položíme-li za t_1 některou ze tří zvláštních hodnot x_1, x_2, x_3, současně za t_2 některou ze zvláštních hodnot y_1, y_2, y_3 a současně za t_3 některou ze zvláštních hodnot z_1, z_2, z_3; za zvláštní tyto hodnoty x_k, y_l, z_m, které položíme za každou z proměnných t_1, t_2, t_3 zvolme veličiny α_1, α_2, α_3 a označme N_{klm} hodnotu, kterou N obdrží, klademe-li $t_1 = \alpha_k$, $t_2 = \alpha_l$, $t_3 = \alpha_m$. Každá z veličin k, l, m může obdržeti jednu z hodnot 1, 2, 3.

Hodnot N_{klm} bude v celku 27 a funkce N objevila by se tudíž co součet 27 členů, z nichž každý má za součinitel jednu z hodnot N_{klm}. Avšak ze všech těchto členů zbývá jen oněch šest (ve všeobecném případě $n!$), jichž součinitelé jsou ona N_{klm}, kdež žádná dvě z čísel k, l, m nejsou stejná, neboť funkce N jest takového tvaru, že hodnota N_{klm} se rovná nulle, jakmile dvě z hodnot k, l, m jsou sobě rovny. Zbývají tedy pouze ony členy, jež obsahují N_{123}, N_{132}, N_{213}, N_{231}, N_{312} a N_{321}. Mimo to jest N vzhledem ku t_1, t_2, t_3, jakož i ku α_1, α_2, α_3 funkce souměrná, takže N_{klm} hodnotu svou nemění, nechť k, l, m jakkoliv přestavujeme. Veškeré výše vypsané hodnoty N jsou tudíž stejné a možno položiti

$$N = P \,.\, N_{123}\,,$$

kdež P značí součet šesti funkcí vzhledem ku t_1, t_2, t_3 celistvých, vzhledem ku α_1, α_2, α_3 lomených.

Hodnotu N_{123} obdržíme dle hořejšího z N, položíme-li tam $t_1 = \alpha_1$, $t_2 = \alpha_2$, $t_3 = \alpha_3$; plyne tu

$$N_{123} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_2)^2}{\Pi(\alpha_3\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_1)\,.\,\Pi(\alpha_3\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_1)}$$

aneb

$$N_{123} = [\Pi(\alpha_3\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_1)]^2.$$

Zbývá určiti ještě funkci P. Dle vzorce Lagrange-ova obdržíme nejprvé

$$N = \frac{(t_1-\alpha_2)\,(t_1-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}\,N_{1t_2t_3} + \frac{(t_1-\alpha_3)\,(t_1-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_3)\,(\alpha_2-\alpha_1)}\,N_{2t_2t_3} + \frac{(t_1-\alpha_1)\,(t_1-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)\,(\alpha_3-\alpha_2)}\,N_{3t_2t_3}\,,$$

označíme-li symbolem $N_{kt_2t_3}$ hodnotu, kterou N obdrží, položíme-li tam $t_1 = \alpha_k$, ponechávajíce však t_2 a t_3.

Zavedeme-li dále označení

$$T_i(\alpha_k) = \frac{(t_i-\alpha_l)\,(t_i-\alpha_m)}{(\alpha_k-\alpha_l)\,(\alpha_k-\alpha_m)},$$

kdež α_k jest jedna z hodnot α_1, α_2, α_3 a α_l, α_m ostatní dvě, můžeme pak psáti kratčeji

$$N = T_1(\alpha_1)\,N_{1t_2t_3} + T_1(\alpha_2)\,N_{2t_2t_3} + T_1(\alpha_3)\,N_{3t_2t_3}\,.$$

Každou z funkcí $N_{kt_2t_3}$ vyjádříme opět dle vzorce Lagrange-ova zavedouce místo t_2 veličiny α_1, α_2, α_3 a ponechávajíce ještě t_3. Poněvadž dle výše učiněné poznámky jest $N_{kkt_3} = 0$, bude, an třetí člen odpadá,

$$N_{kt_2t_3} = T_2(\alpha_l)\,N_{klt_3} + T_2(\alpha_m)\,N_{kmt_3}$$

a N sestávati bude ze součtu šesti členů tvaru $T_1(\alpha_k)\,.\,T_2(\alpha_l)\,.\,N_{klt_3}$, kdež k a l mohou obdržeti hodnoty 1, 2, 3, avšak nikoliv současně dvě stejné jako 1, 1 a t. d. Pišme zkrátka

$$N = \Sigma\, T_1(\alpha_k)\, T_2(\alpha_l)\, N_{klt_3}.$$

Vyjádříme-li konečně N_{klt_3} opět dle Lagrange-ova vzorce, odpadnou dva členy obsahující N_{klk} a N_{kll} a zbývá jen člen s N_{klm} t. j. s N_{123}; bude tedy

$$N_{klt_3} = T_3(\alpha_m)\, N_{klm} = T_3(\alpha_m)\, N_{123},$$

což dosazeno podává

$$N = N_{123}\,.\,\Sigma\, T_1(\alpha_k)\, T_2(\alpha_l)\, T_3(\alpha_m),$$

kdež k, l, m možno uděliti kteroukoli z hodnot 1, 2, 3, avšak nikoliv současně dvě stejné jako 1, 1, 2 a t. d.

Jest tudíž

$$P = \Sigma\, T_1(\alpha_k)\, T_2(\alpha_l)\, T_3(\alpha_m),$$

kdež znamení Σ vztahuje se na veškeré přestavy možné z čísel 1, 2, 3, jichž jest šest (všeobecně $n!$).

Dle významu veličin T_i jest však

$$T_1(\alpha_k)\, T_2(\alpha_l)\, T_3(\alpha_m)$$

$$= \frac{(t_1-\alpha_l)(t_1-\alpha_m)}{(\alpha_k-\alpha_l)(\alpha_k-\alpha_m)}\cdot\frac{(t_2-\alpha_m)(t_2-\alpha_k)}{(\alpha_l-\alpha_m)(\alpha_l-\alpha_k)}\cdot\frac{(t_3-\alpha_k)(t_3-\alpha_l)}{(\alpha_m-\alpha_k)(\alpha_m-\alpha_l)};$$

doplníme-li čítatel součinem $(t_1-\alpha_k)(t_2-\alpha_l)(t_3-\alpha_m)$, promění se v $f(t_1).f(t_2).f(t_3)$ a upravíme-li ve jmenovateli rozdíly tak, aby α s nižším ukazovatelem odčítalo se vždy od α s vyšším ukazovatelem, což vyžaduje vyjmutí činitele -1 v počtu $2+1=3$ (ve všeobecném případě v počtu

$$(n-1)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}),$$

obdržíme

$$T_1(\alpha_k)\, T_2(\alpha_l)\, T_3(\alpha_m) =$$
$$\frac{(-1)^3 f(t_1).f(t_2).f(t_3)}{[\Pi(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)]^2}\cdot\frac{1}{(t_1-\alpha_k)(t_2-\alpha_l)(t_3-\alpha_m)}$$

a tedy

$$P = (-1)^3\frac{f(t_1).f(t_2).f(t_3)}{[\Pi(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)]^2}\,\Sigma\,\frac{1}{(t_1-\alpha_k)(t_2-\alpha_l)(t_3-\alpha_m)},$$

aneb dle výměru funkce T dané rovnicí (1)

$$P = (-1)^3\frac{f(t_1).f(t_2).f(t_3)}{[\Pi(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)]^2}\cdot T.$$

Jest pak

$$N = P N_{123} = (-1)^3 f(t_1) f(t_2) f(t_3)\, T$$

a tedy

$$D = (-1)^3 \frac{\Pi(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Pi(t_3, t_2, t_1)}{f(t_1) \cdot f(t_2) \cdot f(t_3)} T.$$

Zcela podobným postupem bychom obdrželi ve všeobecném případě

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\Pi(\alpha_n, \dots \alpha_1) \cdot \Pi(t_n, \dots t_1)}{f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)} T;$$

funkce na pravé straně stojící mimo T jest však, jak z theorie determinantů známo *), determinant Δ, takže konečně jest

$$D = \Delta T,$$

což bylo dokázati.

4. *Dodatek.* Na základě této souvislosti lze větu Borchardtovu samu snadno dokázati. Věta ta zní: *Souměrná funkce kořenů $\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_n^{p_n}$, kdež $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou kořeny algebraické rovnice (1), rovná se součiniteli členu*

$$\frac{1}{t_1^{p_1+1} t_2^{p_2+1} \dots t_n^{p_n+1}}$$

v nekonečné řadě, která vzniká rozvinutím výrazu

$$\Theta = (-1)^n \frac{f(t_1) \dots f(t_n)}{\Pi(t_n, \dots, t_1)} \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \dots \frac{d}{dt_n} \left[\frac{\Pi(t_n, \dots, t_1)}{f(t_1) \dots f(t_n)}\right]$$

dle klesajících mocnin veličin $t_1, t_2, \dots t_n$.

Jest totiž dle věty předcházející

$$T = \frac{D}{\Delta},$$

aneb vložíme-li za Δ jeho hodnotu v předcházejícím článku udanou

$$T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{f(t_1) \dots f(t_n)}{\Pi(\alpha_n, \dots, \alpha_1) \cdot \Pi(t_n, \dots, t_1)} \cdot D.$$

Determinant D povstává však z Δ postupným derivováním tohoto dle proměnných $t_1, t_2, \dots, t_n$, při čemž vždy po každé derivaci objeví se -1 co činitel všech prvků jednoho sloupce; můžeme tedy psáti

$$D = (-1)^n \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \dots \frac{d}{dt_n} \left[(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\Pi(\alpha_n, \dots, \alpha_1) \Pi(t_n, \dots, t_1)}{f(t_1) \dots f(t_n)}\right],$$

*) Viz Dr. S. Günther: Lehrbuch der Determinanten Theorie, 2. Aufl. Erlangen 1877, str. 111. a násl.

aneb jelikož veličiny α jsou tu stálé

$$D = (-1)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Pi(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \cdots \frac{d}{dt_n} \left[\frac{\Pi(t_n, \ldots, t_1)}{f(t_1) \ldots f(t_n)} \right].$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do výrazu hořejšího pro T, bude

$$T = (-1)^n \frac{f(t_1) \ldots f(t_n)}{\Pi(t_n, \ldots t_1)} \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \cdots \frac{d}{dt_n} \left[\frac{\Pi(t_n, \ldots, t_1)}{f(t_1) \ldots f(t_n)} \right]$$

t. j.

$$T = \Theta.$$

Funkce Θ jest tudíž totožná s T, liší se od ní však tím, že místo kořenů α obsahuje koefficienty a rovnice předpokládané. Z totožnosti té následuje, že součinitelé stejných funkcí veličin t na obou stranách jsou sobě rovny; zbývá tedy jen vyšetřiti, u které funkce veličin t objevuje se souměrná funkce kořenů $\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_n^{p_n}$ ve výrazu T, an pak u téže funkce veličin t v rozvinutém výrazu Θ stojí příslušná funkce koefficientů rovnice. K tomu cíli stačí vyvinouti skutečně funkci T; jest

$$\frac{1}{t_1 - \alpha_1} = \frac{1}{t_1} + \frac{\alpha_1}{t_1^2} + \ldots + \frac{\alpha_1^{p_1}}{t_1^{p_1+1}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{t_n - \alpha_n} = \frac{1}{t_n} + \frac{\alpha_n}{t_n^2} + \ldots + \frac{\alpha_n^{p_n}}{t_n^{p_n+1}} + \ldots$$

znásobíme -li

$$\frac{1}{(t_1 - \alpha_1) \ldots (t_n - \alpha_n)} = \ldots + \frac{\alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_n^{p_n}}{t_1^{p_1+1} t_2^{p_2+1} t_n^{p_n+1}} + \ldots$$

Přestavujeme-li všemožně veličiny α a sečteme-li, obdržíme

$$\Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_1) \ldots (t_n - \alpha_n)} = T = \ldots + \frac{\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_n^{p_n}}{t_1^{p_1+1} t_2^{p_2+1} \ldots t_n^{p_n+1}} + \ldots,$$

takže funkce $\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_n^{p_n}$ jest skutečně součinitelem u $\frac{1}{t_1^{p_1+1} t_2^{p_2+1} \ldots t_n^{p_n+1}}$, jak věta tvrdí.

Podotknouti sluší, že funkce T se též nemění, přestavujeme-li všemožně veličiny t ponechávajíce řadu veličin

α nezměněnou; z toho plyne, že v rozvinutém výrazu T objevují se též členy s oněmi funkcemi veličin t, které z

$$\frac{1}{t_1^{p_1+1}\, t_2^{p_2+1} \ldots t_n^{p_n+1}}$$

všemožným přestavováním $t_1, \ldots t_n$ vznikají a že součinitel u každé takové funkce jest opět $\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_n^{p_n}$; shrnou-li se všechny takové členy v jediný, objeví se T ve tvaru

$$T = \ldots + \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_n^{p_n} . \Sigma \frac{1}{t_1^{p_1+1}\, t_2^{p_2+1} \ldots t_n^{p_n+1}} + \ldots$$

a Θ ve tvaru

$$\Theta = \ldots + \varphi(a_1, a_2, \ldots a_n) . \Sigma \frac{1}{t_1^{p_1+1}\, t_2^{p_2+1} \ldots t_n^{p_n+1}} + \ldots$$

Jak samo sebou patrné, mohou i některé z hodnot p býti mezi sebou stejné a třeba i rovny nulle; o případu tom nutno zvláště se zmíniti. Předpokládejme, že ve funkci $\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_1} \ldots \alpha_n^{p_i}$ v rozvinutém výrazu T přichází π_1 mocnitelů rovných p_1, π_2 mocnitelů rovných p_2 a t. d. až π_i mocnitelů rovných p_i, takže platí $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_i = n$; přestavujeme-li v tomto případě veličiny α opět jako dříve všemožným spůsobem, neobjeví se funkce $\Sigma \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_n^{p_i}$ jen jednou, nýbrž v počtu $\pi_1 ! \pi_2 ! \ldots \pi_i !$, a tento násobek funkce $\Sigma \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_n^{p_i}$ rovná se příslušné funkci $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ koefficientů rovnice v rozvinutém výrazu pro Θ; chtějíce tudíž obdržeti jednoduchou souměrnou funkci $\Sigma \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_n^{p_i}$ jest nám onu funkci koefficientů z výrazu Θ děliti součinitelem $\pi_1 ! \pi_2 ! \ldots \pi_i !$ Ku př. ve funkci $\Sigma \alpha_1^3 \alpha_2 \alpha_3$ pro sedm kořenů vyskytuje se mocnitel 3 jednou, mocnitel 1 dvakrát, mocnitel 0 čtyřikrát a funkce ta objeví se v rozvinutém výrazu T v celku $1!\,2!\,4! = 48$krát; byloby tudíž třeba děliti příslušnou funkci koefficientů ve výrazu Θ osmačtyřiceti. Borchardt na jmenovaném místě ukázal, že dělení to vždy vyjde a podal tím důkaz věty pro celou theorii souměrných funkcí kořenů důležité, totiž že funkce koefficientů, která vyjadřuje jistou souměrnou funkci kořenů, jest funkce celistvá a že číselní součinitelé jednotlivých členů této funkce jsou též čísla celistvá.