Josef Klíma

Poznámky k výkladu rotačních ploch druhého stupně na střední škole

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 4, 425--429

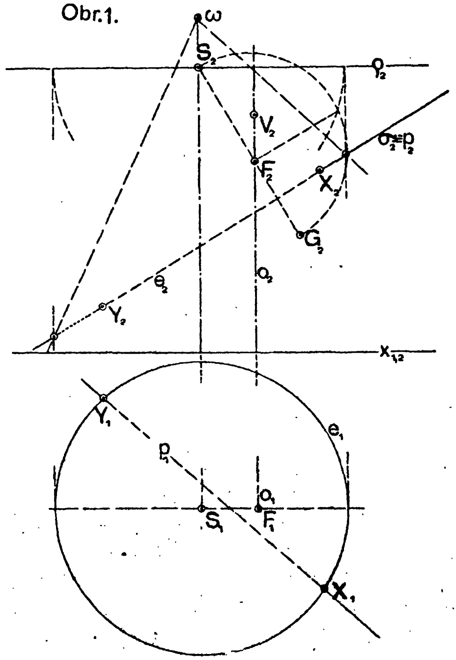
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121958

JOSEF KLÍMA:

Poznámky k výkladu rotačních ploch druhého stupně na střední škole.

Při odvozování vlastností rotačních ploch druhého stupně podává se mnohé žákům bez náležitého jim přístupného důkazu. V následujícím chci uvésti některé příslušné elementární důkazy.

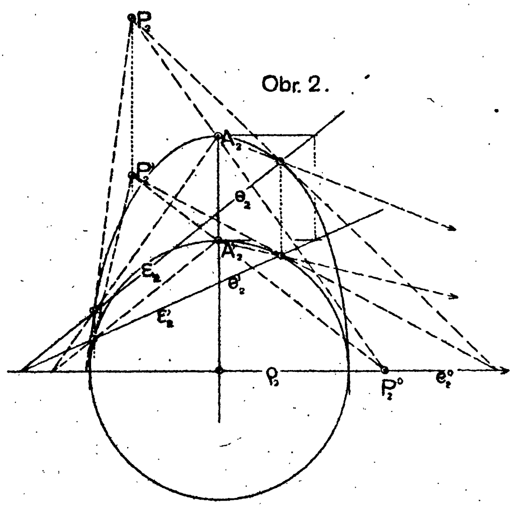
Obr. 1.



I. Vlastnost, že obecný rovinný řez rotačního paraboloidu promítá se do roviny kolmé k ose jako kružnice, lze následovně jednoduše dokázati.

Buď v obr. 1 dán rotační paraboloid o ose $o \perp \pi$, vrcholu V, ohnisku F a řídící rovině $\varrho \parallel \pi$. Má se stanoviti řez jeho s rovinou σ; již zvolme kolmou k nárysně, na kterýžto případ lze vždy úlohu tuto převésti, ať již třetí průmětnou neb otočením roviny řezu kol osy o. Při té příležitosti budiž podotknuto, že by se mělo více užívati otáčení kol osy rotační, než třetí průmětny, když bylo to tak v předchozích třídách cvičeno.

Body řezu e roviny σ s paraboloidem musí míti stejnou vzdálenost od ohniska F a od řídicí roviny ϱ, neb jsou body ty středy ploch kulových, které procházejí bodem F a dotýkají se roviny ϱ. Všechny tyto plochy kulové obsahují ještě druhý bod G, který je souměrný k ohnisku F, vzhledem k rovině σ. Dotyčné body těchto ploch kulových s rovinou řídicí ϱ jsou od průsečíku $S \equiv (FG, \varrho)$ vzdáleny o délku $r = \sqrt{\overline{SF} \,.\, \overline{SG}}$ a tudíž jsou na kružnici, jež je patrně kolmým



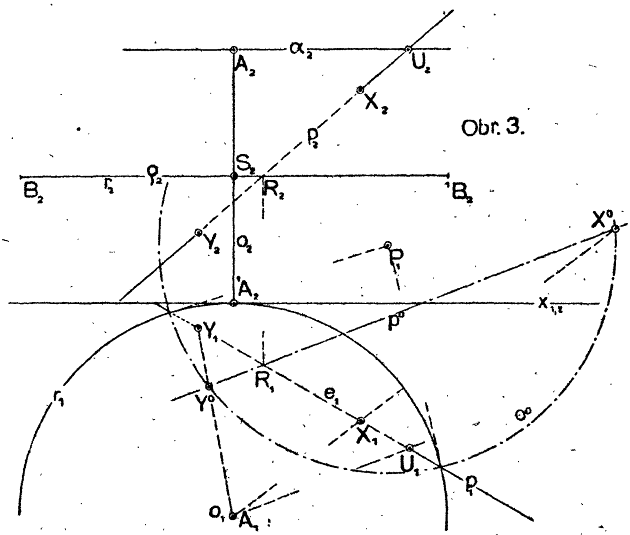
Obr. 2.

průmětem řezu e roviny σ s paraboloidem na řídicí rovinu ϱ. Je tedy řez roviny σ s paraboloidem elipsou e, ležící na rotační ploše válcové, kolmé k řídicí rovině ϱ, jejíž osa prochází průsečíkem roviny ϱ s kolmicí, spuštěnou s ohniska paraboloidu na rovinu řezu σ. Jak na základě toho určí se průsečíky X, Y přímky p s paraboloidem, patrno z obr. 1.

II. Abychom odvodili příslušné konstrukce pro rotační elipsoid a dvojdílný rotační hyperboloid, třeba před tím v VI. třídě vyvoditi hlavní vlastnosti stereografické projekce při ploše kulové. Tyto dokazují se rozmanitě, však jeden z nejjednodušších a pro střední školu výborně se hodící důkaz je od prof. K. Pelze na základě věty Dandelinovy v poslední jeho práci.*) Jsou-li známy tyto vlastnosti při ploše kulové, možno z nich pro rotační elipsoid vyvoditi podle

*) V pojednání »Die Hauptsätze der stereographischen Projection als Korollarien des Satzes von Quetelet und Dandelin« ve Věstníku české společnosti nauk v Praze, roč. 1908, čís. XXXI.

obr. 2 vlastnost, že všechny řezy rotačního elipsoidu promítají se z koncových bodů osy na roviny kolmé k ose jako kružnice, jichž středy jsou v průmětech pólů rovin řezů vzhledem k elipsoidu. Elipsoid rotační vejčitý neb sploštělý je afinní ke kulové ploše, mající rovník elipsoidu za hlavní kruh. Rovinou samodružnou je rovina ϱ rovníka, směr afinity je kolmý k této rovině a vrcholu A elipsoidu odpovídá na ploše kulové bod A'. Obecnému řezu e elipsoidu v rovině ε odpovídá na ploše kulové kružnice e' v rovině ε' afinní k rovině ε. Kružnice e' promítá se z bodu A' na rovinu ϱ do kružnice e^0, jejíž střed je v centr. průmětu P^0 pólu P' roviny ε' k ploše kulové z bodu A'. Promítací ploše kuželové $(A'e')$ odpovídá afinní



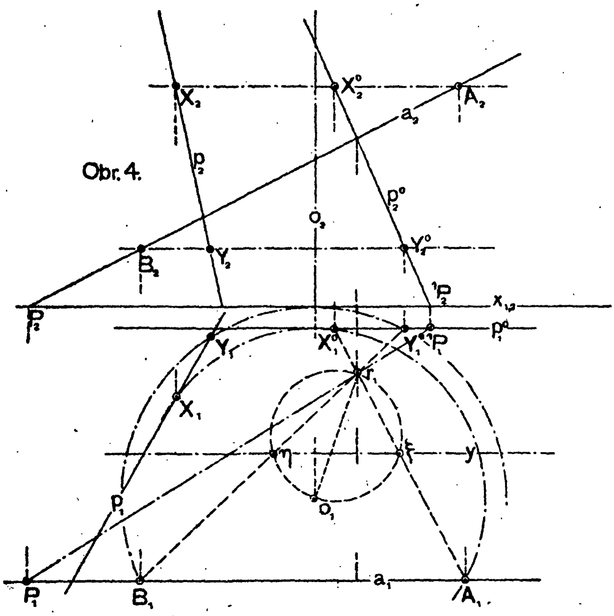
Obr. 3.

promítací kuželová plocha (Ae), jež má s prvou tutéž stopu e^0 na rovině samodružné ϱ. Pólu P' odpovídá pól P roviny ε k elipsoidu a centrální průmět pólu P z A je opět v P^0, středu kružnice e^0. Čímž dostáváme:

»Řezy elipsoidu rotačního promítají se z jeho vrcholů na roviny kolmé k ose jako kružnice, jichž středy jsou v průmětech pólů příslušných rovin k elipsoidu.«

Kdybychom chtěli platnost této věty vyvoditi též pro rotační dvojdílný hyperboloid a sice pro průměty z jeho vrcholů A, ^1A na rovinu kolmou k ose, třeba jen uvažovati tento jako plochu kolineární k ploše kulové opsané nad $\overline{A^1A}$ jako průměrem. Střed kolineace je v bodě A, rovina kolineace je tečná rovina v ^1A atd..

Věty této lze pak užíti, jak ukazuje obr. 3, k řešení úlohy, určiti průsečíky přímky obecné p s rotač. elipsoidem, daným v nárysu osami $\overline{A^1A}$ a $\overline{B^1B}$ hlavního poledníku. Přímkou p proložíme rovinu kolmou k rovině ϱ rovníka r, jež protíná elipsoid v elipse e. Tuto elipsu e promítneme i s přímkou p ze středu A do roviny ϱ rovníku. Průmět elipsy e je kružnice e^0, mající střed v pólu P roviny elipsy k elipsoidu a prochází průsečíky $(p_1 r_1)$. Přímka p promítá se do p^0, procházející stopníkem R přímky p na ϱ a je rovnoběžna s A_1U_1, je-li U průsečík přímky p s tečnou rovinou α k elipsoidu ve vrcholu A. Obdobně řešila by se úloha přímkou proložiti roviny tečné k ploše atd.



Obr. 4.

III. Žákům též, obyčejně bez důkazu, tvrdí se, že rotací přímky a kol osy o, s ní mimoběžné, vytvoří se rotační jednodílný hyperboloid. K důkazu, že meridiánem plochy té je hyperbola, třeba znáti konstrukci bodů hyperboly, známe-li její asymptoty a délku reálné osy, jež může se odvoditi z řezu roviny s kuželem rotačním. Možno ale též následovně ukázati, že plocha ta je druhého stupně a současně řešiti průsečíky plochy té s libovolnou přímkou p.

Budiž v obr. 4 dána rotační plocha osou $o \perp \pi$ a tvořící přímkou a, již předpokládejme rovnoběžnou s ν, do kteréžto polohy lze vždy otočením kol o ji převésti. Stanovme průsečíky této rotační plochy, již vytvoří přímka a rotací kol osy o, s libovolnou přímkou p. Otočme též p do polohy $p^0 \parallel \nu$. Bychom určili průsečíky přímky p^0 s plochou, třeba na přímkách p^0 a a stanoviti také body, by byly stejně vzdáleny od půdorysny a od osy o. Jestliže v nárysu sestrojíme libovolnou přímku $\overline{P_2{}^1P_2}$ rovnoběžnou s osou $x_{1,2}$, tu lze na základě úměrnosti úseček dokázati jednoduše, že půdorysy $\overline{P_1{}^1P_1}$ jdou týmž bodem r_1, který je na přímce, jdoucí průsečíkem $(a_2p_2{}^0)$ kolmo k ose $x_{1,2}$. Pás $p_1{}^0$, a_1 je půlen přímkou y, již protíná kružnice opsaná nad o_1r_1 jako průměrem v bodech ξ, η, jež spojeny s bodem r_1 dají na $p_1{}^0$, a_1 body A_1, $X_1{}^0$, resp. B_1, $Y_1{}^0$, jež jsou půdorysy bodů přímek p^0, a, ležící na týchže rovnoběžných kružnicích, protínajících p^0 i a. Kružnice ty protínají danou přímku p v hledaných průsečících X, Y. Vytvořená plocha je tedy druhého stupně a současně podána konstrukce průsečíků libovolné přímky s hyperboloidem tím, aniž rýsován meridián.

DROBNOSTI.

Nejdelší a nejkratší tětiva v kružnici. Jako jednoduchého příkladu na hledání extremních hodnot funkce užívám také důkazu věci sice samozřejmé, ale tím právě pro žáky názorné, že totiž průměr kružnice jest nejdelší tětivou v kružnici. Počet vede k vedlejšímu výsledku, od žáků sotva očekávanému. Vytkněme v kružnici o středu O a poloměru r vodorovný průměr a sestrojme k bodu A na kružnici souměrný bod A' podle tohoto průměru $(\overline{AA'} = a)$. Označme ostrý úhel sevřený vodorovným průměrem a poloměrem $\overline{AO}$ písmenem φ. Posunováním tětivy $\overline{AA'}$ přicházíme k názoru, že $a = f(\varphi)$. Jest pak $a = 2r \sin \varphi$, $a' = 2r \cos \varphi$. Pro extremní hodnoty tětivy a platí $2r \cos \varphi = 0$ čili $\cos \varphi = 0$, a tudíž $\varphi = 90^0$, 270^0 (do 360^0). Ježto $a'' = -2r \sin \varphi$, pro $\varphi = 90^0$ jest $a'' < 0$, čili a jest maximem $(a = 2r)$, pro $\varphi = 270^0$ jest $a'' > 0$, tudíž a minimem $(a = -2r)$. Z toho plyne paradoxní výsledek: Průměr jest nejen nejdelší tětivou v kružnici, ale také tětivou nejkratší, ovšem se zřetelem ke směru.

Prof. Josef Machač, Jilemnice.

Pošinutí u planparalelní desky. Na vodorovný list bílého papíru narýsuje se slabá, černá přímka a na ni položí kvádrová planparalelní deska tak, aby přímka byla kolmá k pobočné stěně. Opodál, v rovině této stěny, postaví se stativ přesně svisle, a připínacími hřebíčky připevní naň vodorovně úhloměr obloukem dolů. Na úhloměru vytkne se dvěma špendlíky úhel β (jeden špendlík jest ve středu úhloměru), který bude doplňkem úhlu dopadu α. Jedním ramenem úhlu β jest vodorovný vnitřní okraj úhloměru a druhým směr procházející oběma špendlíky. Nyní praktikant visíruje přesně směrem obou špendlíků, při čemž pohybuje papírem buď ke stativu, nebo od něho ve směru kolmém k narýsované přímce tak, aby oba kryjící se špendlíky, kolmo zabodnuté do stativu, splynuly s přímkou v desce. Průběh přímky v desce poznamená si na papíře tečkou. Změří pak vzdálenost e' tečky od přímky, i bude pošinutí