Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

O integrování racionálných differenciálů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 2, 125--136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122061

O integrování racionálných differenciálů.

Napsal

Ed. Weyr.

Je známo, kterak se integruje $\varphi(x)\,dx$, značí-li $\varphi(x)$ funkci racionálnou. Integrál takový se obecně skládá z části transcendentní (logarithmů neb funkcí cyklometrických) a z části algebraické (opět racionálné funkce). *Hermite* ukázal ve svém výtečném *Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique, že lze onu algebraickou část vždy vyčísliti, aniž by bylo třeba znáti kořenové faktory jmenovatele ve výrazu* $\varphi(x)$; kdežto dosavadní methoda rozkladu na částečné zlomky předpokládala, že jsou ony faktory známy. Stanovení transcendentní části integrálu arci nelze ve tvaru zakončeném provésti, pokud ony faktory neznáme. Oddělení I. této kratičké práce podává onu methodu *Hermite-ovu*, v odd. II. pak ukazuji, kterak lze stanoviti integrál obecného racionálného differenciálu pomocí posloupné redukce, jsou-li známy lineárné faktory jmenovatele.

I. *Vyčíslení algebraické části obsažené v integrálu racionálného differenciálu.*

1. Dána-li racionálná lomená funkce proměnné x a je-li čítatel téhož stupně jako jmenovatel aneb stupně vyššího, tu lze pouhou divisí rozložiti danou funkci na část celistvou a na funkci ryze lomenou, t. j. takovou, jejíž jmenovatel jest stupně vyššího nežli čítatel. Stačí tedy, obmezíme-li se a budeme-li uvažovati jen funkce ryze lomené. Značí-li $F(x)$ čítatel, $f(x)$ jmenovatel ryze lomené funkce, a máme-li obecně

$$f(x) = (x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}\ldots(x-l)^{\lambda+1},$$

tu obdržíme rozkladem na částečné zlomky

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha+1}} \\ & + \frac{B}{x-b} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta+1}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{L}{x-l} + \frac{L_1}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^{\lambda+1}},\end{aligned}$$

aneb stručněji

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{A}{x-a} + \Sigma \frac{A_1}{(x-a)^2} + \ldots + \Sigma \frac{A_n}{(x-a)^{n+1}},$$

kdež znamení Σ má význam přímo patrný.

Integrováním máme

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \Sigma A \log(x-a) - \Sigma \frac{A_1}{(x-a)}$$
$$- \frac{1}{2} \Sigma \frac{A_2}{(x-a)^2} - \ldots - \frac{1}{n} \Sigma \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

První součet na pravé straně jest transcendentní částí integrálu, další součty tvoří část algebraickou. Kterak lze tuto část stanoviti, aniž známe kořeny a, b, ..., l, to ukážeme dle *Hermite-a.*

2. Má-li jmenovatel $f(x)$ jen jednoduché faktory, t. j. máme-li $\alpha = \beta \ldots = \lambda = 0$, tu z rozkladu na parciálné zlomky patrno, že $\int \frac{F(x)}{\varphi(x)} dx$ jest transcendentní, totiž že se rovná

$$A \log(x-a) + B \log(x-b) + \ldots + L \log(x-l),$$

a že tedy hledaná algebraická část se tu rovná nulle.

Obsahuje-li $f(x)$ faktory mnohonásobné, tu lze $f(x)$ pouhými divisemi uvésti na tvar*)

$$f(x) = N^{n+1} P^{p+1} Q^{q+1} \ldots S^{s+1},$$

v němž N, P, ... S značí polynomy obsahující jen jednoduché a naskrz různé faktory, t. j. jsou to takové polynomy, že rovnice

$$NPQ \ldots S = 0$$

má pouze jednoduché kořeny. Nyní rozložme lomenou funkci $\frac{F(x)}{f(x)}$ na funkce lomené tvaru jednoduššího, kladouce

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{N_0}{N^{n+1}} + \frac{P_0}{P^{p+1}} + \frac{Q_0}{Q^{q+1}} + \ldots + \frac{S_0}{S^{s+1}};$$

zde značí N_0, P_0 ... S_0 celistvé polynomy, jež snadno vyčíslíme následujícím spůsobem.

Máme-li dvě celistvé funkce U a V, jež nemají společného algebraického dělitele (jsou algebraicky nesoudělné), tu lze vždy

---

*) V. *Serret,* Cours d' Algèbre supérieure, t. I. art. 49. a 50.

pouhými divisemi ustanoviti dvě jiné celistvé funkce A a B, které vyhovují rovnici*)

$$AV + BU = 1.$$

Učinivše

$$U = N^{n+1};\ V = P^{p+1}\, Q^{q+1} \dots S^{s+1},$$

máme

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{UV} = \frac{AV + BU}{UV} = \frac{A}{N^{n+1}} + \frac{B}{P^{p+1}\, Q^{q+1} \dots S^{s+1}},$$

a tedy

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{N_0}{N^{n+1}} + \frac{BF(x)}{P^{p+1}\, Q^{q+1} \dots S^{s+1}},$$

píšíce N_0 místo součinu $AF(x)$.

Operujeme-li se zlomkem

$$\frac{BF(x)}{P^{p+1}\, Q^{q+1} \dots S^{s+1}}$$

týmž spůsobem, rozložíme jej na lomenou funkci o jmenovateli P^{p+1} a na jinou o jmenovateli $Q^{q+1} \dots S^{s+1}$. Pokračujíce touto cestou, obdržíme konečně

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{N_0}{N^{n+1}} + \frac{P_0}{P^{p+1}} + \dots + \frac{S_0}{S^{s+1}},$$

a tedy převeden integrál daného differenciálu formulí

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{N_0}{N^{n+1}}\, dx + \int \frac{P_0}{P^{p+1}}\, dx + \dots + \int \frac{S_0}{S^{s+1}}\, dx$$

na integrály rázu

$$\int \frac{N_0}{N^{n+1}}\, dx,$$

o kterém nyní pojednáme.

3. Chtějíce redukovati

$$\int \frac{N_0}{N^{n+1}}\, dx$$

na integrál tvaru jednoduššího, položme

$$\frac{N_0}{N^{n+1}} = \frac{N_1}{N^n} + \frac{d}{dx}\frac{V_0}{N^n}, \tag{1}$$

kdež N_1 a V_0 značí celistvé funkce, které ihned vyčíslíme. Provedeme-li naznačenou derivaci, obdržíme

$$N_0 = (N_1 + V_0')\, N - n V_0\, N'. \tag{2}$$

*) *V. Serret,* Cours d' Algèbre supérieure, t. I. art. 48.; ostatně provádím v uvedených dvou příkladech do podrobna vyčíslení funkcí A a B.

Celistvá funkce N neobsahovala mnohonásobných faktorů kořenových, je tudíž se svou derivací N′ nesoudělnou, a z toho důvodu lze známou cestou stanoviti dva polynomy A a B, takové, že

$$1 = BN - AN'.$$

Násobivše rovnici tuto výrazem N_0, máme

$$N_0 = BN_0 N - AN_0 N';$$

aneb, značí-li K *libovolný* polynom a užijeme-li obratu známého z rovnic neurčitých prvního stupně —

$$N_0 = (BN_0 - N'K)\,N - (AN_0 - NK)\,N'.$$

Porovnáme-li tuto rovnici s podmínkou (2), patrně této vyhovíme, kladouce

$$n\,V_0 = AN_0 - NK;\quad N_1 + V_0' = BN_0 - N'K.$$

Máme tedy hledané polynomy N_1 a V_0 z formulí

$$\begin{aligned} n\,V_0 &= AN_0 - NK; \\ N_1 &= BN_0 - N'K - V_0'. \end{aligned} \tag{3}$$

S výrazem $\frac{N_1}{N^n}$ operujme nyní zrovna tak, jako jsme učinili s $\frac{N_0}{N^{n+1}}$. Tedy položme na novo

$$\frac{N_1}{N^n} = \frac{N_2}{N^{n-1}} + \frac{d}{dx}\frac{V_1}{N^{n-1}}, \tag{4}$$

kdež polynomy N_2 a V_1 stanoveny formulemi

$$\begin{aligned} (n-1)\,V_1 &= AN_1 - NK_1; \\ N_2 &= BN_1 - N'K_1 - V_1'; \end{aligned} \tag{5}$$

K_1 zde značí opět polynom zcela libovolný. Pokračujeme-li takto, obdržíme celkem tuto řadu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{N^{n+1}} &= \frac{N_1}{N^n} + \frac{d}{dx}\frac{V_0}{N^n}, \\ \frac{N_1}{N^n} &= \frac{N_2}{N^{n-1}} + \frac{d}{dx}\frac{V_1}{N^{n-1}}, \\ \frac{N_2}{N^{n-1}} &= \frac{N_3}{N^{n-2}} + \frac{d}{dx}\frac{V_2}{N^{n-2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{N_{n-1}}{N^2} &= \frac{N_n}{N} + \frac{d}{dx}\frac{V_{n-1}}{N}. \end{aligned} \tag{α}$$

Zároveň jsou polynomy $N_1 \ldots N_n$ a $V_0 \ldots V_{n-1}$ stanoveny formulemi

$$\begin{aligned} n V_0 &= AN_0 - NK\ , & N_1 &= BN_0 - N'K - V_0'\ ; \\ (n-1) V_1 &= AN_1 - NK_1\ , & N_2 &= BN_1 - N'K_1 - V_1'\ ; \\ (n-2) V_2 &= AN_2 - NK_2\ , & N_3 &= BN_2 - N'K_2 - V_2'\ ; \\ & \dots & & \dots \\ V_{n-1} &= AN_{n-1} - NK_{n-1}, & N_n &= BN_{n-1} - N'K_{n-1} - V_{n-1}'. \end{aligned} \qquad (\beta)$$

V nich značí $K, K_1, \dots K_{n-1}$ zcela libovolné polynomy.

Sečteme-li nyní všecky formule (α), máme

$$\frac{N_0}{N^{n+1}} = \frac{N_n}{N} + \frac{d}{dx}\left(\frac{V_0}{N^n} + \frac{V_1}{N^{n-1}} + \frac{V_2}{N^{n-2}} + \dots + \frac{V_{n-1}}{N}\right),$$

pročež integrujíce

$$\int \frac{N_0}{N^{n+1}} dx = \int \frac{N_n}{N} dx + \frac{V_0 + V_1 N + V_2 N^2 + \dots + V_{n-1} N^{n-1}}{N^n}.$$

Postaráme-li se vhodnou volbou libovolných dosud polynomů $K, K_1, \dots K_{n-1}$ o to, aby výrazy $V_0, \dots V_{n-1}$ dané formulemi (β) byly stupně nižšího než je N, tu bude v předposlední formuli hodnota v závorce a tedy taky její derivace funkcí ryze lomenou, a tedy se jeví $\frac{N_n}{N}$ co rozdíl dvou ryzých funkcí, jest tedy též ryzou funkcí. A integrál

$$\int \frac{N_n}{N} dx$$

ryze lomené funkce, jejíž jmenovatel obsahuje jen jednoduché faktory, jest pouze transcendentním; a proto udává nám výraz

$$\frac{V_0 + V_1 N + V_2 N^2 + \dots + N_{n-1} N^{n-1}}{N^n}$$

celou algebraickou část proponovaného integrálu $\int \frac{N_0}{N^{n+1}} dx$.

Toť řešení vytknutého úkolu *Hermite-em* podané; jiné řešení, založené na rozvinutí v řady, podává týž v citovaném díle pag. 263 sqq., není však formálně tak dokonalé jako toto.

4. Uveďme pěkný příklad v citovaném díle počítaný. Mějme stanoviti algebraickou část integrálu

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

Zde máme

$$f(x) = (x^2-1)^{n+1} = N^{n+1};\ N_0 = 1.$$

Z

$$N = x^2 - 1;\ N' = 2x$$

nalezneme divisí

$$\frac{2N}{N'} = x - \frac{2}{N'}, \text{ t. j. } 2 = xN' - 2N,$$

a tedy

$$1 = -N - \frac{-x}{2} N',$$

což-li porovnáme s rovnicí

$$1 = BN - AN',$$

máme

$$A = -\frac{x}{2}, \quad B = -1.$$

Vezmeme-li ve formulích (β) za libovolné polynomy K, K_1 ... naskrze nully, tu se objeví výrazy V_0 V_1 ... stupňů nižších než N, a sice máme

$$n V_0 = -\frac{x}{2}, \quad N_1 = -1 + \frac{1}{2n} = -\frac{2n-1}{2n},$$

$$(n-1) V_1 = +\frac{2n-1}{2n}\frac{x}{2},$$

$$N_2 = \frac{2n-1}{2n} - \frac{2n-1}{2n(n-1)} = +\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}$$

$$(n-2) V_2 = -\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}\frac{x}{2},$$

$$N_3 = -\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(n-2)}\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2n(2n-2)(2n-4)},$$

$$(n-3) V_3 = +\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2n(2n-2)(2n-4)}\frac{x}{2},$$

$$N_4 = +\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)}$$

. . . .

a konečně

$$V_{n-1} = (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4}\frac{x}{2},$$

$$N_n = (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2}.$$

Máme tedy, jelikož N_n jest stálá,

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}} = N_n \int \frac{dx}{x^2-1} + \frac{V_0 + V_1 N + V_2 N^2 + \ldots + V_{n-1} N^{n-1}}{N^n},$$

t. j.

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}} = N_n \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} + \frac{V}{(x^2-1)^n},$$

kdež čítatel V části algebraické patrně jest výraz

$$V = -\frac{x}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{2n-1}{2n}\frac{x^2-1}{n-1} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}\frac{(x^2-1)^2}{n-2} - \dots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3}{2n(2n-2)\dots 4}(x^2-1)^{n-1}\right].$$

5. Co nový příklad uvedu integrál

$$\int \frac{dx}{(x^5+5px^4+q)^2};$$

vyčíslení algebraické části jeho je proto zajímavější, poněvadž je rozkladem na zlomky parciálné nelze docíliti, neboť rovnice

$$x^5+5px^4+q=0$$

repraesentuje obecnou rovnici pátého stupně *) a tu algebraicky řešiti nelze. Učiňme tedy

$$f(x) = N = x^5 + 5px^4 + q;\ N' = 5(x^4+4px^3);\ n = 1.$$

Pak nalezneme divisemi, jež jsou tak upraveny, že se vyhneme zlomkům,

$$\frac{N}{\frac{1}{5}N'} = Q + \frac{R}{\frac{1}{5}N'} \text{ t. j. } 5N = QN' + 5R;$$
$$\frac{4p^2\frac{1}{5}N'}{-R} = Q_1 + \frac{R_1}{-R} \text{ t. j. } -4p^2N' = 5Q_1R - 5R_1;$$
$$\frac{-q^3R}{R_1} = Q_2 + \frac{R_2}{R_1} \text{ t. j. } -q^3R = Q_2R_1 + R_2.$$

Zbytek R_2 již neobsahuje x a sice máme

$$R_2 = -q^3(4^4p^5+q);$$

a dále

$$Q = x+p,\quad Q_1 = x+4p,$$
$$Q_2 = 4p^2q^2(x^2-4px+16p^2).$$

Provedené divise nám nyní podávají posloupně rovnice

$$-R_2 = q^3R + Q_2R_1,$$

t. j.

*) Methodou *Tschirnhausenovou* lze redukovati každou rovnici pátého stupně na tento tvar; v. *Serret*, Alg. sup. t. I. art. 193.; vydání 4.

$$q^3(4^4p^5+q)=q^3R+Q_2\frac{5Q_1R+4p^2N'}{5}$$
$$=R(q^3+Q_1Q_2)+4p^2Q_2\frac{N'}{5}$$
$$=(q^3+Q_1Q_2)+\frac{5N-QN'}{5}+4p^2Q_2\frac{N'}{5}$$
$$=N(q^3+Q_1Q_2)+\frac{N'}{5}[4p^2Q_2-Q(q^3+Q_1Q_2)].$$

To-li porovnáme s podmínkou

$$1=BN-AN',$$

máme

$$A=\frac{Q(q^3+Q_1Q_2)-4p^2Q_2}{5q^3(4^4p^5+q)}\,;\; B=\frac{q^3+Q_1Q_2}{q^3(4^4p^5+q)}.$$

Rovnice (β) jsou nyní, položivše $K=0$,

$$V_0=A\,;\; N_1=B-V_0'=B-A'.$$

Máme tedy

$$\int\frac{dx}{(x^5+5px^4+q)^2}=\int\frac{B-A'}{x^5+5px^4+q}dx+\frac{A}{x^5+5px^4+q}.$$

Jest tedy

$$\frac{Q(q^3+Q_1Q_2)-4p^2Q_2}{5q^3(4^4p^5+q)(x^5+5px^4+q)}$$

algebraická část proponovaného integrálu, a

$$\int\frac{B-A'}{x^5+5px^4+q}dx$$

jeho transcendentní částí.

II. O integrování obecných racionálných differenciálů pomocí posloupné redukce, známy-li jsou lineárné faktory jmenovatele.

Jde nám opět jen o ryze lomené funkce. Nechť obsahuje jmenovatel vesměs různé lineárné faktory $x+a$, $x+b,..x+l$; tu jde patrně o to, bychom stanovili

$$J=\int\frac{x^r\,dx}{f(x)},$$

kdež

$$f(x)=(x+a)(x+b)..(x+l)$$

a kde exponent r jest menší než počet n linearných faktorů. Učiňme

$$x+a=y,\quad dx=dy,$$

tedy

$$\mathrm{J} = \int \frac{(y-a)^r\, dy}{y(y+\beta)\,..\,(y+\lambda)},$$

kdež

$$\beta = b - a,\ \gamma = c - a, .., \lambda = l - a.$$

Vymocníme-li v čítateli, rozložíme pak J ihned na integrály tvaru

$$\int \frac{y^s\, dy}{(y+\beta)\,..\,(y+\lambda)},$$

a na integrál

$$\int \frac{dy}{y(y+\beta)\,..\,(y+\lambda)}.$$

První z obou se vztahuje k ryze lomené funkci, jejíž jmenovatel jest pouze stupně $n-1$, a tu tedy redukce již provedena, pročež stačí, pojednáme-li jen o druhém. Položme k vůli stručnosti

$$\int \frac{dz}{(z+a_1)(z+a_2)\,..\,(z+a_n)} = \varphi_n(z, a_1, a_2, .. a_n),$$

tedy

$$\int \frac{dz}{(z+a_1)(z+a_2)\,..\,(z+a_{n-1})} = \varphi_{n-1}(z, a_1, a_2, .. a_{n-1}).$$

Násobíme-li pod integračním znamením čítatel i jmenovatel hodnotou $z + a_n$, obdržíme

$$\varphi_{n-1}(z, a_1, \ldots a_{n-1}) = \int \frac{(z+a_n)\, dz}{(z+a_1)\ldots(z+a_n)}.$$

Učinivše $z + a_1 = y$ obdržíme

$$\varphi_{n-1}(z, a_1, \ldots a_{n-1}) = \int \frac{y+\alpha_n}{y(y+\alpha_2)\ldots(y+\alpha_n)}\, dy,$$

kdež k vůli stručnosti α_k značí $a_k - a_1$. Máme nyní na pravé straně

$$\int \frac{dy}{(y+\alpha_2)\ldots(y+\alpha_n)} + \alpha_n \int \frac{dy}{y(y+\alpha_2)\ldots(y+\alpha_n)}$$

t. j.

$$\varphi_{n-1}(y, \alpha_2, \ldots \alpha_n) + \alpha_n \int \frac{dz}{(z+a_1)(z+a_2)\ldots(z+a_n)}.$$

Tím nalezáme

$$\varphi_{n-1}(z, a_1, \ldots a_{n-1}) = \varphi_{n-1}(z+a_1, a_2 - a_1, \ldots a_n - a_1) + \\ + (a_n - a_1)\, \varphi_n(z, a_1, \ldots a_n),$$

a tedy konečně redukční formuli

$$\varphi_n(z,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n) =$$

$$= \frac{1}{a_n - a_1}\left[\varphi_{n-1}(z, a_1, \ldots a_{n-1}) - \varphi_{n-1}(z + a_1, a_2 - a_1, \ldots a_n - a_1)\right],$$

ve kterou ostatně lze úlohu litery a_1 přiděliti kterékoli z liter $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n-1}$.

Vytknuté redukce vedou konečně k integrálu

$$\int \frac{dz}{z + a} = \log(z + a),$$

a tím úkol řešen pro případ, že obsahuje jmenovatel jen jednoduché faktory.

Nechť obsahuje nyní jmenovatel i faktory mnohonásobné. Pak jde o integrál tvaru

$$K = \int \frac{F(z)\,dz}{(z + a_1)^{\lambda_1}(z + a_1)^{\lambda_2}\ldots(z + a_n)^{\lambda_n}}.$$

Ten však snadno odvodíme pomocí známé poznámky z integrálu již vyčísleného

$$\int \frac{F(z)\,dz}{(z + a_1)(z + a_2)\ldots(z + a_n)} = \psi(z,\ a_1,\ \ldots\ a_n).$$

Derivujeme-li ψ dle a_1 a sice $(\lambda_1 - 1)$krát, dle a_2 po sobě, $(\lambda_2 - 1)$krát atd., nalezneme

$$\frac{\partial^{\lambda_1 + \ldots \lambda_n - n}\psi}{\partial a_1^{\lambda_1 - 1}\ldots\partial a_n^{\lambda_n - 1}} =$$

$$= (-1)^{\lambda_1 + \ldots \lambda_n - n}(\lambda_1 - 1)!\ldots(\lambda_n - 1)!\int \frac{F(z)\,dz}{(z + a_1)^{\lambda_1}\ldots(z + a_n)^{\lambda_n}};$$

tím vyjádřen hledaný integrál pomocí derivace známé funkce.

Vytkněme si co příklad lomené funkce, jichž jmenovatel jest druhého stupně. Tu máme při $x + a = y$,

$$J = \int \frac{Ax + B}{(x + a)(x + b)}\,dx = \int \frac{A(y - a) + B}{y(y + b - a)}\,dy,$$

$$J = A\int \frac{dy}{y + b - a} + (B - aA)\int \frac{dy}{y(y + b - a)},$$

$$J = A\log(x + b) + (B - aA)\,\varphi_2(y,\ 0,\ b - a).$$

Avšak dle redukční formule máme

$$\varphi_2(y,\ 0,\ b - a) = \frac{1}{b - a}\left[\varphi_1(y, 0) - \varphi_1(y + 0,\ b - a)\right],$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{b-a}\left[\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+b-a}\right]$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\log y - \log (y+b-a)\right],$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{b-a}(\log (x+a) - \log (x+b)] = \frac{1}{b-a}\log \frac{x+a}{x+b},$$

pročež konečně

$$J = A \log (x+b) + \frac{B-aA}{b-a}\log \frac{a+a}{x+b} + \text{const.}$$

Vůči tvaru proponovaného integrálu jest patrné, že se J v podstatě nezmění, vyměníme-li a a b na vzájem, t. j. lze též psáti

$$J = A \log (x+a) + \frac{B-bA}{a-b}\log \frac{x+b}{x+a} + C_1,$$

a tedy sečteme-li

$$2J = A \log (x+a)(x+b) + \frac{2B - A(a+b)}{b-a}\log \frac{x+a}{x+b} + C_2 .$$

Obsahuje-li jmenovatel dva stejné faktory, tu jde o integrál

$$\int \frac{Ax+B}{(x+a)^2}\,dx .$$

Stanovme si

$$\int \frac{Ax+B}{x+a}\,dx = Ax + (B-aA)\log (x+a) = \psi(x, a),$$

i bude

$$\int \frac{Ax+B}{(x+a)^2}\,dx = -\frac{\partial \psi}{\partial a} = \frac{aA-B}{x+a} + A\log (x+a) .$$

Co jiný příklad vezmeme integrál stanovený v předcházejícím odstavci

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}} .$$

Vezměme v úvahu obecnější integrál

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} .$$

Máme

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log \frac{x-a}{x+a}$$

čili, učinivše $a = \sqrt{\alpha}$,

$$\int \frac{dx}{x^2 - \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \log \frac{x - \sqrt{\alpha}}{x + \sqrt{\alpha}} = \psi(x, \alpha).$$

Derivujeme-li obě strany $n$krát dle α, obdržíme

$$1.2\ldots n \int \frac{dx}{(x^2 - \alpha)^{n+1}} = \frac{\partial^n \psi}{\partial \alpha^n}$$

čímž

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}} = \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{\partial^n \psi}{\partial \alpha^n}.$$

Zde by provedení derivace bylo dosti obtížné; v jednodušších případech však vede tato cesta rychle k cíli. Vezměme co příklad ryze lomenou funkci, jejíž jmenovatel jest $(x + a)^3$. Tedy

$$\int \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x + a)^3} dx.$$

Stanovme si

$$\int \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x + a)} dx = A\frac{x^2}{2} + (B - aA)x +$$
$$+ (C - aB + a^2A) \log (x + a).$$

Derivujeme-li dvakrát dle a, obdržíme

$$2 \int \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x + a)^3} dx = 2A \log (x + a) + \frac{Px + Q}{(x + a)^2},$$

položíme-li k vůli stručnosti

$$P = 2aA - B, \quad Q = 3a^2A - aB - C.$$

Nebude od místa, připomenu-li zde jistou poznámku, kterou učinil *Euler**) o integrování racionálných differenciálů. V takovýchto integrálech

$$\int \frac{M}{N} dx$$

lze supponovati $\frac{M}{N}$ co funkci ryze lomenou t. j. M alespoň o stupeň nižší než N. *Euler* ukázal, *že lze redukovati čitatel ještě o jeden stupeň.* On klade

$$M = Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots,$$
$$N = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-1} + \ldots.$$

---

*) V. *Leonhard Euler's* vollst. Anleitung zur Integralrechnung. Aus d. Lat. in's Deutsche üb. v. J. Salomon, Wien 1828, t. I. §. 68.