Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Vyčichlo

Poznámka k vytvoření prostorové křivky 4. řádu 2. druhu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 4, 73--81

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122013`

ČÁST MATEMATICKÁ

Poznámka k vytvoření prostorové křivky 4. řádu 2. druhu.

F. Vyčichlo.

(Došlo 25. srpna 1933.)

I. Promětnost základních útvarů 2. řádu vede přímo k vytvoření[1]) bikvadratické křivky K^4, která je druhého druhu, svazkem rovin (s) 2. třídy a promětnou k němu řadou přímek $(\check{R})$ na ploše druhého stupně **H**.

Budiž s vrchol kužele **S** obaleného rovinami a P přímka vytčené řady, která libovolné rovině π svazku promětně přísluší. Rovina π protíná $(\check{R})$ v bodové řadě na kuželosečce K a daný svazek rovin ve svazku přímek o vrcholu s, který je k této řadě promětný; procházejí tudíž tři přímky tohoto svazku příslušnými jim body uvedené řady, a to jsou body naší prostorové křivky, jejíž čtvrtý bod v rovině π je průsečíkem $(\pi \times P)$. Libovolná rovina ϱ, neobsahující s, protíná (s) ve svazku přímek 2. třídy a řadu $(\check{R})$ v řadě bodové 2. řádu, jež je k tomuto promětná. Procházejí tudíž 4 přímky svazku příslušnými body řady a tyto body náleží křivce K^4. Ale i když prochází rovina ϱ bodem s, plyne z dané promětnosti, že procházejí 4 roviny svazku (s) příslušnými body řady, v níž $(\check{R})$ seče tuto rovinu. Když konečně rovina ϱ prochází přímkou P řady $(\check{R})$, pak protíná **H** ještě v přímce řady druhé Q, na níž vzniká bodová involuce promětná ke svazku přímek, v němž ϱ seče svazek (s); leží tudíž tři body řady bodové na Q na příslušných přímkách tohoto svazku, z čehož usuzujeme, že na každé přímce řady $(\check{R})$ leží jeden bod a na každé přímce řady druhé náležející **H** leží tři body křivky K^4.

Promítněme uvažované útvary z bodu s do libovolné roviny μ. Především promítá se řada $(\check{R})$ svazkem rovin 2. třídy $(\check{r})$, který je promětný ke svazku (s), když každé rovině v (s) přiřadíme onu rovinu tohoto svazku, která prochází přímkou promětně jí příslušnou v $(\check{R})$. Tyto svazky vytvořují kužel 4. řádu $\mathbf{K}^4$, jímž se promítá K^4 z bodu s.

[1]) Různá vytvoření uvažované kvartiky uvádí: Gino Loria: Curve sghembe speciali I, pg. 276 etc., L. Vietoris: Eine besondere Erzeugungsweise der Raumkurve 4. Ordnung . . ., Sitzb. Wiener Ak. 1916, pg. 259 etc.

Průmět křivky K^4 do μ je tudíž křivka 4. řádu $K_\mu{}^4$.

Uvedená prometnost náleží kolineaci dvou trsů o společném vrcholu s. V této kolineaci příslušejí přímkám, v nichž se roviny svazku (s) dotýkají kužele, přímky kužele soustředného **L** a tečného k **H**, v nichž se ho dotýkají odpovídající roviny ve svazku $(\check{r})$. Buďtež A_1, A_2, A_3 samodružné přímky uvedené kolineace. (Předpokládáme, že tato kolineace, stejně jako prometnost, je obecná.) Tečným přímkám k **S** vedeným přímkou A_1 odpovídají prometně roviny v $(\check{r})$, které procházejí rovněž přímkou A_1; obdobně pro A_2 a A_3.

Z toho plyne, že přímky A_1, A_2, A_3 jsou dvojnými přímkami plochy $\mathbf{K}^4$ a že tudíž tato je racionální. Je tedy také průmět $K_\mu{}^4$ křivky K^4 křivka racionální, která má stopníky a_1, a_2, a_3 přímek A_1, A_2, A_3 na μ za body dvojné. Odpovídají si tudíž svazky 2. třídy stopních křivek S_μ, L_μ ploch **S** a **L** v kolineaci, která má a_1, a_2, a_3 za body samodružné a vytvořují svými průsečíky křivku $K_\mu{}^4$.

Z prometnosti svazků tečen na L_μ a S_μ plyne, že 4 tečny křivky S_μ procházejí body dotyku prometně příslušných jim tečen křivky L_μ a naopak, ježto svazek tečen na S_μ je zároveň prometný s řadou bodů dotyku příslušných tečen křivky L_μ a naopak. Z toho plyne, že křivky S_μ a L_μ jsou vepsány křivce $K_\mu{}^4$ dotýkajíce se jí ve čtyřech bodech.

Zvolme nyní trojúhelník a_1, a_2, a_3 za základ prometné souřadné soustavy. Pak rovnice křivky $K_\mu{}^4$ má tvar:

$$a_{11}x_2{}^2x_3{}^2 + a_{22}x_3{}^2x_1{}^2 + a_{33}x_1{}^2x_2{}^2 + 2a_{12}x_1x_2x_3{}^2 + 2a_{23}x_3x_2x_1{}^2 + + 2a_{31}x_3x_1x_2{}^2 = 0. \tag{1}$$

Transformujeme-li křivku tak, aby každému bodu příslušela jeho harmonikála vzhledem k trojúhelníku a_1, a_2, a_3, pak se transformuje v kuželosečku V, jejíž rovnice v přímkových souřadnicích je:

$$a_{11}u_1{}^2 + a_{22}u_2{}^2 + a_{33}u_3{}^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 = 0. \tag{2}$$

Libovolné tečně (u_1, u_2, u_3) křivky V přísluší určitý bod (x_1, x_2, x_3) křivky $K_\mu{}^4$ a naopak, jehož souřadnice plynou ze souřadnic tečny rovnicemi:

$$\varrho x_1 = \frac{1}{u_1}, \quad \varrho x_2 = \frac{1}{u_2}, \quad \varrho x_3 = \frac{1}{u_3}.$$

Tím bodem je stanoven svazek přímek:

$$u_1x_1 + (\varkappa - 1)\, u_2x_2 - \varkappa u_3x_3 = 0. \tag{3}$$

Když (x_i) probíhá křivku (1), tu přímka u_i obaluje kuželosečku (2) a pro každé $\varkappa$ obaluje přímka (3), jejíž souřadnice U_i jsou dány rovnicemi:

$$\varrho U_1 = u_1, \quad \varrho U_2 = (\varkappa - 1)\, u_2, \quad \varrho U_3 = -\varkappa u_3,$$

kuželosečku:

$$(\varkappa-1)^2\,\varkappa^2 a_{11} U^2 + \varkappa^2 a_{22} U_2^2 + (\varkappa-1)^2\, a_{33} U_3^2 + 2\varkappa^2(\varkappa-1)\, a_{12} U_1 U_2 -$$
$$- 2\varkappa\,(\varkappa-1)\, a_{23} U_2 U_3 - 2\varkappa\,(\varkappa-1)^2\, a_{31} U_1 U_3 = 0.$$

Bodová rovnice této kuželosečky je:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dfrac{x_1}{\varkappa(\varkappa-1)} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dfrac{x_2}{\varkappa} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & -\dfrac{x_3}{\varkappa-1} \\ \dfrac{x_1}{\varkappa(\varkappa-1)} & \dfrac{x_2}{\varkappa} & -\dfrac{x_3}{\varkappa-1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

aneb, značíme-li A_{ik} minory determinantu křivky (2):

$$A_{11} x_1^2 + (\varkappa-1)^2 A_{22} x_2^2 + \varkappa^2 A_{33} x_3^2 + 2\,(\varkappa-1)\, A_{12} x_1 x_2 -$$
$$- 2\varkappa\,(\varkappa-1)\, A_{23} x_2 x_3 - 2\varkappa A_{31} x_3 x_1 = 0. \tag{4}$$

Můžeme ji psáti též ve tvaru:

$$\varkappa^2\,(A_{22} x_2^2 + A_{33} x_3^2 - 2A_{23} x_2 x_3) - 2\varkappa\,(A_{22} x_2^2 - A_{12} x_1 x_2 - A_{23} x_2 x_3 +$$
$$+ A_{31} x_3 x_1) + A_{11} x_1^2 + A_{22} x_2^2 - 2A_{12} x_1 x_2 = 0.$$

Mění-li se $\varkappa$, obdržíme soustavu kuželoseček, jež obalují křivku o rovnici:

$$(A_{22} x_2^2 + A_{33} x_3^2 - 2A_{23} x_2 x_3)\,(A_{11} x_1^2 + A_{22} x_2^2 - 2A_{12} x_1 x_2) -$$
$$- (A_{22} x_2^2 - A_{12} x_1 x_2 - A_{23} x_2 x_3 + A_{31} x_3 x_1)^2 = 0$$

čili

$$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 x_1^2 +$$
$$+ 2a_{31} x_3 x_1 x_2^2 = 0.$$

Obaluje tudíž soustava těchto kuželoseček křivku K_μ^4. Libovolné dvě z těch kuželoseček jsou promětné a příslušejí sobě v kolineaci v rovině μ, která má a_1, a_2, a_3 za body samodružné. Neboť přísluší-li jedna z nich $K_\varkappa$ parametru $\varkappa$, druhá $K_{\varkappa'}$ parametru $\varkappa'$, plyne pro souřadnice U_1, U_2, U_3 tečen prvé z nich:

$$\varrho U_1 = u_1, \quad \varrho U_2 = (\varkappa-1)\, u_2, \quad \varrho U_3 = -\varkappa u_3$$

a pro souřadnice druhé U'_1, U'_2, U'_3 pak:

$$\varrho' U'_1 = u_1, \quad \varrho' U'_2 = (\varkappa'-1)\, u_2, \quad \varrho' U'_3 = -\varkappa' u_3,$$

takže $\quad \varrho'' U_1 = U'_1, \quad \varrho'' U_2 = \dfrac{\varkappa-1}{\varkappa'-1}\, U'_2, \quad \varrho'' U_3 = \dfrac{\varkappa}{\varkappa'}\, U'_3$

a křivka $K_\mu{}^4$ je vytvořena prométnými svazky tečen na těchto kuželosečkách.

Každá z těchto dvou kuželoseček se dotýká křivky $K_\mu{}^4$ ve 4 bodech, poněvadž z naší prométnosti plyne, že 4 tečny kuželosečky $K_\varkappa$ procházejí body dotyku příslušných tečen kuželosečky $K_{\varkappa'}$.

Jedna z kuželoseček uvažované soustavy splývá s L_μ, prométně příslušnou S_μ můžeme tudíž nahraditi libovolnou jinou kuželosečkou naší soustavy.

Z toho plyne, že lze K^4 vytvořiti nekonečně mnoha způsoby řadou přímek na **H** a svazkem rovin 2. třídy k ní prométným, jehož vrchol je bod s. Je tedy možno bodem s vésti nekonečně mnoho kuželů 2. stupně, z nichž každý, jakožto svazek rovin 2. třídy prométných k řadě $(\check{R})$, vytvořuje s ní křivku K^4. Libovolné dva z těchto kuželů jsou prométné a v kolineaci, již tato prométnost určuje, jsou samodružné přímky bisekanty křivky K^4 bodem s vedené. Všechny tyto kužele obalují racionální kužel 4. řádu.

Jelikož je průmět křivky K^4 z libovolného bodu v prostoru s_μ do roviny μ racionální křivka 4. řádu, soudíme z toho, že pro každý bod s_μ, jenž neleží na K^4 (pro který je tedy průmět K^4 nerozpadlá křivka 4. řádu) lze sestrojiti nekonečně mnoho svazků rovin 2. třídy prométných k uvažované řadě přímek na **H**, jež s touto vytvořují křivku K^4, jejíž průmět z s_μ do μ je křivka $K_\mu{}^4$.

Křivka $K_\mu{}^4$ může míti ve zvláštním případě v jednom z bodů a_1, a_2, a_3 inflexní uzel. Předpokládejme, že tomu tak je pro bod a_3. V tomto případě procházejí přímkou $s_\mu a_3$ dvě oskulační roviny křivky K^4, z nichž jedna oskuluje v jednom, druhá v druhém bodě křivku K^4, v němž ji seče bisekanta $s_\mu a_3$, v tomto případě zvaná bisekantou hlavní.

Rovnice tečen křivky (1) v bodě a_3 je

$$a_{11}x_2{}^2 + a_{22}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0;$$

ony protínají křivku ještě v bodech, jež leží na kuželosečce:

$$a_{33}x_1x_2 + 2a_{23}x_1x_3 + 2a_{31}x_2x_3 = 0,$$

která v případě, kdy tečny ty jsou inflexními, musí degenerovati v přímky

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0,$$

takže

$$a_{23} = a_{31} = 0.$$

Rovnice (1) potom přechází v rovnici:

$$a_{11}x_2{}^2x_3{}^2 + a_{22}x_3{}^2x_1{}^2 + a_{33}x_1{}^2x_2{}^2 + 2a_{12}x_1x_2x_3{}^2 = 0,$$

nebo, změníme-li označení součinitelů:

$$a_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2 + a_{22}x_3{}^2x_1{}^2 - a_3{}^2x_1{}^2x_2{}^2 + 2a_{12}x_1x_2x_3{}^2 = 0.$$

Potom jsou tečny této křivky v bodě a_2 dány rovnicemi:

$$a_1x_3 - a_3x_1 = 0, \quad a_1x_3 + a_3x_1 = 0.$$

Prvá z nich protíná křivku $K_\mu{}^4$ mimo bod a_2 ještě v jednom bodě ležícím na přímce

$$a_{22}x_1 + 2a_{12}x_2 = 0.$$

Má-li tato tečna býti inflexní, musí tento bod splynouti s a_2 a tedy přímka právě uvedená musí splynouti s $x_1 = 0$, takže $a_{12} = 0$ a rovnice křivky jest v tomto případě, klademe-li $a_{22} = a_2{}^2$,

$$a_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2 + a_2{}^2x_3{}^2x_1{}^2 - a_3{}^2x_1{}^2x_2{}^2 = 0. \tag{5}$$

Z této rovnice jest také patrno, že také tečna $a_1x_3 + a_3x_1 = 0$ jest tečnou inflexní, a proto je též a_2 inflexním uzlem. Pak je též a_1 inflexním uzlem. Z toho plyne, když bod s_μ náleží jedné hlavní bisekantě a když jím prochází další bisekanta té vlastnosti, že oskulační rovina křivky K^4, v jednom jejím bodě na ní ležícím, obsahuje tuto bisekantu, pak ji obsahuje též oskulační rovina křivky K^4 v druhém jejím bodě na této bisekantě ležícím. Je tedy též tato druhá bisekanta hlavní a bodem s_μ prochází pak ještě třetí hlavní bisekanta. Z nich mohou nejvýše dvě protínati K^4 v reálných bodech.

Vyjádříme si ještě parametrické rovnice křivky K^4 v případě, že průmět $K_\mu{}^4$ je dán rovnicí (5). Při tom pro jednoduchost budeme předpokládati, že rovina μ je polární rovinou bodu s_μ, a že soustava souřadná je vytknuta souřadným čtyřstěnem $a_1, a_2, a_3, a_4 \equiv s_\mu$. Potom stopa plochy **H** na rovině μ, jako kuželosečka L_μ, je

$$a_2{}^2a_3{}^2x_1{}^2 + (\varkappa - 1)^2\, a_3{}^2a_1{}^2x_2{}^2 - \varkappa^2a_1{}^2a_2{}^2x_3{}^2 = 0,$$

neboť L_μ patří do soustavy (4).

Rovnice plochy **H** je tudíž

$$a_2{}^2a_3{}^2x_1{}^2 + (\varkappa - 1)^2\, a_3{}^2a_1{}^2x_2{}^2 - \varkappa^2a_1{}^2a_2{}^2x_3{}^2 - a_4{}^2x_4{}^2 = 0,$$

kde a_4 je určitá hodnota.

Vyjádříme nejprve parametrické rovnice křivky $K_\mu{}^4$ a pak pro křivku K^4 užijeme rovnice plochy **H**.

Za tím účelem vytkneme si, jak známo, svazek kuželoseček

$$x_1\,(a_2x_3 - a_3x_2) + \lambda x_2x_3 = 0;$$

poněvadž každá kuželosečka tohoto svazku prochází dvojnými body křivky $K_\mu{}^4$ a dotýká se jí v bodě a_1, protne ji ještě v jednom bodě, pro který

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{a_3\,\dfrac{x_1}{x_2}}{a_2\,\dfrac{x_1}{x_2} + \lambda}.$$

Z rovnice (5) křivky K_μ^4 plyne potom

$$a_1^2 - 2a_2\lambda \frac{x_1}{x_2} - \lambda^2 = 0,$$

takže

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1^2 - \lambda^2}{2a_2\lambda}, \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{a_3(a_1^2 - \lambda^2)}{a_2(a_1^2 - \lambda^2) + 2\lambda^2 a_2}.$$

Jsou tedy parametrické rovnice křivky K_μ^4:

$$\varrho x_1 = a_1^4 - \lambda^4, \; \varrho x_2 = 2a_2\lambda(a_1^2 + \lambda^2), \; \varrho x_3 = 2a_3\lambda(a_1^2 - \lambda^2). \quad (6)$$

Z rovnice plochy **H** plyne dosazením právě určených hodnot za x_1, x_2, x_3

$$\frac{\varrho^2 a_4^2 x_4^2}{a_2^2 a_3^2} = [4\varkappa a_1^2\lambda^2 - (a_1^2 + \lambda^2)^2]^2.$$

Rovnice je kvadratická — dostáváme dvě křivky K_1^4, K_2^4, v nichž kužel o vrcholu $a_4 \equiv s_\mu$ a který promítá K_μ^4, protíná plochu **H**. Uvažujme tu, pro kterou jest

$$\frac{\varrho a_4 x_4}{a_2 a_3} = 4\varkappa a_1^2\lambda^2 - (a_1^2 + \lambda^2)^2.$$

Pro parametrické vyjádření této křivky přistupuje tedy k rovnicím (6) ještě rovnice

$$\varrho x_4 = + \frac{a_2 a_3}{a_4}[4\varkappa a_1^2\lambda^2 - (a_1^2 + \lambda^2)^2].$$

Zvolme ještě místo parametru λ parametr μ tak, aby $\lambda = a_1\mu$; potom

$$\varrho x_1 = a_1(1 - \mu^4), \; \varrho x_2 = 2a_2\mu(1 + \mu^2), \; \varrho x_3 = 2a_3\mu(1 - \mu^2),$$

$$\varrho x_4 = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_4}[4\varkappa\mu^2 - (1 + \mu^2)^2].$$

Tyto rovnice převádíme mnohdy transformací

$$\sigma y_1 = \frac{x_1}{2a_1} - \frac{a_4 x_4}{2a_1 a_2 a_3}, \; \sigma y_2 = \frac{x_2}{4a_2} + \frac{x_3}{4a_3}, \; \sigma y_3 = \frac{x_2}{4a_2} - \frac{x_3}{4a_3},$$

$$\sigma y_4 = \frac{x_1}{2a_1} + \frac{a_4 x_4}{2a_1 a_2 a_3}, \text{ a } \varepsilon^2 = 2\varkappa - 1$$

na tvar

$$\sigma y_1 = 1 - \varepsilon^2\mu^2, \; \sigma y_2 = \mu, \; \sigma y_3 = \mu^3, \; \sigma y_4 = \mu^2(\varepsilon^2 - \mu^2).^2)$$

II. Prostorová křivka 4. řádu 2. druhu K^4 vznikne též promětností mezi kubickou involucí J_3 přímek řady jedné a řadou J přímek

[2]) Laguerre: Oeuvres II, pg. 281.

řady druhé na obecné přímkové ploše 2. stupně **H**. Každá přímka řady J je protťata přímkami z řady, jež tvoří příslušnou skupinu v J_3 ve třech bodech a každá přímka náležející některé skupině v J_3 jest protťata příslušnou přímkou v J v jednom bodě křivky K^4.

Buď s libovolný bod prostoru, z něhož promítáme do polární roviny σ bodu s vzhledem k **H**. Průměty přímek na **H** obalují kuželosečku K, jež je stopou kužele o vrcholu s opsaného ploše **H** a zároveň jeho křivkou dotyku s **H**. Stopníky přímek v J_3 na kuželosečce K tvoří kubickou involuci promětnou s řadou stopníků přímek v J a tedy, vzhledem k promětnosti bodové řady na kuželosečce a křivého svazku tečen v těchto bodech sestrojených, máme na kuželosečce K involuci 3. stupně tečen a promětný k ní svazek tečen 2. stupně.

Průsečíky takto sobě přiřaděných tečen kuželosečky vytvoří křivku 4. řádu racionální $K_\sigma{}^4$, která je průmětem křivky K^4 do roviny σ.

Pro křivku K^4 je možno snadno určiti parametrické rovnice, užijeme-li křivky $K^4{}_\sigma$.

Libovolná tečna A_3 kuželosečky K protne uvedenou involuci v involuci bodové 3. stupně J'_3 k J_3 promětné a uvedený svazek tečen v bodové řadě J' k J rovněž promětné. Jsou tedy J'_3 a J' mezi sebou taktéž promětné. Na A_3 zvolme dva body a_1, a_2 a veďme jimi tečny A_2, A_1 ke kuželosečce K různé od A_3, které nechť se protnou v bodě a_3.

Zvolíme-li trojúhelník $a_1a_2a_3$ za trojúhelník souřadný pro projektivní souřadnice, bude míti rovnice křivky K v souřadnicích tečnových tvar:

$$a_1u_2u_3 + a_2u_3u_1 + a_3u_1u_2 = 0$$

a tudíž bude v souřadnicích bodových

$$a_1{}^2x_1{}^2 + a_2{}^2x_2{}^2 + a_3{}^2x_3{}^2 - 2a_1a_2x_1x_2 - 2a_2a_3x_2x_3 - 2a_3a_1x_3x_1 = 0. \quad (K)$$

Libovolná tečna kuželosečky protne přímku A_3 v bodě t, pro nějž $x_3 = 0$ a pro nějž poměr x_1/x_2 klaďme roven λ. Tečny z toho bodu ke kuželosečce budou tudíž

$$x_3 = 0, \ (a_2 - a_1\lambda)\, x_1 + (a_1\lambda - a_2)\, x_2 + a_3\lambda x_3 = 0.$$

Poslední rovnice je rovnicí tečny bodem t procházející a různé od A_3. Promětnost mezi J'_3 a J' je vyjádřena obecně rovnicí

$$(\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta)\, \lambda_1 + \alpha_1\lambda^3 + \beta_1\lambda^2 + \gamma_1\lambda + \delta_1 = 0, \quad (\mathrm{I})$$

v níž určuje λ libovolný bod v J'_3 a λ_1 promětně příslušný bod v J'. Má tudíž příslušná tečna v involuci na K rovnici:

$$(a_2 - a_1\lambda)\, x_1 + (a_1\lambda - a_2)\, \lambda x_2 + a_3\lambda x_3 = 0$$

a tečna k ní promětná ve svazku tečen na K rovnici

$$(a_2 - a_1\lambda_1)\, x_1 + (a_1\lambda_1 - a_2)\, \lambda_1 x_2 + a_3\lambda_1 x_3 = 0.$$

Z těchto rovnic plynou souřadnice x_1, x_2, x_3 jejich průsečíku

$$\varrho x_1 = a_1 a_3 \lambda \lambda_1,\ \varrho x_2 = a_2 a_3,\ \varrho x_3 = (a_1\lambda - a_2)(a_1\lambda_1 - a_2).$$

Píšeme-li levou stranu rovnice (I) krátce

$$\Lambda\lambda_1 + \Lambda_1 = 0,$$

bude

$$\sigma x_1 = a_1 a_3 \Lambda_1 \lambda,\quad \sigma x_2 = -a_2 a_3 \Lambda,\quad \sigma x_3 = (a_1\Lambda_1 + a_2\Lambda)(a_1\lambda - a_2). \tag{II}$$

Tím jsme dospěli k parametrickému vyjádření křivky $K_\sigma{}^4$ pomocí parametru λ. Abychom vyjádřili nyní parametricky křivku K^4, zvolme ještě a_4 v bodě s jako čtvrtý vrchol souřadného čtyřstěnu $a_1a_2a_3a_4$. Potom lze rovnici plochy **H** psáti

$$K - a_4{}^2 x_4{}^2 = 0,$$

kde K je levá strana rovnice (K) a a_4 má určitou hodnotu. Souřadnice X_1, X_2, X_3, X_4 libovolného bodu p na K^4 jsou dány jednak souřadnicemi x_1, x_2, x_3 jeho průmětu p' z a_4 do σ, při čemž $x_1 : x_2 : x_3 = X_1 : X_2 : X_3$, kdežto za X_4 můžeme klásti hodnotu plynoucí z rovnice plochy **H**. Je tudíž

$$x_4{}^2 = \frac{K}{a_4{}^2};$$

klademe-li do této rovnice za x_1, x_2, x_3 hodnoty z (II), obdržíme po jednoduchém výpočtu

$$\sigma^2 a_4{}^2 x_4{}^2 = a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^2 (\Lambda\lambda + \Lambda_1)^2.$$

Přistupuje tudíž k rovnicím (II) ještě rovnice

$$\sigma x_4 = \pm \frac{a_1 a_2 a_3}{a_4} (\Lambda\lambda + \Lambda_1). \tag{III}$$

Rovnice (II) a (III) jsou parametrickým vyjádřením dvou racionálních křivek K^4, v nichž kužel promítající křivku K^4 z bodu s protíná plochu **H**. Křivky ty si příslušejí v involuci, která má s za střed a σ za rovinu involuce; pro jednu křivku jsou přímky jedné řady na **H** trisekantami a přímky řady druhé unisekantami, pro druhou křivku jest tomu naopak.

*

Note rélative à l'engendrement de la courbe du 4e degré et de la 2e espèce.

(L'extrait de l'article précédent.)

L'auteur construit la courbe du 4e degré et de la 2e espèce comme lieu des points de l'intersection des plans d'un faisceau de la 2e classe et des droites projectives d'une demi-quadrique générale; cette construction est possible d'une infinité de manières. A l'aide de la projection de cette courbe dans un plan arbitraire (on projette du sommet du faisceau pris en considération) il déduit quelques théorèmes fondamentaux sur cette quartique. On peut engendrer la courbe encore de la manière suivante, à savoir à l'aide des points de l'intersection des droites d'une demi-quadrique générale qui se trouvent en involution du 3e ordre et des droites projectives de la demi-quadrique complémentaire. L'auteur en déduit les équations paramétriques de la courbe.