Maxmilián Pinl

W-Projektionen totalisotroper Flächen. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 69 (1940), No. 2, 23--35

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121986`

W-Projektionen totalisotroper Flächen II.[1])

M. Pinl, Praha.

(Eingegangen am 30. Oktober 1937.)

§ 5. $\mu = 2$, $n = 7$; *euklidische Flächen*; *Hauptkurven*.

Beschränkt man sich in der Theorie zweidimensionaler Flächen eines euklidischen $(n - m)$-dimensionalen Raumes R_{n-m} auf die Elemente erster und zweiter Ordnung, so erscheint bekanntlich erst die Theorie zweidimensionaler Flächen $\mathfrak{x}^*(u_1, u_2)$ des R_5 mit den Komponentengleichungen

$$x_1^* = x_1^*(u_1, u_2), \ldots, x_5^* = x_5^*(u_1, u_2); \left\| \frac{\partial x_1^*}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_2^*}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_3^*}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_4^*}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_5^*}{\partial u_\alpha} \right\|, \tag{1}$$

$(\alpha = 1, 2)$ vom Rang 2

als allgemeiner Fall, da für $n < 5$ stets lineare Abhängigkeiten zwischen den fünf ersten und zweiten Ableitungen $\mathfrak{x}_\alpha^*$, $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ des Kurvenvektors $\mathfrak{x}^*$ bestehen. Gerade dieser allgemeine Fall $n = 5$ wurde denn auch in der neueren Literatur wieder bevorzugt[2]) und neue Resultate für die Theorie allgemeiner Flächen mit fünfdimensionalem von den Vektoren $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*$ aufgespannten Schmiegraum gewonnen.

Sind dann allgemein

$$x_1^* = x_1^*(u_1, u_2), \ldots, x_{n-m}^* = x_{n-m}^*(u_1, u_2) \text{ und } y_1 = y_1(u_1, u_2), \ldots,$$
$$y_m = y_m(u_1, u_2), \; n - m \geqq 2, \; m \geqq 2 \tag{2}$$

zwei isometrische Flächen aus einem R_{n-m} bzw. aus einem R_m von der binären quadratischen Metrik

---

[1]) vgl. M. Pinl, *W*-Projektionen totalisotroper Flächen I, Časopis **66**, (1937), 95—102; die Kenntnis dieser Note wird hier nicht vorausgesetzt.

[2]) vgl. E. Bompiani und E. Bortolotti, Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizazione della superficie di Veronese, M. Z. **42**, (1937), sowie die dort angegebene Literatur.

$$ds^2_{(n-m)} = dx_1^{*2} + \ldots + dx_{n-m}^{*2} = \overset{(n-m)}{g_{\alpha\beta}}\, du^\alpha\, du^\beta =$$
$$= \overset{(m)}{g_{\alpha\beta}}\, du^\alpha\, du^\beta = dy_1^2 + \ldots + dy_m^2 = ds^2_{(m)} \tag{3}$$

und der totalisotropen „Darstellungsfläche"[3])

$$x_1^* = x_1^*(u_1, u_2), \ldots, x_{n-m}^* = x_{n-m}^*(u_1, u_2);\ x_{n-m+1} = i y_1(u_1, u_2), \ldots,$$
$$x_n = i\, y_m(u_1, u_2) \quad (i = \sqrt{-1}), \tag{4}$$

so erhält man umgekehrt aus der Theorie der totalisotropen Flächen (4), auf welchen

$$dx_1^{*2} + \ldots + dx_{n-m}^{*2} + dx_{n-m+1}^2 + \ldots + dx_n^2 \equiv 0,\ \{u_1, u_2\}, \tag{5}$$

offensichtlich erst für $n \geqq 7$ Beiträge für die Flächentheorie des R_5. Dabei entspricht $n = 7$, $m = 2$ dem Fall „euklidischer Isometrien", sofern man dann (4) stets in der Parameterdarstellung

$$x_1^* = x_1^*(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \ldots, x_5^* = x_5^*(\bar{u}_1, \bar{u}_2),\ x_6 = i\bar{u}_1,\ x_7 = i\bar{u}_2 \tag{6}$$

ansetzen kann.

Für die Funktionalmatrix $\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\|$ der Fläche (6) ergibt sich

$$\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\| = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{x}_1^*, & \mathfrak{x}_2^*, & \mathfrak{x}_{11}^*, & \mathfrak{x}_{12}^*, & \mathfrak{x}_{22}^* \\ i, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & i, & 0, & 0, & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

wenn wir 5-komponentige Vektoren zum Unterschied gegenüber 7-komponentigen mit Sternen * versehen.

Besitzt die Matrix $\|\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*\|$ den Rang fünf, so besitzt auch die Matrix $\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\|$ den Rang fünf. Dies bedeutet:

Jeder euklidischen Fläche eines R_5 mit fünfdimensionalem nichtausgeartetem Schmiegraum entspricht eine totalisotrope Darstellungsfläche eines R_7 mit nicht ausgeartetem fünfdimensionalen Schmiegraum.

Weniger trivial erscheint die Umkehrung:

Jede „W-Projektion" einer totalisotropen Fläche eines komplexen R_7 mit fünfdimensionalem nicht ausgearteten Schmiegraum auf einen beliebigen Koordinaten-R_5 ist eine euklidische Fläche dieses R_5 mit fünfdimensionalem nicht ausgearteten Schmiegraum!

Beweis. $\mathfrak{x}(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ sei eine totalisotrope Fläche in R_7 mit fünf-

[3]) vgl. den Begriff der „superficie figurative" (del problema di deformazione assegnato) bei E. Bompiani, Geometrie riemanniane di specie superiore, Reale Accademia D'Italia, 6, (1935), Capitolo V, 315 ff.

dimensionalem Schmiegraum,[4]) $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ seien zwei beliebige (konstante) Hilfsvektoren, G und G^* mögen die Gramschen Determinanten

$$G = G(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{11}^2, & \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{12}, & \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{22} \\ \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_{11}, & \mathfrak{x}_{12}^2, & \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_{22} \\ \mathfrak{x}_{22}\mathfrak{x}_{11}, & \mathfrak{x}_{22}\mathfrak{x}_{11}, & \mathfrak{x}_{22}^2 \end{vmatrix},$$

$$G^* = G^*(\mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*) = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{11}^{*2}, & \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{12}^*, & \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{22}^* \\ \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{12}^*, & \mathfrak{x}_{12}^{*2}, & \mathfrak{x}_{12}^*\mathfrak{x}_{22}^* \\ \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{22}^*, & \mathfrak{x}_{12}^*\mathfrak{x}_{22}^*, & \mathfrak{x}_{22}^{*2} \end{vmatrix}$$

bezeichnen. Dann gilt nach Voraussetzung[5])

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{x}_\beta &\equiv \mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{x}_{\beta\gamma} \equiv 0, \quad (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})^2 \equiv \\ &\equiv G \,.\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1\mathfrak{v}, & \mathfrak{x}_1\mathfrak{w} \\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{v}, & \mathfrak{x}_2\mathfrak{w} \end{vmatrix} \not\equiv 0, \quad \{u_1, u_2, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}\} \end{aligned} \tag{8}$$

somit also, da $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{v})(\mathfrak{x}_2\mathfrak{w}) = (\mathfrak{x}_1\mathfrak{w})(\mathfrak{x}_2\mathfrak{v})$ nicht identisch in $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ verschwindet

$$G \equiv G(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) \not\equiv 0, \quad \{u_1, u_2\}. \tag{9}$$

Für die euklidische W-Projektion $\mathfrak{x}^*$ gilt nach (6)

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1^{*2} \overset{(5)}{\equiv} g_{11}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \equiv 1, \quad \mathfrak{x}_1^*\mathfrak{x}_2^* \overset{(5)}{\equiv} g_{12}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \equiv 0, \quad \mathfrak{x}_2^{*2} \overset{(5)}{\equiv} g_{22}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \equiv 1, \\ \mathfrak{x}_\alpha^*\mathfrak{x}_{\beta\gamma}^* \equiv 0, \quad \{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Damit erhält man für das Determinantenquadrat $(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*)^2$ der Projektionsfläche $\mathfrak{x}^*$ in R_5 mit Rücksicht auf (7) und (8)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*)^2 \equiv \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} . \, G^*(\mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*) = \\ = G^* = G(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) \not\equiv 0 \quad \{u_1, u_2\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Vektoren $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*$ sind also linear unabhängig und der Schmiegraum, welchen sie aufspannen, fünfdimensional.

Nach dem Vorhergehenden lassen sich somit alle euklidischen Flächen des R_5 als „euklidische Komponenten" totalisotroper Flächen in R_7 auffassen. Die Existenz solcher abwickelbarer Flächen in R_5 mit fünfdimensionalem Schmiegraum und diejenige totalisotroper Flächen in R_7 mit fünfdimensionalem Schmiegraum bedingen einander wechselseitig.

Man erhält auf diese Weise neue Klassen abwickelbarer

[4]) Die Existenz solcher Flächen belegen im folgenden z. B. die Flächen (15), (39) und (60); vgl. M. Pinl, Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen, Compositio mathematica (5), (1938), 208—238.

[5]) vgl. z. B. J. Lense, M. Z. 34, (1932), 721—736, insbesondere 722, 723, 728.

Flächen des R_5, die weder Torsen (mit dreidimensionalem Schmiegraum) noch Regelflächen, noch Schiebflächen (mit vierdimensionalem Schmiegraum) darstellen, obwohl ihre Gauss'sche Krümmung identisch verschwindet.

Um die Fruchtbarkeit dieser Methoden zur Untersuchung der Flächen in höheren euklidischen Räumen zu demonstrieren, untersuchen wir im Folgenden die sgn. „Hauptkurvennetze" auf einigen euklidischen Komponenten in R_5 totalisotroper Flächen in R_7. Dazu betrachten wir zunächst eine allgemeine Kurve auf einer Fläche des R_5. Die Grenzlage der Tangentialebenen an die Fläche in zwei benachbarten Kurvenpunkten bestimmt im allgemeinen einen vierdimensionalen linearen Raum, den sgn. Bitangentenraum.[6]) Für gewisse ausgezeichnete Richtungen erscheinen die Bitangentenräume der Fläche als „Tritangentenräume", d. h. bestimmt durch die Grenzlage dreier benachbarter Tangentialebenen.[7]) Die Flächenkurven mit diesen ausgezeichneten Richtungen bilden das sgn. Hauptkurvennetz. Bestimmt man die Koeffizienten C^{*pq}_{rst}, C^{*p}_{rst} aus den für die dritten Ableitungen $\mathfrak{x}^*_{rst}$ der Fläche $\mathfrak{x}^*$ in R_5 bestehenden Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{x}^*_{rst} = C^{*pq}_{rst}\,\mathfrak{x}^*_{pq} + C^{*p}_{rst}\,\mathfrak{x}^*_{p}, \quad (p, q, r, s, t = 1, 2), \tag{12}$$

so bestimmen sich die Hauptkurven auf $\mathfrak{x}^*$ aus der Differentialgleichung fünften Grades[8])

$$A\,\mathrm{d}\bar{u}_1^5 + B\,\mathrm{d}\bar{u}_1^4\,\mathrm{d}\bar{u}_2 + C\,\mathrm{d}\bar{u}_1^3\,\mathrm{d}\bar{u}_2^2 + D\,\mathrm{d}\bar{u}_1^2\,\mathrm{d}\bar{u}_2^3 + {} \\ {} + E\,\mathrm{d}\bar{u}_1\,\mathrm{d}\bar{u}_2^4 + F\,\mathrm{d}\bar{u}_2^5 = 0, \tag{13}$$

deren Koeffizienten A, B, C, D, E, F aus C^{*pq}_{rst} gemäß der Relationen[9])

$$\begin{aligned} A &= C^{*22}_{111}, \; B = 3C^{*22}_{112} - 2C^{*12}_{111}, \; C = C^{*11}_{111} - 6C^{*12}_{112} + 3C^{*22}_{122} \\ F &= C^{*11}_{222}, \; E = 3C^{*11}_{122} - 2C^{*12}_{222}, \; D = C^{*22}_{222} - 6C^{*12}_{122} + 3C^{*11}_{112} \end{aligned} \tag{14}$$

gebildet werden. Es handelt sich also im allgemeinen um fünffache Kurvennetze. Ein besonderer Fall liegt vor, wenn die Bitangentenräume längs jeder Kurve einer einparametrigen Schar auf der Fläche zusammenfallen. Dann sind diese Kurven notwendig Hauptkurven und bestehen nach einem Satz von E. Bompiani[10]) entweder aus einer Schar ebener Kurven oder verlaufen in den dreidimensionalen Schmiegräumen einer allgemeinen Raumkurve, die also im allgemeinen in R_5 eine Hypertorse einhüllen. Im

[6]) vgl. [2]) insbesondere 412.
[7]) vgl. [2]) insbesondere 413.
[8]) vgl. [2]) insbesondere 419.
[9]) vgl. [2]) insbesondere 419.
[10]) vgl. [2]) insbesondere 416.

zweiten Falle wird man unmittelbar auf eine Methode geführt,[11]) Flächen mit einem dreifachen Hauptkurvennetz mit festen Bitangentenräumen zu konstruieren. Darüber hinaus hat sich aus den Untersuchungen von G. Bol[12]) auch eine Fläche mit einem fünffachen derartigen Hauptkurvennetz ergeben.

Im Folgenden wollen wir nun einen Beitrag zum ersten Fall von Flächen mit ebenen Hauptkurven geben.

§ 6. *Euklidische Flächen in R_5 mit ebenem Hauptkurvennetz.*

Wir betrachten die totalisotrope Fläche $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ in R_7 mit den Komponentengleichungen

$$x_1 = \frac{1}{2}(u_1 + 2iu_1u_2^2), \quad x_3 = \frac{1}{2}(u_2 + 2iu_1^2u_2),$$
$$x_5 = \pm i\sqrt{2i}\,u_1u_2,$$
$$x_2 = \frac{1}{2i}(u_1 - 2iu_1u_2^2), \quad x_4 = \frac{1}{2i}(u_2 - 2iu_1^2u_2),$$
$$x_6 = \frac{1}{2i}(u_1^2 + iu_2^2), \qquad (i = \sqrt{-1}). \qquad (15)$$
$$x_7 = \frac{\pm i}{2}(u_2^2 + iu_1^2),$$

Für die Matrizen $\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\|$, $\|\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\|$, $\|\mathfrak{x}_{111}, \mathfrak{x}_{112}, \mathfrak{x}_{122}, \mathfrak{x}_{222}\|$ aus den ersten, zweiten und dritten Ableitungen ergibt sich nach (15)

$$\left\|\begin{matrix}\mathfrak{x}_1\\ \mathfrak{x}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{2}(1+2iu_2^2), & \frac{1}{2i}(1-2iu_2^2), & 2iu_1u_2, & -2u_1u_2, & \pm i\sqrt{2i}\,u_2, & -iu_1, & \mp u_1 \\ 2iu_1u_2, & -2u_1u_2, & \frac{1}{2}(1+2iu_1^2), & \frac{1}{2i}(1-2iu_1^2), & \pm i\sqrt{2i}\,u_1, & u_2, & \pm iu_2 \end{matrix}\right\| \qquad (16)$$

$$\left\|\begin{matrix}\mathfrak{x}_{11}\\ \mathfrak{x}_{12}\\ \mathfrak{x}_{22}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0, & 0, & 2iu_2, & -2u_2, & 0, & -i, & \mp 1 \\ 2iu_2, & -2u_2, & 2iu_1, & -2u_1, & \pm i\sqrt{2i}, & 0, & 0 \\ 2iu_1, & -2u_1, & 0, & 0, & 0, & 1, & \pm i \end{matrix}\right\| \qquad (17)$$

---

[11]) vgl. [2]) insbesondere 417.

[12]) vgl. G. Bol, Hamburger Abh. 11 (1936), 387—393; W. Blaschke, Hamburger Abh. 9 (1933), 313—317; [2]) insbesondere 417.

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{x}_{111} \\ \mathfrak{x}_{112} \\ \mathfrak{x}_{122} \\ \mathfrak{x}_{222} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2i, & -2, & 0, & 0, & 0 \\ 2i, & -2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{matrix} \right\| . \tag{18}$$

Aus (16) und (17) folgt

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta \equiv 0,\ g_{1111} \equiv g_{1112} \equiv g_{1222} \equiv g_{2222} \equiv 0,\ g_{1122} \equiv -2i,$$
$$(g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \mathfrak{x}_{\alpha\beta} \mathfrak{x}_{\gamma\delta}),\ G(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) \equiv -8i \neq 0. \tag{19}$$

Demnach ist $\mathfrak{x}$ totalisotrop ($g_{\alpha\beta} \equiv 0$) und trägt fünfdimensionale Schmiegräume ($G \neq 0$).

Die biquadratische Grundform

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, du^\delta \equiv 12i\, du_1^2\, du_2^2 \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \tag{20}$$

reduziert sich auf das Quadrat einer quadratischen Form mit konstanten Koeffizienten. Es liegt also eine Minkowskische totalisotrope Fläche vor.[13]) Die Nullinien der Form (20) bilden auf der Fläche ein ebenes, zweifaches und zweifach isotropes Kurvennetz ($\mathfrak{x}_\alpha^2 \equiv \mathfrak{x}_{\alpha\alpha}^2 \equiv 0$, $\mathfrak{x}_{\alpha\alpha\alpha} \equiv 0$, $\alpha = 1, 2$).[14])

Als Koordinatenraum der W-Projektion $\mathfrak{x}^*$ der Fläche $\mathfrak{x}$ wählen wir den R_5 der $x_1, x_2, \ldots, x_5$.[15]) Für die „Determinante der Projektion" erhalten wir aus (16)

$$\begin{vmatrix} -iu_1, & \mp u_1 \\ u_2, & \pm iu_2 \end{vmatrix} = \pm 2u_1u_2 \not\equiv 0. \tag{21}$$

Dann lauten die Gleichungen der Projektionsfläche $\mathfrak{x}^*$ in den ursprünglichen „isotropen" Parametern

$$x_1^* = \frac{1}{2}(u_1 + 2iu_1u_2^2),\quad x_3^* = \frac{1}{2}(u_2 + 2iu_1^2u_2),$$
$$x_5^* = \pm i\sqrt{2iu_1u_2}$$
$$x_2^* = \frac{1}{2i}(u_1 - 2iu_1u_2^2),\quad x_4^* = \frac{1}{2i}(u_2 - 2iu_1^2u_2), \tag{22}$$

Für die quadratischen Fundamentalkomponenten $\overset{(5)}{g}_{\alpha\beta}$ der Projektionsfläche $\mathfrak{x}^*$ bekommen wir:

$$\mathfrak{x}_1^{*2} \equiv \overset{(5)}{g}_{11}(u_1, u_2) \equiv 0,\ \mathfrak{x}_1^*\mathfrak{x}_2^* \equiv \overset{(5)}{g}_{12}(u_1, u_2) \equiv -2iu_1u_2,\ \mathfrak{x}_2^{*2} \equiv \overset{(5)}{g}_{22}(u_1, u_2) \equiv 0. \tag{23}$$

---

[13]) vgl. L. Berwald, Journ. f. Math. **156** (1927), 191—222, insbesondere 208.

[14]) vgl, M. Pinl, Proceedings Amsterdam **35** (1932), 1181—1188, insbesondere 1183.

[15]) bei dieser Wahl, die wegen (21) erlaubt ist, sind u_1 und u_2 auch auf $\mathfrak{x}^*$ isotrope Parameter.

ür die zweiten und dritten Ableitungen $\mathfrak{x}^*_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{x}^*_{\alpha\beta\gamma}$ ergibt sich

$$\mathfrak{x}^{*2}_{11} = \mathfrak{x}^*_{11}\mathfrak{x}^*_{12} = \mathfrak{x}^*_{11}\mathfrak{x}^*_{22} = 0, \ \mathfrak{x}^{*2}_{12} = -2i, \ \mathfrak{x}^*_{12}\mathfrak{x}^*_{22} = \mathfrak{x}^{*2}_{22} = 0,$$
$$\mathfrak{x}^*_{111} = \mathfrak{x}^*_{222} = 0. \tag{24}$$

Ersetzen wir die Parameter u_1, u_2 in (22) durch orthogonale $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ vermöge der Transformation

$$\bar{u}_1 = -\frac{1}{2}(u_1^2 + iu_2^2), \ \bar{u}_2 = \pm\frac{1}{2}(u_2^2 + iu_1^2),$$
$$\frac{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \mp 2u_1u_2 \neq 0, \tag{25}$$

so entsteht aus (23)

$$\overset{(5)}{g}_{kl} = \overset{(5)}{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_k}\frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_l} = \bar{\delta}_{kl} = \begin{cases}1, & k = l\\ 0, & k \neq l\end{cases}, \quad \alpha, \beta, k, l = 1, 2. \tag{26}$$

Somit ist $\mathfrak{x}^*$ abwickelbar euklidisch und der von den Vektoren $\mathfrak{x}^*_1, \mathfrak{x}^*_2, \mathfrak{x}^*_{11}, \mathfrak{x}^*_{12}, \mathfrak{x}^*_{22}$ aufgespannte Schmiegraum infolge des parameterrelativinvarianten Verhaltens der Gramschen Determinanten G und G^* fünfdimensional. Wir bemerken noch: der Schnitt der Fläche $\mathfrak{x}^*$ mit der einparametrigen R_4 — Schar $x_5^* = \text{const.}$ ist die ebene Kurvenschar $u_1 \,.\, u_2 = c$, deren Vektorgleichung

$$\mathfrak{y}^*(u_1, c) = \left\{\frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{2ic^2}{u_1}\right), \frac{1}{2i}\left(u_1 - \frac{2ic^2}{u_1}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{c}{u_1} + 2icu_1\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2i}\left(\frac{c}{u_1} - 2icu_1\right), \ \pm ic\sqrt{2i}\right\} \tag{27}$$

gegeben ist. Für die ersten drei Ableitungen des Kurvenvektors $\mathfrak{y}^*$ erhält man:

$$\mathfrak{y}^{*\prime 2} = -\frac{4ic^2}{u_1^2}, \ \mathfrak{y}^{\prime\prime 2} = 0, \ \mathfrak{y}^{\prime\prime\prime} = -\frac{3}{u_1}\mathfrak{y}^{\prime\prime}. \tag{28}$$

Überdies gilt:

$$\mathfrak{y}^{*2} = 2ic^2. \tag{29}$$

Es handelt sich also für $c \neq 0$ um eine einparametrige Schar ebener hypersphärischer Kurven mit isotroper Hauptnormale, für $c = 0$ um das isotrope Geradenpaar $\mathfrak{x}^*(u_1, 0)$, $\mathfrak{x}^*(0, u_2)$.[16])

Nunmehr betrachten wir die Ableitungsgleichungen (12) in unserem Sonderfall (22). Zufolge (24) verschwinden von vornherein

$$C^{*pq}_{111} = C^{*pq}_{222} = C^{*p}_{111} = C^{*p}_{222}, \quad p, q = 1, 2. \tag{30}$$

---

[16]) für $\mathfrak{x}^*(u_1, 0)$ ergibt sich aus (15) $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, für $\mathfrak{x}^*(0, u_2)$ analog $x_3^2 + x_4^2 = 0$, $x_1 = x_2 = x_5 = 0$.

Somit verbleiben die beiden Relationen

$$\mathfrak{x}^*_{112} = C^{*pq}_{112}\mathfrak{x}^*_{pq} + C^{*p}_{112}\mathfrak{x}^*_p, \; \mathfrak{x}^*_{122} = C^{*pq}_{122}\mathfrak{x}^*_{pq} + C^{*p}_{122}\mathfrak{x}^*_p. \quad p, q = 1, 2. \tag{31}$$

Wir multiplizieren skalar mit $\mathfrak{x}^*_{11}, \mathfrak{x}^*_{12}, \mathfrak{x}^*_{22}$ und erhalten mit Rücksicht auf (23) und (24):

$$2iu_2C^{*2}_{112} = 0, \; -2iC^{*12}_{112} = 0, \; 2iu_1C^{*1}_{112} = 0 \text{ bzw. } 2iu_2C^{*2}_{122} = 0,$$
$$-2iC^{*12}_{122} = 0, \; 2iu_1C^{*1}_{122} = 0. \tag{32}$$

Somit verschwinden überdies:

$$C^{*1}_{112} = C^{*2}_{112} = C^{*1}_{122} = C^{*2}_{122} = C^{*12}_{112} = C^{*12}_{122} = 0. \tag{33}$$

Multiplizieren wir skalar mit $\mathfrak{x}^*_1$ bzw. $\mathfrak{x}^*_2$, so entsteht

$$2iu_1C^{*22}_{112} = 0, \; 2iu_2C^{*11}_{112} = 2i \text{ bzw. } 2iu_1C^{*22}_{122} = 2i, \; 2iu_2C^{*11}_{122} = 0, \tag{34}$$

also

$$C^{*11}_{112} = \frac{1}{u_2}, \; C^{*22}_{112} = 0, \; C^{*11}_{122} = 0, \; C^{*22}_{122} = \frac{1}{u_1}. \tag{35}$$

Nach (30), (33) und (35) reduzieren sich demnach die Koeffizienten (14) auf die speziellen Werte

$$A = F = B = E = 0, \; C = \frac{3}{u_1}, \; D = \frac{3}{u_2} \tag{36}$$

und die Differentialgleichung (13) der Hauptkurven der Fläche $\mathfrak{x}^*$ lautet:

$$\mathrm{d}u_1^2\,\mathrm{d}u_2^2\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} + \frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\right) = 0 \tag{37}$$

mit den Integralen

$$u_1 = c_1, \; u_2 = c_2, \; u_1u_2 = c, \quad (c_1, c_2, c \text{ beliebige Konstante}). \tag{38}$$

Mit Rücksicht auf (19), (20), (23), (24), (26), (29), (37) und (38) haben wir so das Resultat erhalten:

Die W-Projektion (22) der totalisotropen Fläche (15), deren biquadratische Fundamentalform durch das Quadrat einer quadratischen Differentialform geben ist (mit konstanten Koeffizienten), ist eine abwickelbar euklidische Fläche in R_5 mit fünfdimensionalem Schmiegraum und dreifachem Hauptkurvennetz. Sämtliche Hauptkurven sind ebene Kurven. Zwei der drei Hauptkurvenscharen bestehen aus ebenen zweifach isotropen Kurven, die dritte für $c \neq 0$ aus ebenen hypersphärischen Kurven mit isotroper Hauptnormale, für $c = 0$ aus einem isotropen Geradenpaar.[17])

[17]) vgl. [16]).

§ 7. *Allgemeinere Fälle.*

Die totalisotrope Fläche (15) ist ein Vertreter des speziellsten Typus totalisotroper Flächen in R_7 mit fünfdimensionalem Schmiegraum, dessen biquadratische Grundform F zwei invarianten Bedingungen genügt: Verschwinden der Diskriminante Θ_3 und Proportionalität zur Hesseschen Kovariante H:

$$\Theta_3 = \Theta_2^2 - \tfrac{1}{6}\Theta_1^3 \equiv 0, \quad \Theta_2 H - \Theta_1 F \equiv 0.$$

Läßt man die zweite dieser Bedingungen fallen und beschränkt sich auf totalisotrope Flächen mit verschwindender Diskriminante, so ergeben sich W-Projektionen allgemeineren Charakters, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 = \frac{1}{2}(u_2 - u_1^2 u_2), \quad x_3 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2), \\ & x_2 = \frac{1}{2i}(u_2 + u_1^2 u_2), \quad x_4 = \frac{1}{2i}(2u_1 u_2 + u_2^2\sqrt{2}), \quad x_5 = \pm\sqrt{2}\,u_1 u_2 \pm \frac{u_2^2}{2}, \\ & x_6 = \left(u_1 - \frac{u_1^3}{3} - u_1 u_2^2\right)\frac{1}{2}, \\ & x_7 = \frac{1}{2i}\left(u_1 + \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2\right). \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Auf dieser Fläche $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ des R_7 gilt, wie man analog (16), (17), (18) durch Berechnung der Elemente der Matrizen $\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\|$, $\|\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\|$, $\|\mathfrak{x}_{111}, \mathfrak{x}_{112}, \mathfrak{x}_{122}, \mathfrak{x}_{222}\|$ erkennt:

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta \equiv 0, \; g_{1111} \equiv 1, \; g_{1112} \equiv 0, \; g_{1122} \equiv 1, \; g_{1222} \equiv 0, \; g_{2222} \equiv 0,$$
$$(g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \mathfrak{x}_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_{\gamma\delta}), \; G(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) \equiv -1. \quad (40)$$

Demnach ist $\mathfrak{x}$ totalisotrop ($g_{\alpha\beta} \equiv 0$) und trägt fünfdimensionale Schmiegräume ($G \not\equiv 0$). Die biquadratische Grundform

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, du^\delta \equiv du_1^2\,(du_1^2 + du_2^2), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (41)$$

reduziert sich auf das Produkt zweier quadratischer Formen konstanter Koeffizienten, ihre Diskriminante verschwindet.[18]) Es liegt also eine Minkowskische totalisotrope Fläche vor.[19])

Als Koordinatenraum der W-Projektion $\mathfrak{x}^*$ der Fläche $\mathfrak{x}$ wählen wir den R_5 der $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Für die „Determinante der

---

[18]) man erhält $\Theta_2 = 6 \begin{vmatrix} g_{1111}, & g_{1112}, & g_{1122} \\ g_{1112}, & g_{1122}, & g_{1222} \\ g_{1122}, & g_{1222}, & g_{2222} \end{vmatrix} = -6, \; \Theta_1 = 2\,(g_{1111}g_{2222} -$
$- 4g_{1112}g_{1222} + 3g^2_{1122}) = 6, \; \Theta_3 = \Theta_2^2 - \tfrac{1}{6}\Theta_1^3 = 0,$

vgl. z. B. R. Weitzenböck, Invariantentheorie, § 11, S. 54, Groningen (1923).

[19]) vgl. [13]).

Projektion“ erhalten wir aus $\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\|$:

$$\left|\frac{\partial x_6}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_7}{\partial u_\alpha}\right| = \left|\begin{matrix} \frac{1}{2}(1-u_1^2-u_2^2), & \frac{1}{2i}(1+u_1^2+u_2^2) \\ -u_1u_2, & -iu_1u_2 \end{matrix}\right| =$$

$$= -iu_1u_2(u_1^2+u_2^2) \neq 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{42}$$

Somit lauten die Gleichungen der Projektionsfläche $\mathfrak{x}^*$ in den ursprünglichen Parametern:

$$\left.\begin{matrix} x_1^* = \frac{1}{2}(u_2 - u_1^2u_2), \; x_3^* = \frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2), \\ x_2^* = \frac{1}{2i}(u_2+u_1^2u_2), \; x_4^* = \frac{1}{2i}(2u_1u_2 + u_2^2\sqrt{2}), \end{matrix} \quad x_5^* = \pm\sqrt{2}u_1u_2 \pm \frac{u_2^2}{2}.\right\} \tag{43}$$

Für die quadratischen Fundamentalkomponenten $\overset{(5)}{g}_{\alpha\beta}$ der Projektionsfläche $\mathfrak{x}^*$ bekommen wir:

$$\overset{(5)}{g}_{11} \equiv u_1^2 + u_2^2, \; \overset{(5)}{g}_{12} \equiv u_1u_2, \; \overset{(5)}{g}_{22} \equiv 0. \tag{44}$$

Für die zweiten und dritten Ableitungen $\mathfrak{x}^*_{\alpha\beta}, \mathfrak{x}^*_{\alpha\beta\gamma}$ ergibt sich:

$$\begin{matrix} \mathfrak{x}_{11}^{*2} \equiv 1, \; \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{11}^* \equiv 0, \; \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{22}^* \equiv \mathfrak{x}_{12}^{*2} \equiv 1, \; \mathfrak{x}_{12}^*\mathfrak{x}_{22}^* \equiv 0, \; \mathfrak{x}_{11}^{*2} \equiv 0. \\ \mathfrak{x}_{111}^* \equiv \mathfrak{x}_{112}^* \equiv \mathfrak{x}_{222}^* \equiv 0. \end{matrix} \tag{45}$$

Die Projektionsfläche ist euklidisch abwickelbar, wie das Verhalten von $\overset{(5)}{g}_{\alpha\beta}$ in orthogonalen Parametern zeigt.[20]) Ferner ist der von den Vektoren $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*$ aufgespannte Schmiegraum fünfdimensional ($G^* \neq 0$). Nunmehr betrachten wir die Ableitungsgleichungen (12) für den Spezialfall (43). Wegen (45) verschwinden von vornherein:

$$C_{111}^{*pq} \equiv C_{122}^{*pq} \equiv C_{222}^{*pq} \equiv C_{111}^{*p} \equiv C_{122}^{*p} \equiv C_{222}^{*p} \equiv 0, \quad p, q = 1, 2. \tag{46}$$

Somit verbleibt die Relation:

$$\mathfrak{x}_{112}^* = C_{112}^{*pq}\mathfrak{x}_{pq}^* + C_{112}^{*p}\mathfrak{x}_p^*, \qquad p, q = 1, 2. \tag{47}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten C_{112}^{*pq} und C_{112}^{*p} multiplizieren

---

[20]) setzen wir $\bar{u}_1 = \frac{1}{2i}\left(u_1 - \frac{u_1^3}{3} - u_1u_2^2\right), \; \bar{u}_2 = -\frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{u_1^3}{3} + u_1u_2^2\right)$,

$$\frac{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\partial(u_1, u_2)} = -iu_1u_2 \neq 0,$$

so entsteht aus (44):

$$\overset{(5)}{\bar{g}}_{kl} = \overset{(5)}{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_k}\frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_l} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, k = l \\ 0, k \neq l \end{cases}, \quad k, l, \alpha, \beta = 1, 2.$$

wir skalar mit $\mathfrak{x}^*_{11}, \mathfrak{x}^*_{12}, \mathfrak{x}^*_{22}, \mathfrak{x}^*_1, \mathfrak{x}^*_2$ und erhalten mit Rücksicht auf (44), (45) (und weitere aus diesen durch Differentiation hervorgehende Identitäten)

$$\mathfrak{x}^*_{112}\mathfrak{x}^*_{11} = C^{*11}_{112}.1 + C^{*12}_{112}.0 + C^{*22}_{112}.1 + C^{*1}_{112}u_1 + C^{*2}_{112}.0 = 0, \tag{48}$$

$$\mathfrak{x}^*_{112}\mathfrak{x}^*_{12} = C^{*11}_{112}.0 + C^{*12}_{112}.1 + C^{*22}_{112}.0 + C^{*1}_{112}u_2 + C^{*2}_{112}.0 = 0, \tag{49}$$

$$\mathfrak{x}^*_{112}\mathfrak{x}^*_{22} = C^{*11}_{112}.1 + C^{*12}_{112}.0 + C^{*22}_{112}.0 + C^{*1}_{112}u_1 + C^{*2}_{112}.0 = 0, \tag{50}$$

$$\mathfrak{x}^*_{112}\mathfrak{x}^*_1 = C^{*11}_{112}.u_1 + C^{*12}_{112}.u_2 + C^{*22}_{112}.u_1 + C^{*1}_{112}\overset{(5)}{g_{11}} + C^{*2}_{112}.\overset{(5)}{g_{12}} = 0, \tag{51}$$

$$\mathfrak{x}^*_{112}\mathfrak{x}^*_2 = C^{*11}_{112}.0 + C^{*12}_{112}.0 + C^{*22}_{112}.0 + C^{*1}_{112}\overset{(5)}{g_{12}} + C^{*2}_{112}.0 = -1. \tag{52}$$

Subtrahieren wir (50) von (48), so folgt $C^{*22}_{112} = 0$. Für die restlichen Koeffizienten erhalten wir:

$$C^{*11}_{112} = \frac{1}{u_2},\ C^{*12}_{112} = \frac{1}{u_1},\ C^{*1}_{112} = -\frac{1}{u_1u_2},\ C^{*2}_{112} = \frac{1-u_1^2-u_2^2}{u_1^2u_2^2}. \tag{53}$$

Die Koeffizienten (14) erhalten in diesem Falle also die Werte:

$$A = B = F = E = 0,\ C = -\frac{6}{u_1},\quad D = \frac{3}{u_2}. \tag{54}$$

Somit reduziert sich die Differentialgleichung (13) der Hauptkurven für die Fläche (43) auf

$$3\,\mathrm{d}u_1^2\,\mathrm{d}u_2^2\left(\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2} - \frac{2\,\mathrm{d}u_1}{u_1}\right) = 0 \tag{55}$$

mit den Integralen

$$u_1 = c_1,\ u_2 = c_2,\ u_2 = c_3u_1^2,\quad (c_3 \neq 0). \tag{56}$$

Zwei Hauptkurvenscharen fallen also mit den ebenen Parameterkurven der Fläche zusammen ($\mathfrak{x}^*_{111} = \mathfrak{x}^*_{222} = 0$). Die dritte erhält die Vektordarstellung ($\varphi = c_3u_1^2$, $\varphi' = 2c_3u_1$, $\varphi'' = 2c_3$, $\varphi''' = 0$)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{y}^*(u_1) &= \mathfrak{x}^*(u_1, \varphi(u_1)),\ \mathfrak{y}^{*\prime} = \mathfrak{x}^*_1 + \mathfrak{x}^*_\varphi\varphi',\\
\mathfrak{y}^{*\prime\prime} &= \mathfrak{x}^*_{11} + 2\mathfrak{x}^*_{1\varphi}\varphi' + \mathfrak{x}^*_{\varphi\varphi}\varphi'^2 + \mathfrak{x}^*_\varphi\varphi'',\\
\mathfrak{y}^{*\prime\prime\prime} &= \mathfrak{x}^*_{111} + 3\mathfrak{x}^*_{11\varphi}\varphi' + 3\mathfrak{x}^*_{1\varphi}\varphi'' + 3\mathfrak{x}^*_{\varphi\varphi}\varphi'\varphi'',\\
\mathfrak{y}^{*\mathrm{IV}} &= 6\mathfrak{x}^*_{112}\varphi'' + 3\mathfrak{x}^*_{22}\varphi''^2,\ \mathfrak{y}^{*\mathrm{V}} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Da $\mathfrak{y}^{*\mathrm{V}}$ identisch verschwindet, liegen die Kurven dieser Schar höchstens in einem R_4. Andererseits folgt aus der Annahme

$$\lambda_1\mathfrak{y}^{*\prime} + \lambda_2\mathfrak{y}^{*\prime\prime} + \lambda_3\mathfrak{y}^{*\prime\prime\prime} + \lambda_4\mathfrak{y}^{*\mathrm{IV}} = 0,\ \{n_1\} \tag{58}$$

durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}^*_{112}$ bzw. $\mathfrak{x}^*_2$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \tag{59}$$

Die Kurvenschar $\mathfrak{y}^*(u_1, c_3)$ liegt also mindestens in einem R_4. Damit hat sich das Resultat ergeben:

Die W-Projektion (43) der totalisotropen Fläche (39), deren biquadratische Fundamentalform durch (41) gegeben ist (mit konstanten Koeffizienten und identisch verschwindender Diskriminante), ist eine abwickelbar euklidische Fläche in R_5 mit fünfdimensionalem Schmiegraum und dreifachem Hauptkurvennetz. Die Kurven zweier der drei Hauptkurvenscharen bestehen aus ebenen Kurven, diejenigen der dritten liegen in einem festen vierdimensionalen Raum.

Ein weiteres noch allgemeineres Beispiel erhalten wir durch W-Projektion der totalisotropen Fläche

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{2}\left(u_1 - \frac{4}{3}u_1^3 - 2u_1u_2^2\right), \quad x_2 = \frac{1}{2i}\left(u_1 + \frac{4}{3}u_1^3 + 2u_1u_2^2\right),\\
&x_3 = \frac{1}{2}(u_2 - 2u_1^2u_2 + u_2^3), \qquad x_4 = \frac{1}{2i}(u_2 + 2u_1^2u_2 - u_2^3),\\
&x_5 = \frac{1}{2}\left(\mp\sqrt{2}u_1^2 + 2u_1u_2 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}u_2^2\right), \quad x_6 = \mp iu_2^2,\\
&\qquad x_7 = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}u_1^2 + u_1u_2 \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}u_2^2,
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

mit den (konstanten) Fundamentalkomponenten

$$\begin{gathered}
g_{\alpha\beta} \equiv 0,\ g_{1111} \equiv 4,\ g_{1112} \equiv 0,\ g_{1122} \equiv 2,\ g_{1222} \equiv 0,\ g_{2222} \equiv -3,\\
\Theta_1 = 2(g_{1111}g_{2222} + 3g^2_{1122}) \equiv 0.
\end{gathered} \tag{61}$$

Hier handelt es sich um eine (Minkowskische) totalisotrope Fläche mit nichtverschwindender Diskriminante.[21]) Die Nullinien der Fundamentalform $g_{\alpha\beta\gamma\delta}\,du^\alpha\,du^\beta\,du^\gamma\,du^\delta$ liegen wegen $\Theta_1 \equiv 0$ äquianharmonisch. Wählt man den R_5 der $x_3, x_4, \ldots, x_7$ zum Koordinatenraum der W-Projektion $\mathfrak{x}^*$, so verschwinden die Ableitungen $\mathfrak{x}^*_{111}$ und $\mathfrak{x}^*_{122}$ identisch, desgleichen also die Koeffizienten C^{*pq}_{111} und C^{*pq}_{122} der Ableitungsgleichungen für $\mathfrak{x}^*_{112}$ und $\mathfrak{x}^*_{222}$. Mit C^{*22}_{111} verschwindet insbesondere wieder der Koeffizient A der Differentialgleichung der Hauptkurven, deren eine Schar also durch die ebenen Parameterkurven $u_2 =$ const gegeben ist ($\mathfrak{x}^*_{111} \equiv 0$). Eine genauere Untersuchung der übrigen Hauptkurvenscharen solcher äquianharmonischer Fälle muß ihrer rechnerischen Kompli-

[21]) man erhält $\Theta_1 \equiv 0$, $\Theta_2 = -192$, $\Theta_3 \neq 0$.

ziertheit wegen einer eigenen Bearbeitung vorbehalten bleiben. Dasselbe gilt auch für die aus dem R_8 und R_9 bekannten totalisotropen Flächen mit fünfdimensionalem Schmiegraum jedoch insgesamt oder teilweise identisch verschwindenden Invarianten der biquadratischen Grundform und ihre Verwertung für die Flächentheorie in R_4 und R_5 durch A- bzw. B-Projektionen.[22])

*

W-projekce totálně isotropních ploch. II.

(Obsah předešlého článku.)

W-projekce $\mathfrak{x}^*$ totálně isotropních ploch $\mathfrak{x}$ euklidovského prostoru R_7, t. j. integrálních ploch rovnice

$$\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \ldots + \mathrm{d}x_7^2 = 0$$

na libovolný R_5 jsou euklidovsky rozvinutelné plochy v tomto R_5. Nejsou-li oskulační prostory $S^*(\mathfrak{x}_\alpha^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*)$, odpovídající prvním a druhým derivacím $\mathfrak{x}_\alpha^*$, $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*$, v každém obecném bodě takové plochy $\mathfrak{x}^*$ degenerovány (t. j. neexistuje-li žádný lineární vztah mezi vektory $\mathfrak{x}_\alpha^*$, $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*$), platí totéž také pro oskulační prostory $S(\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{x}_{\alpha\beta})$ plochy $\mathfrak{x}$ a naopak. Z existence takových totálně isotropních ploch $\mathfrak{x}$ v R_7 vychází tedy jako příspěvek k teorii ploch v euklidovském R_5 existence euklidovsky rozvinutelných ploch s pětidimensionálními oskulačními prostory.

Jako takové W-projekce vycházejí speciálně euklidovsky rozvinutelné plochy v R_5 se systémem rovinných hlavních čar ve smyslu C. Segre-E. Bompianiho, mezi nimi jeden příklad rozvinutelné euklidovské plochy s hlavními čarami pouze rovinnými, které tvoří na ploše trojnásobnou síť.

---

[22]) vgl. [1]), insbesondere S. 96.