Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Emil Weyr

O promětnosti cyklické. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 4, 265--282

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121931

t. j. až jich volná elektřina nejde na kvadranty, t. j. až tyto mají potentiál kapek dopadajících.

Lampy, water dropping apparatus, jsou tedy přístroje, jež zachycují potentiál vzduchu. Proto nimi lze mnohé zajímavé pokusy prováděti.

Přibližujeme-li knoflík nabité láhve, dokážeme, že potentiálu ubývá se vzdáleností lineárně. Foukne-li se kouř doutníku na plamen lampy, vjedeme-li si prsty do vlasů, okamžitě to udává elektrometr.

Elektrometrem lze mimo to provésti rozličné velmi jemné pokusy, zelektrování turmalínu, křemene záhřevem, vápence tlakem.

Velmi zajímavý pokus učinil Thomson. Spojme každou elektrodu elektrometru s isolovanou lampičkou, a přiklopme jednu lesklým válcem z cinku, druhou válcem z mědi, a spojme tyto. Každý z válců má jistý potentiál, uvnitř každého válce jest však potentiál stálý. Proto přijme lampička jedna potentiál zinku, druhá potentiál mědi. Obrátí-li se přístroj, dá se vyloučiti vliv elektřin zevnějších. jakož i nestejnost vlivu elektrického při hoření lamp a lze takto změřiti potentiál při dotknutí *Zn* a *Cu* vzbuzený.

O promětnosti cyklické.

Sděluje **Emil Weyr.**

(Pokračování.)

18. „Dvě kollineárné roviny lze na nekonečně mnoho spůsobů tak na se vložiti, že tvoří cyklickou promětnost trojprvkovou“. *)

Buďtež $\varrho\varrho'$ kollineárné roviny, $M_\infty N'_\infty$ jich úběžné přímky a $M'N$ přímkám těm promětně přiřaděné přímky v ϱ' resp. v ϱ. Vložme nyní roviny $\varrho\varrho'$ na sebe. Úběžnému bodu m_∞

*) Srovnej H. S. Schröter „Ueber perspektivisch liegende Dreiecke“ a J. Rosanes. „Ueber Dreiecke in perspektivischer Lage.“ Mathem. Annalen, sv, II.

přímky M′, počítáme-li jej do útvaru ϱ (a tu leží m na M_∞) bude v ϱ' příslušeti jistý bod m' na M′; přičteme-li úběžný bod n'_∞ přímky N k útvaru ϱ' (a tu je na přímce N'_∞), bude mu v útvaru ϱ přiřaděn jistý bod n na N. Šineme-li nyní soumístné roviny $\varrho\varrho'$ rovnoběžně tak, že se přímky M′N do sebe pošinují a to tak daleko, až body m', n v průseku přímek M′N se spojí, pak máme polohu cyklickou. Neb předně sobě přísluší body $m_\infty n'_\infty$, jelikož m_∞ jest průsek přímek $M'N'_\infty$ a n'_∞ jest průsek přímek $M_\infty N$ oněm přidružených, tak že tedy bodům m_∞, n, n'_∞, přičítáme-li je k útvaru ϱ, přísluší body n, n'_∞, m_∞ roviny ϱ'. Z cykličnosti jedné trojiny plyne však cykličnosť všech trojin.

19. „Ze samodružných prvků cyklických trojprvkových rovin jest vždy jeden reálný a ostatní dva jsou imaginárné.“

Je známo, že jest z bodů samodružných dvou soumístných kollineárných rovin vždy aspoň jeden reálným, a právě tak jest aspoň jedna z přímek samodružných reálnou. (Viz: Zákl. vyš. geom. III. díl, čl. 58.) Jelikož reálná přímka samodružná sobě přísluší, bude každá trojina $x_1 x_2 x_3$, z jichž bodů jeden na přímce té se nalézá, celé přímce té náležeti; veškeré tyto trojiny na přímce samodružné reálné tvoří tudíž cyklickou přímou prométnost, která bude dle článku 8. míti dva pomyslné body dvojiné, které patrně jsou též samodružné pro prométnost v rovině. Jsou-li tedy pqr body samodružné, bude jeden, na př. r reálným, ostatní dva p, q jsou imaginárné. Samodružná přímka pq čili R jest reálná a přímky pr, qr, čili Q, P jsou pomyslné.

20. „Na každé straně trojúhelníku pqr objeví se bodová cyklická prométnost trojprvková, pro niž na straně té se nalézající vrcholy jsou body samodružnými. Na každém z vrcholů trojúhelníku toho objeví se paprsková cyklická prométnost trojprvková, pro niž vrcholem tím procházející strany trojúhelníku jsou paprsky samodružnými a kteráž tudíž s prométností na protější straně jest perspektivná.“

Vskutku, považujeme-li na příklad přímku $\overline{pq}$ za přímku Q_1, splývá s Q_2 a s Q_3; bodu x_1 libovolně na $\overline{pq}$ vytknutému odpovídá bod x_2 téže přímky a tomuto opět bod x_3 téže přímce náležející, kterému první bod x_1 co skupinu uzavírající jest přiřaděn. Body p, q co samodružné jsou každý sobě přiřaděn, čímž stvrzena první část věty. Právě tak shledáme za správnou druhou část; neb libovolnému paprsku X_1 bodem samodružným r procházejícímu musí přidružen býti paprsek X_2 týmž bodem procházející a tomuto opět bodem r procházející paprsek X_3 skupinu $X_1X_2X_3$ uzavírající; paprsky rp, rq co samodružné jsou pak dvojnými pro tuto cyklickou promětnost na bodě r, kterážto jest patrně perspektivná s promětností na protější přímce pq. Tyto promětnosti cyklické jsou dle článku 9. kubické involuce opatřené vždy dvěma prvky trojnými; trojné tyto prvky jsou páry vrcholů a stran trojúhelníku pqr (trojstranu PQR).

Z toho dále soudíme:

„Spojíme-li body všech trojin $x_1x_2x_3$ naší cyklické trojprvkové promětnosti v rovině ($\varrho\varrho'$) s libovolným vrcholem trojúhelníku pqr, tu obdržíme trojiny paprsků kubické involuce (cyklické promětnosti), v níž jsou strany trojúhelníku oným vrcholem procházející paprsky trojnými (samodružnými)."

„Strany všech trojin $x_1x_2x_3$ (t. j. tedy strany trojhranu $x_1x_2x_3$ neb $X_1X_2X_3$) protínají každou stranu trojúhelníku pqr v trojinách kubické involuce (cyklické promětnosti), v níž jsou vrcholy trojúhelníku pqr na straně té se nalezající body trojnými (samodružnými)."

Neb jest-li $x_1x_2x_3$ (resp. $X_1X_2X_3$) libovolná trojina v rovině ($\varrho\varrho'$) tvoří přímky $px_1px_2px_3$ (resp. body $PX_1PX_2PX_3$) trojinu sobě příslušných paprsků (resp. bodů), poněvadž bod p (paprsek P) sám sobě přísluší.

21. Každá trojina obsahuje tři body $x_1x_2x_3$ a tři paprsky $X_1X_2X_3$ oněm co strany v trojúhelníku protilehlé t. j. každá trojina tvoří trojúhelník neb trojstran, jehož body sobě prometně přísluší, a právě tak jeho strany. Nazveme-li trojúhelník pqr, jehož vrcholy a jehož strany PQR jsou prvky samodružnými, trojúhelníkem hlavním *), platí věta:

„Každý vrchol hlavního trojúhelníku jest pólem protější strany vzhledem ku všem trojinám."

Budiž $x_1x_2x_3$ libovolná trojina a p jeden z vrcholů hlavního trojúhelníku, P jeho protější strana. Přímky px_1, px_2, px_3 tvoří opět trojinu, z čehož plyne, že i průseky těchto přímek

*) Každý vrchol hlavního trojúhelníku představuje trojinu bodů a každá jeho strana představuje trojinu paprsků.

s přímkami x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 trojinu tvořiti musí **); průseky tyto nazveme m_1, m_2, m_3; tedy $m_1 \equiv (px_1, x_2x_3)$, $m_2 \equiv (px_2, x_3x_1)$, $m_3 \equiv (px_3, x_1x_2)$. Přímky m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1 tvoří tudíž též trojinu, z čehož jde, že budou průseky $\mu_1\mu_2\mu_3$ těchto přímek s přímkami x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 tvořiti trojinu; tedy: $\mu_1 \equiv (\overline{m_2m_3}, \overline{x_2x_3})$, $\mu_2 \equiv (\overline{m_3m_1}, \overline{x_3x_1})$, $\mu_3 \equiv (\overline{m_1m_2}, \overline{x_1x_2})$.

Avšak body $\mu_1\mu_2\mu_3$ na stranách trojúhelníku $x_1x_2x_3$ k bodům $m_1m_2m_3$ patrně harmonicky sdružené jsou jak známo na téže přímce (Viz: Zákl. vyš. geom. I. díl. článek 14.) na tak zvané *poláře* bodu p vzhledem k trojúhelníku $x_1x_2x_3$; z toho však ihned plyne, že přímka tato prométně sama sobě přiřaděna jest a neprocházejíc bodem p musí tudíž býti protilehlou stranou P hlavního trojúhelníku pqr, čímž věta dokázána.

22. Jak jsme v článku 17. seznali, jsou každé dvě trojiny v perspektivné poloze a to na trojí různý způsob; středy perspektivity tvoří pak novou trojinu, jakož i osy perspektivity. Nyní můžeme snadno sestrojiti nekonečné množství párů trojin, které se čtyrykráte v poloze perspektivné nalezají. Jelikož k stanovení cyklického vztahu soumístných rovinných útvarů dle libosti zvoliti můžeme trojinu a pár elementů (čl. 17.), bude vztah též určen libovolnou trojinou $x_1x_2x_3$ a jedním z bodů samodružných k. p. bodem p. Trojina px_1, px_2, px_3 určuje úplně cyklickou prométnost vyskytující se na vrcholu p (čl. 7.) a dvojné paprsky této prométnosti (aneb trojné paprsky skupinou px_1, px_2, px_3 určené kubické involuce) jsou bodem p procházející strany QR hlavního trojúhelníku pqr (čl. 20.), jehož třetí stranou jest polára P bodu p vzhledem k trojúhelníku $x_1x_2x_3$ (čl. 21.).

Podotkněme, že (imaginárné) přímky Q, R lze též považovati za tečny sestrojené z bodu p ku křivce druhé třídy (kuželosečce), která procházejíc body $x_1x_2x_3$ dotýká se v těchto bodech přímek $x_1\mu_1$, $x_2\mu_2$, $x_3\mu_3$, jsou-li $\mu_1\mu_2\mu_3$ opět průseky přímky P se stranami trojúhelníku $x_1x_2x_3$ (Viz: Zákl. vyšší geom. II. díl, čl. 22. c). Neb pro tuto kuželosečku jsou patrně

**) Všeobecně jsou-li $X_1X_2X_3$, $Y_1Y_2Y_3$ dvě trojiny paprsků, tvoří body (X_1Y_1), (X_2Y_2), (X_3Y_3) trojinu bodovou a naopak (reciprokým způsobem).

px_1, px_2, px_3 poláry bodů $\mu_1\mu_2\mu_3$ a jest tudíž p pólem přímky P vzhledem k ní a px_1, $p\mu_1$; px_2, $p\mu_2$; px_3, $p\mu_3$ jsou tedy tři páry sdružených polár vůči oné křivce *) a dvojné paprsky involuce, kteráž tyto tři páry obsahuje, jsou tečnami kuželosečky, bodem p procházejícími. Že dvojné paprsky ty jsou přímky Q, R, plyne z úvah článku 14., z nichž na jevo jde, že dvojné paprsky trojinou px_1, px_2, px_3 určené cyklické trojprvkové prométnosti (co v šestiprvkové obsažené) jsou samodružné elementy kvadratické involuce, v nížto se co páry objevují paprsky px_1, px_2, px_3 s paprsky $p\mu_1$, $p\mu_2$, $p\mu_3$ oněm třem vzhledem k párům px_2px_3, px_3px_1, px_1px_2 harmonicky sdruženými (px_1, $p\mu_1$, px_2, px_3 jsou čtyry harmonické prvky, taktéž px_2, $p\mu_2$, px_3, px_1, a taktéž px_3, $p\mu_3$, px_1, px_2). Z toho však dále soudíme, že ona kuželosečka prochází body q, r, v nichž bodem p procházející tečny R, Q přímku P protínají.

„Pro veškeré kuželosečky opsané jednotlivým trojinám a procházející dvěma z tří samodružných bodů pqr jest třetí samodružný bod pólem protější strany hlavního trojúhelníku. Aneb: vedeme-li libovolnou trojinou $x_1x_2x_3$ a dvěma samodružnými body qr kuželosečku, tu se dotýká v těchto bodech přímek qp, qr třetím samodružným bodem procházejících."

Spůsobem reciprokým platí též věta:

„Kuželosečka vepsaná libovolné trojině $(x_1x_2x_3) \equiv (X_1X_2X_3)$ a dotýkající se dvou stran Q, R hlavního trojstranu dotýká se těchto přímek v bodech r, q na třetí straně P ležících. (P jest opět polára bodu p.)"

Kuželosečky v obou těchto větách zmíněné mají tudíž v bodech q, r dvojnásobný styk.

K témuž výsledku lze přijíti i bezprostředně následující úvahou.

Libovolné kuželosečce (křivce) opsané (vepsané) libovolné trojině $x_1x_2x_3$ $(X_1X_2X_3)$ bude prométně přislušeti, kuželosečka (křivka) opsaná (vepsaná) téže trojině. Prochází-li první kuželosečka trojným bodem q, musí též příslušná kuželosečka týmž bodem q procházeti; a vedeme-li pěti body $x_1x_2x_3qr$ kuželosečku K, bude sama sobě prométně přiřaděna, jelikož pěti

*) Viz: Zákl. vyš. geom. II. díl, str. 78.

body $x_1x_2x_3qr$, kterýmž prométně tytéž body ve sledu $x_2x_3x_1qr$ odpovídají, jediná jen křivka druhého stupně prochází. Libovolnému bodu y_1 na K, bude tudíž bod y_2 opět na K ležící a tomu třetí na K ležící bod y_3 odpovídati, tak tedy, že se na K nalézá nekonečné množství trojin $y_1y_2y_3$ (mezi nimi též $x_1x_2x_3$) tvořících cyklickou promětnost trojprvkovou na K, pro niž patrně q, r jsou body samodružnými. Tečny křivky K v bodech $x_1x_2x_3$ musí tudíž dle dřívějších úvah protilehlé strany $X_1X_2X_3$ trojúhelníku $x_1x_2x_3$ protnouti v bodech přímky $P \equiv qr$ (přímka Σ oněch úvah v článku 10); průseky ty však se nalézají dle předešlého na polaře bodu p, z čehož plyne, že vskutku pq, qr jsou tečnami kuželosečky K v bodech q a r.

Spojíme-li libovolnou trojinu $x_1x_2x_3$ s jedním z bodů hlavních, ku př. p, obdržíme trojinu bodem tím procházejících paprsků px_1, px_2, px_3; vytkneme-li si nyní na px_1 libovolně bod y_1, musí jemu příslušný bod y_2 na px_2 a tomuto opět příslušný bod y_3 na px_3 se nalézati. Z obou trojin $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$ můžeme právě tak jako z každých dvou trojin vyvinouti novou trojinu $z_1z_2z_3$, a tu shledáme, že obě trojiny $x_1x_2x_4$, $y_1y_2y_3$ na čtyry různé způsoby se v perspektivné poloze nalézají, při čemž body $z_1z_2z_3p$ představují středy perspektivné. Takovým způsobem lze ku každé trojině $x_1x_2x_3$ třikrát nekonečné množství jiných sestrojiti, z kterýchž každá s danou, mimo odvozené perspektivné středy $z_1z_2z_3$ má ještě čtvrtý perspektivný střed buď v p, neb v q, neb v r. Z článku 17. plyne: dva trojúhelníky $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, které mají dva středy perspektivné z_1z_2, mají vždy ještě třetí střed perspektivný z_3 a mohou se i s trojinou $z_1z_2z_3$ považovati za tři v sebe uzavřené trojiny cyklické promětnosti. Z posledních úvah tohoto článku vychází ihned, že po případě se vyskytující čtvrtý střed promětnosti musí býti jeden z bodů samodružných p, q, r *).

23. Kuželosečka procházející libovolnou trojinou x_1 x_2 x_3 a dotýkající se ve dvou hlavních bodech (pqr) hlavních přímek (PQR) jest samodružná. Vedeme-li tudíž libovolným bodem x_1 a body q, r kuželosečku, která se v těchto bodech dotýká přímek

---

*) Viz Schröter: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung etc. Lipsko 1880. str. 402.

qp, rp čili R, Q, musí procházeti též body x_2, x_3 s bodem x_1 trojinu tvořícími. Z týchž příčin prochází body $x_3 x_2$ i kuželosečka trojúhelníku x_1 rp opsaná a v bodech r, p přímek rq, pq se dotýkající, a konečně prochází body x_2, x_3 i kuželosečka trojúhelníku $x_1 pq$ opsaná a v bodech pq přímek pr, qr se dotýkající.

„Sestrojíme-li ony tři kuželosečky, které procházejíce týmž libovolným bodem x_1, obsahují vždy dva vrcholy daného trojúhelníka pqr dotýkajíce se stran vrcholy těmi procházejících*), obdržíme tři křivky, které mají další dva společné body x_2, x_3. Body x_1, x_2, x_3 tvoří trojinu cyklické promětnosti, v níž vrcholy a strany trojúhelníku pqr jsou prvky samodružnými.“

Sestrojme nyní kuželosečku k_1 procházející samodružným bodem p, pak body x_2, x_3 a dotýkající se v těchto bodech přímek x_2, x_1, x_3, x_1; obdobně budiž k_2 kuželosečka procházející body p, x_3, x_1 a dotýkající se přímek $x_3 x_2$, $x_1 x_2$ a konečně budiž k_3 kuželosečka body $p x_1 x_2$ procházející a přímek $x_1 x_3$, $x_2 x_3$ se dotýkající. Jelikož bodům p, x_2, x_3 odpovídají p, x_3, x_1 a dále body p, x_1, x_2 a přímkám $x_2 x_1$, $x_3 x_1$ přímky $x_3 x_2$, $x_1 x_2$ a těmto opět přímky $x_1 x_3$, $x_2 x_3$, vidíme, že křivce k_1 odpovídá promětně k_2, této pak k_3 a křivce k_3 opět k_1, tak že k_1, k_2, k_3 tvoří trojinu kuželoseček. Každému bodu jedné musí příslušeti bod následující. Tyto tři bodem p procházející kuželosečky mají však vzhledem k trojúhelníku $x_1 x_2 x_3$, tutéž polohu jako v poslední větě**) vytknuté bodem x_1 procházející křivky vzhledem k troj-

*) Čtenář theorie kubických involuc znalý, pozná ihned, že každé dvě z těchto tří kuželoseček jsou na vzájem v involutorné poloze, t. j. každé se může vepsati nekonečně mnoho trojúhelníků druhé opsaných. Tečny obou křivek v jich čtyřech průsecích procházejí body dotyčnými společných jim tečen atd. Porovnej: „Bemerkungen über eine besondere Art involutorisch liegender Kegelschnitte“. Zprávy o zasedání kr. č. společnosti nauk v Praze z roku 1876., sešit 1.

**) Že v poslední větě dovoleno jest trojúhelník pqr a bod x_1 zcela libovolně voliti, vysvítá z věty následující: „Cyklická trojprvková promětnost jest úplně určena, známe-li tři samodružné body p q r, kteréž dle libovůle sobě vytknouti můžeme.“ Vskutku, jakmile trojúhelník pqr čili PQR stanoven, jsou též cyklické promětnosti paprskové na bodech p, q, r a cyklické promětnosti bodové na P, Q, R úplně stanoveny, jelikož každá z nich má dotyčné dva elementy úhelníku pqr, z čehož na základě poslední věty ihned soudíme, že křivky k_1, k_2, k_3 těmitéž dvěma body procházeti musí, o kterýchž se snadno lze přesvědčiti, že to jsou ostatní dva body samodružné q, r. Neb dejme tomu, že by jeden z těchto dvou bodů ku př. q nebyl samodružným; pak by bodu q co q_1 musel jiný bod q_2 a tomuto opět jiný bod q_3 přiřaděn býti; poněvadž ale k_1, k_2, k_3 procházejí bodem q_1, musely by též bodem q_2 a taktéž bodem q_3 procházeti, tak že by každé dvě z kuželoseček k_1, k_2, k_3 měly pět společných bodů, což možné není, any křivky ty se různí. Máme tudíž i větu:

„Jest-li x_1, x_2, x_3 libovolná trojina a sestrojíme-li ony tři kuželosečky k_1, k_2, k_3, z kterýchž každá procházejíc týmž vrcholem hlavního trojúhelníku pqr a dále dvěma vrcholy trojúhelníku $x_1x_2x_3$ dotýkajíc se v těchto vrcholech stran jimi procházejících, obdržíme tři křivky procházející též oběma ostatními vrcholy hlavního trojúhelníku pqr."

Z toho dále plyne vzhledem k větě předposlední:

„Oba trojúhelníky pqr, $x_1x_2x_3$ jsou v témž vzájemném vztahu (involutorném): kuželosečka procházející kterýmikoliv z dvou vrcholů jednoho a všemi vrcholy druhého trojúhelníku dotýká se v prvních dvou oněch dvou stran, které procházejí třetím vrcholem."

Aneb vzhledem k článku 22.:

„Jest-li $x_1x_2x_3$ trojina cyklické prométnosti samodružných bodů pqr, jest naopak pqr trojina cyklické prométnosti samodružných bodů x_1, x_2, x_3."

A dále (článek 21.):

„V každém z obou trojúhelníků x_1 x_2 x_3, pqr, jest každá strana polárou protějšího vrcholu vzhledem k druhému trojúhelníku."

Taktéž (článek 20.):

---

trojúhelníku pqr za prvky dvojné. Tak na př. prométnost na bodu p jest určena dvojnými paprsky pq, pr atd. Jest-li nyní x_1 libovolný bod roviny, tu dostačí sestrojiti k paprsku px_1 prométně příslušný px_2, k tomu pak px_3 a právě tak k paprsku qx_1 paprsky qx_2, qx_3 a k paprsku rx_1 paprsky rx_2, rx_3. Paprsky px_2, px_3 protnou paprsky qx_2, qx_3 a rx_2, rx_3 v bodech x_2, x_3.

„Tři strany jednoho z obou trojúhelníků protínají každou stranu druhého v trojině bodů; dvojné body cyklické prométnosti touto trojinou určené jsou na oné straně se nalezající vrcholy druhého trojúhelníku", atd.

Jest-li hlavní trojúhelník $x_1x_2x_3$ reálný, bude každá trojina pqr pozůstávati z jednoho reálného a dvou imaginárních bodů, jichž reální spojnice jest polárou reálného bodu vzhledem k trojúhelníku $x_1x_2x_3$; bodem reálným procházející dvě imaginarné strany trojiny pqr jsou dvojné paprsky cyklické prométnosti určené oněmi paprsky, které směřují k bodům x_1, x_2, x_3. Z článku 14. víme, že dvojné prvky trojinou určené cyklické prométnosti tvoří s onou trojinou soustavy aequianharmonické, totiž takové, jichž tři základní dvojpoměry se rovnají pomyslnému třetímu kořeni ze záporné jednice:

„Spojíme-li vrcholy jednoho z obou trojúhelníků pqr, $x_1x_2x_3$ s libovolným vrcholem druhého, obdržíme tři přímky, které s každou stranou druhého trojúhelníku oným vrcholem procházející tvoří soustavu aequianharmonickou."

„Trojúhelníky pqr, $x_1x_2x_3$ mají tu zvláštní polohu, že jsou na šesterý spůsob v poloze perspektivné."

Dle úvah článku 5. určují každé dva z paprsků px_1, px_2, px_3 s paprsky pq, pr dvojpoměr, jehož hodnota se rovná pomyslnému kořenu z třetího stupně kladné jedničky;*) označíme-li hodnoty obou pomyslných těchto třetích kořenů písmenami x', x'', bude na př. $(pq, pr, px_1, px_2) = x'$, $(pq, pr, px_1, px_3) = x''$. Dvojpoměr (qp, qr, qx_1, qx_2) nemůže míti hodnotu x', neb pak bychom měli:

$$(pq, pr, px_1, px_2) = (qp, qr, qx_1, px_2),$$

a jelikož pq splývá s qp, musely by body rx_1x_2 býti na přímce, která by co samodružná (jelikož přímce qx_1 odpovídá qx_2) též bod x_3 obsahovati musila. Jelikož předpokládáme, že trojina x_1, x_2, x_3 v přímce samodružné se nenalezá, máme jedinou jen možnost, položiti $(qp, qr, qx_1, qx_2) = x''$ a dle toho pak $(qp, qr, qx_1, qx_3) = x'$, čímž máme:

*) Porovnej též: „Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen." Pojednání kr. české spol. nauk z roku 1874. Článek 12.

$$(pq,\ pr,\ px_1,\ px_2) \equiv (qp,\ qr,\ qx_1,\ qx_3),$$
$$(pq,\ pr,\ px_1,\ px_3) \equiv (qp,\ qr,\ qx_1,\ qx_2),$$

z čehož k vůli totožnosti přímek pq, qp plyne, že přímka rx_1 obsahovati bude jak průsečík přímek px_2, qx_3 tak i průsečík přímek px_3, qx_2. Takto vzniknou na přímce rx_1 dva body, z nichž každý jest perspektivním středem trojúhelníků $x_1\,x_2\,x_3$, pqr; obdobně obdržíme dva takové středy na rx_2 a dva středy na rx_3. Trojúhelníky $x_1x_2x_3$, pqr jsou tudíž vskutku na šesterý způsob v poloze perspektivné.

24. Vložíme-li body qr do imaginárních nekonečně vzdálených bodů kruhových, jsou patrně trojiny $x_1\,x_2\,x_3$ vrcholy stejnostranných trojúhelníků, pro kteréž p jest středem opsané kružnice (i vepsané).

25. Jsou-li dvě promětné soumístné roviny v cyklickém dvojprvkovém vztahu, t. j. přísluší-li prvku x_1 prvek x_2 a tomuto opět prvek x_1, pak se nalezají obě roviny v poloze involutorní a tu je známo, že jsou vždy v poloze perspektivné. (Viz Zákl. vyš. geom. III. díl čl. 64.); přímky x_1x_2 probíhají samodružným bodem p a body (X_1X_2) nalézají se na samodružné přímce P. Každá bodem p procházející přímka odpovídá sama sobě a každý na přímce P se nalezající bod jest samodružný; přímka P a bod p oddělují každé dva body x_1x_2 a každé dvě přímky harmonicky.

Mějmež nyní v rovině cyklickou promětnost čtyřprvkovou. Vztah bude úplně určen, vytkneme-li si libovolný bod a_1, tomu libovolně příslušný a_2, tomu opět příslušný a_3 a konečně bodu a_3 příslušný bod a_4 libovolně; neb nyní známe čtyry páry příslušných prvků: a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1. Ze skupiny té můžeme dle známých zásad sestrojiti k libovolnému bodu x_1 příslušný x_2, pak x_3 a x_4, čímž skupina $x_1x_2x_3x_4$ uzavřena bude. V každé skupině můžeme libovolný bod považovati za první x_1, libovolný z obou sousedních bodů co druhý x_2, pak jest ale zcela určitý z ostatních dvou bodem třetím x_3 a poslední bodem čtvrtým x_4. Právě tak odpovídá přímce x_1x_2 přímka x_2x_3, té opět x_3x_4 a této x_4x_1 a i zde můžeme libovolnou co první, jednu sousední co druhou považovati a pak jest třetí i čtvrtá úplně určena. Nazveme-li v libovolné skupině protilehlými prvky první a třetí člen, a právě tak druhý a čtvrtý člen (tedy

x_1x_3 jest pár protějších prvků a taktéž $\overline{x_1x_2}$, $\overline{x_3x_4}$ a t. d.), tu ihned shledáváme:

„Považujeme-li dva protější prvky za příslušné, objeví se nám cyklická dvojčlenná promětnost t. j. involuce v rovině.“

Neb vskutku jest bodem x_1 bod x_3 a bodem x_3 opět tentýž bod x_1 úplně určen.

Z toho plyne dle dřívějšího:

Přímky ($\overline{x_1x_3}$, $\overline{x_2x_4}$) spojující každé dva protější body procházejí týmž pevným bodem p a průseky protějších paprsků nalezají se na pevné přímce P. Bod p jest samodružným a přímka P taktéž samodružným prvkem. V skutku jest p průsekem přímek x_1x_3, x_2x_4, kterýmž odpovídají přímky x_2x_4, x_3x_1, jichžto průsek jest opět p; přímce P co spojující body X_1X_3, X_2X_4 odpovídá tatáž přímka P co příslušné body X_2X_4, X_3X_1 spojující.

Označíme-li přímku x_1x_2 písmenem X_1, jsou pak x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1 přímky X_2, X_3, X_4. Budiž m_1 na P se nalezající průsek přímek X_1X_3; příslušný bod m_2 jest průsek příslušných přímek X_2X_4 a nalezá se též na P; bodu m_2 odpovídá tedy opět m_1 co bod m_3 a tomuto bodu opět m_2 co m_4. Jest tedy v m_1 též m_3 a v m_2 též m_4.

„Každá skupina na samodružné přímce P se skládá z dvou bodů, z kterýchž jeden zastupuje první a třetí prvek a druhý pak zastupuje druhý a čtvrtý prvek skupiny.“

Budiž N_1 přímka $\overline{x_1x_3}$ bodem p procházející; jí příslušná přímka N_2 spojujíc příslušné body x_2x_4 prochází též bodem p a má právě tak N_1 co přímku N_3 za příslušnou, jejížto příslušná N_4 opět s přímkou N_1 splývá:

„Každá bodem samodružným procházející skupina paprsků se skládá jen ze dvou, z nichž jeden zastupuje první a třetí a druhý pak zastupuje druhý a čtvrtý element skupiny.“

Jelikož každému bodu m_1 na P odpovídá jediný bod m_2, jemuž opět m_1 přiřaděn jest, vidíme: „že páry m_1m_2 tvoří na P kvadratickou involuci; a právě tak tvoří páry N_1N_2 kvadratickou paprskovou involuci na bodě p. Obě involuce jsou v poloze perspektivné.“

„Dvojné body involuce na P jsou patrně ostatní dva body samodružné q, r a přímky pq, pr co dvojné paprsky involuce na bodu p jsou ostatní dvě samodružné přímky R, Q.“

„Samodružné prvky q, r, Q, R jsou vždy pomyslné, je-li vztah v rovině reálný, t. j. přísluší-li reálnému bodu x_1 reálný bod x_2 a t. d.“

Přímky N_1, N_2 protínají přímku P ve sdružených příslušných bodech n_1, n_2 a dvojné elementy involuce určené dvěma páry $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ jsou samodružné body q, r; jelikož však jest $pm_1 m_2$ diagonální trojúhelník úplného čtyrúhelníku $x_1 x_2 x_3 x_4$, pro nějž $N_1 N_2$ párem protějších stran, jsou body $m_1 m_2 n_1 n_2$ harmonické a tudíž z obou bodů $n_1 n_2$ vždy jeden uvnitř délky $\overline{m_1 m_2}$ a druhý pak mimo ni; tak že body q, r oba páry $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ současně harmonicky dělící jsou vždy pomyslné. Přímky Q, R bod p s body r, q spojující jsou též imaginárné.

26. „Každá skupina $x_1 x_2 x_3 x_4$ nalezá se s pomyslnými samodružnými body qr na kuželosečce, pro niž p jest pólem přímky P.“

Kuželosečky čtyrúhelníku $x_1 x_2 x_3 x_4$ opsané určují na každé příčce involuci bodovou. (Viz: Zákl. vyš. geom. II. díl, čl. 78.) Na přímce P určena involuce o dvojných bodech $m_1 m_2$, jelikož oba průseky příčky P s kuželosečkou, již představují přímky $\overline{x_1 x_2}$, $\overline{x_3 x_4}$, splývají v bodě m_1 a průseky přímky P s kuželosečkou, již představují přímky $\overline{x_2 x_3}$, $\overline{x_1 x_4}$, splývají v bodě m_2. Jelikož však $(m_1 m_2 qr) = -1$, prochází body q, r též jedna z kuželoseček body $x_1 x_2 x_3 x_4$ procházejících, a jelikož diagonalný trojúhelník $pm_1 m_2$ jest samodružným pro každou body $x_1 x_2 x_3 x_4$ procházející kuželosečku, jest věta svrchu uvedená dokázána.

Poněvadž jest p pólem přímky P, dotýká se kuželosečka body $x_1 x_2 x_3 x_4$ qr procházející v bodech q, r přímek pq, pr.

K témuž výsledku lze i takto dospěti: Každé kuželosečce odpovídá promětně opět kuželosečka; každé kuželosečce procházející body $x_1 x_2 x_3 x_4$ bude tudíž odpovídati kuželosečka těmiže body procházející, a kuželosečka vedená body $x_1 x_2 x_3 x_4 q$ musí sama sobě příslušeti, poněvadž q jest bodem samodružným (a bodům $x_1 x_2 x_3 x_4$ odpovídají tytéž body v pořádku

$x_2x_3x_4x_1$). Libovolnému bodu y_1 této kuželosečky odpovídá tudíž prométně jiný bod y_2 téže křivky, tomu opět y_3 a pak y_4, čímž skupina $x_1y_2y_3y_4$ na kuželosečce ležící jest uzavřena. Vyskytne se tudíž na křivce té cyklická čtyrprvková prométnost, z jejíž pomyslných dvou samodrúžných bodů patrně q jest jedním a druhý nemůže býti jiný, nežli samodružný pomyslný bod r. Každá skupina čtyrprvkové prométnosti cyklické na kuželosečce jest harmonická (viz článek 11.), tak že tedy kuželosečka body $x_1x_2x_3x_4qr$ procházející jest ona, na nižto body $x_1x_2x_3x_4$ tvoří harmonickou soustavu. Tečnu v bodě x_1 této křivky, kterou bychom mohli nazvati *„skupině opsanou harmonickou kuželosečkou"*, obdržíme sestrojivše k paprsku x_1x_3 vzhledem k paprskům x_1x_2, x_1x_4 harmonický sdružený paprsek; bude to tudíž přímka x_1n_2. Právě tak jsou přímky x_3n_2, x_4n_1, x_4n_1 tečny harmonické kuželosečky v bodech x_3, x_2, x_4. Jelikož harmonická kuželosečka obsahuje nekonečné množství skupin $y_1y_2y_3y_4$, jest sama sobě příslušná; mimo ni prochází skupinou $x_1x_2x_3x_4$ ještě jedna samodružná kuželosečka, skládající se z přímek x_1x_3, x_2x_4, poněvadž libovolnému bodu jedné z těchto dvou přímek odpovídá bod na druhé položený. Každé skupině paprsků $X_1X_2X_3X_4$ jest jistá harmonická kuželosečka vepsána; tato se dotýká též pomyslných samodružných přímek Q, R v bodech r, q a jest jedna z obou skupině vepsaných samodružných kuželoseček; druhá se skládá z průseků protějších paprsků X_1X_3, X_2X_4.

„Harmonické kuželosečky jednotlivým skupinám vepsané neb opsané procházejí vesměs imaginárními samodružnými body dotýkajíce se v nich imaginárných samodružných přímek; tak že tedy bod p jest pólem přímky P pro všecky harmonické, skupinami určené kuželosečky."

27. Vložíme-li body q r do nekonečně vzdálených imaginárných bodů kruhových, budou veškeré harmonické kuželosečky kruhy o středu p a kruhům těm vepsané neb opsané čtverce představují skupiny čtyrprvkové cyklické prométnosti o samodružných bodech pqr.

28. „Veškeré jednotlivým skupinám cyklické pětiprvkové prométnosti opsané i vepsané kuželosečky procházejí těmiže dvěma (imaginarnými) body a dotýkají se v těchto bodech

týchž dvou imaginarných přímek. Ony dva imaginarné body jsou samodružné body, jich spojnice jest (reálná) samodružná přímka; ony dvě imaginarné přímky jsou samodružné a jich (realný) průsek jest třetí bod samodružný."

Jest-li $x_1x_2x_3x_4x_5$ libovolná skupina, odpovídá kuželosečka těmito pěti body vedená a jimi úplně určená sobě, jelikož oněm bodům tytéž body jen v jiném sledu: $x_2x_3x_4x_5x_1$ přísluší. Vytkneme-li si nyní na této křivce libovolný bod y_1, musí jemu příslušný y_2 taktéž na křivce té se nalézati a obdobně y_3, y_4, y_5. Obdržíme takto na kuželosečce pětiprvkovou cyklickou prometnost složenou ze skupin $y_1y_2y_3y_4y_5$ a opatřenou dvěma imaginárními samodružnými body q r, které mají realnou spojnici P a patrně i pro prometný vztah v rovině samodružnými budou. Tečny naší kuželosečky v bodech q, r jsou tudíž samodružné přímky a jich průsek bude následovně třetím samodružným bodem p. Právě tak dokážeme, že každá skupině $x_1x_2x_3x_4x_5$ vepsaná kuželosečka prochází body p, r dotýkajíc se v nich přímek qp, rp.

Úloha: Jakým způsobem lze určiti polohu bodu x_5, který s danými čtyřmi body $x_1x_2x_3x_4$ tvoří skupinu cyklické pětiprvkové prometnosti v rovině?

29. „Každá skupina cyklické šestiprvkové prometnosti v rovině jest vepsána jisté (samodružné) kuželosečce a taktéž opsána jiné (samodružné) kuželosečce."

Považujeme-li první a čtvrtý bod skupiny $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ za dva body příslušné, máme patrně involutorní vztah v rovině, tak že přímky $\overline{x_1x_4}$ týmž bodem p procházeti musí; právě tak odpovídá bodu x_2 bod x_5 co protilehlý neb čtvrtý, bodu x_3 bod x_6 a bodu x_4 opět x_1 a t. d. Přímky x_1x_4, x_2x_5, x_3x_6 procházejí tudíž týmž bodem p, a jelikož přímkám x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 v téže involutorní relaci odpovídají protější přímky x_4x_5, x_5x_6, x_6x_1, musí se body průsečné protějších stran šestiúhelníku $x_1x_2 \ldots x_6$ nalézati na pevné přímce P. Z toho však ihned plyne, že: předně šestistran $x_1 \ldots x_6$ opsán jest jisté kuželosečce a že za druhé šestiúhelník $x_1 \ldots x_6$ vepsán jest jisté jiné kuželosečce. Budiž k_x kuželosečka určena skupinou bodů $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, jimi procházející. Kuželosečka ta jest patrně samodružná, tak že libovolnému bodu y_1 na k_x odpovídati bude bod y_2 opět na k_x se nalezající, tomu y_3, y_4, y_5, y_6 na k_x ležící body. Máme tudíž na k_x cyklickou šestiprvkovou prometnost, jejížto (imaginárné) dva dvojné body qr budou též samodružnými pro vztah prometný v rovině. Dále víme, že p jest pólem přímky P spojující body qr vzhledem ku k_x, a jelikož přímky qp, qr v samodružných bodech q, r, samodružné kuželosečce co tečny přináleží, jsou též přímkami samodružnými, tak že bod p co jich průsek jest třetím samodružným bodem. Veškeré kuželosečky k_x procházejí tudíž body q, r, dotýkajíce se v těchto bodech přímek qp, rp. Právě tak dokážeme, že veškeré kuželosečky šestiúhelníkům (šestistranům) $x_1x_2x_3 \ldots x_6$ vepsané, mají tutéž vlastnost.

Samo sebou se rozumí, že trojúhelníky $x_1x_3x_5$, $x_2x_4x_6$ tvoří cyklickou prometnost trojprvkovou v rovině, o těchže samodružných bodech pqr.

30. „Cyklická prometnost z realných skupin pozůstávající má vždy jeden reálný a dva pomyslné body samodružné, jichžto spojnice jest jedinou reálnou přímkou samodružnou."

Víme, že jeden z tří samodružných bodů musí býti reálný a taktéž jedna ze samodružných přímek. Budiž P reálná samodružná přímka; libovolnému bodu x_1 této přímky odpovídá bod x_2 téže přímky, tomu opět x_3 na P a t. d. $x_4x_5 \ldots x_n$; tak že celá skupina $x_1x_2 \ldots x_n$ libovolným realným bodem x_1 přímky P určena, celá na přímce P se nalezá (z bodů $x_1x_2 \ldots x_n$ po případě některé splynouti mohou; viz článek 25.) a jen reálné body obsahuje. Máme tudíž na P cyklickou prometnost reálných skupin, z čehož plyne, že dvojné body q, r této prometnosti, která patrně též pro prometnost v rovině jsou samodružnými, imaginárními býti musejí.

Třetí samodružný bod p *musí* býti realný, a samodružné přímky pq, pr jsou imaginárné.

31. „Každé skupině cyklické prometnosti n-prvkové lze opsati jistou kuželosečku a taktéž vepsati jinou kuželosečku."

Jsou-li tedy $x_1x_2x_3 \ldots x_n$ body skupiny, pak se všecky nalezají na jisté kuželosečce K_x a strany x_1x_2, $x_2x_3, \ldots x_{n-1}x_n$, x_nx_1 aneb $X_1X_2 \ldots X_n$ jsou vesměs tečny jisté kuželosečky K_x'.

*První důkaz.**) Budiž k_1 kuželosečka procházející bodem x_1 a dotýkající se v bodech q, r přímek pq, pr. Křivce té odpovídá křivka bodem x_2 procházející a taktéž v bodech samodružných q, r přímek samodružných pq, pr se dotýkající; křivce k_2 odpovídá bodem x_3 procházející k_3, té opět bodem x_4 procházející k_4 a t. d., až dospějeme konečně ku křivce k_n bodem x_n procházející, a veškeré tyto kuželosečky $k_1 k_2 k_3 \ldots k_n$ procházející body q, r, dotýkajíce se v těchto bodech přímek pq, pr. Následující úvahou se přesvědčíme, že veškeré tyto křivky musí býti totožné. Jelikož k_2 má s k_1 dvojný styk (v bodech q, r), bude k_2 úplně buď uvnitř neb mimo k_1 se nalezati; dejme tomu, že k_2 jest uvnitř k_1, tak bude x_2 uvnitř k_1. Právě tak musí býti k_3 uvnitř k_2, tedy i x_3 uvnitř k_2 a tudíž i uvnitř k_1. Pokračujeme-li stejným spůsobem, přijdeme k výsledku, že i k_n a tedy i x_n uvnitř k_1 se nalezá. Jelikož však k vůli cyklické promětnosti bodu x_n opět x_1 a tedy kuželosečce k_n opět k_1 odpovídá, musela by se křivka k_1 uvnitř k_n tedy i uvnitř k_1 nalézati, což jest nemožné, pročež se křivky $k_2 k_3 \ldots k_n$ od k_1 nemohou různiti a body $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ se tudíž nalézají na téže kuželosečce k_1 t. j. k_x. Právě tak dokážeme, že jsou strany $x_1 x_2$, $x_2 x_3 \ldots$ tečnami téže kuželosečky K_x'.

Druhý důkaz. Budiž v rovině dána cyklická promětnost n-prvková; samodružné body buďtež p reálný, q, r imaginární na reálné přímce P se nalezající. Mějmež k vůli důkazu na zřeteli větu:

„Cyklická promětnost n-prvková jest samodružnými body pqr úplně určena."

Neb vskutku určují body pq na přímce je spojující co body samodružné úplně n-prvkovou cyklickou promětnost na této přímce, a právě tak jsou cyklické n-prvkové promětnosti na přímkách pr, rq *úplně* určeny samodružnými body p, r, resp. r, q. Taktéž jsou n-prvkové cyklické promětnosti pa-

---

*) Porovnej: J. Lüroth: „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen." Math. Ann. svazek XI. a „Über cyklisch projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume." Math. Ann. svazek XIII. První v tomto pojednání podaný důkaz vyňat jest z druhého zde jmenovaného pojednání Lürothova.

prskové na bodech p, q, r úplně určeny dotyčnými z těchto bodů procházejícími stranami trojúhelníku pqr co paprsky samodružnými. Z toho však plyne ihned, že existuje jen jediná cyklická promětnost n-prvková s danými samodružnými body pqr; neb každá případně se ještě vyskytující taková promětnost měla by s onou pospolu veškeré skupiny na přímkách pq, pr, rq úplně určitých cyklických promětností, tedy by obě měly nekonečné množství společných párů bodů příslušných, z čehož jich totožnost plyne (jelikož promětnost čtyřmi páry úplně jest určena).

Budiž k libovolná kuželosečka procházející body q, r a dotýkající se přímek qp, rp. Body q, r co body dvojné určují na kuželosečce k cyklickou promětnost n prvkovou úplně, libovolnému bodu x_1 kuželosečky k přísluší posloupně řada bodů x_2, $x_3 \ldots x_n$ na k se nalezajících, úplně určitých. Myslíme-li si nyní čtyřmi páry x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5 stanovenou promětnost v rovině, tož bude i dále bodu x_5 odpovídati x_6, tomu x_7 atd., tak že se skupina v x_n zavře, a promětnost jest tudíž n prvková cyklická a tedy dle poslední věty jediná trojúhelníkem pqr co hlavním trojúhelníkem úplně stanovená. Z toho plyne, že vskutku každá skupina x_1, $x_2 \ldots x_n$ se nalezá na kuželosečce, body q, r procházející a v nich se přímek pq, pr dotýkající. Každá taková kuželosečka jest patrně samodružnou. Rozumí se samo sebou, že totéž co jsme o bodech q r dokázali i o bodech pq, pr platí, že jen v posledních dvou případech jsou kuželosečky imaginárními, poněvadž jen bod p jest realným, q a r však jsou body imaginárné.

32. Vložíme-li body qr do nekonečně vzdálených kruhových bodů, tvoří skupiny x_1, $x_2 \ldots x_n$ vrcholy pravidelných n-úhelníků se společným středem p. — Doufáme, že nám brzo popřáno bude pojednati zde o podobných otázkách týkajících se cyklické promětnosti v prostoru; prozatím však poukazujeme k uvedeným již pracím pp.: Lürotha, Rosanes-a a Schrötera v annalech mathematických slavným Clebschem založených.

Kratičké odvození vzorců pro $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$ na základě sinusové věty $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Studujícím napsal

P. **Cornelius Pich**, T. J. v Bohusudově.

Buďtež a, b, c strany, α, β, γ protilehlé úhly rovinného trojúhelníku, pak c_1, c_2 úsečky strany c příslušnou výškou vzniklé.

I. Poněvadž jest

$$c = c_1 + c_2 = a\cos\beta + b\cos\alpha,$$

z čehož jde

$$\frac{c}{a} = \cos\beta + \frac{b}{a}\cos\alpha,$$

bude také dle sinusové poučky

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = \cos\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha,$$

z čehož plyne první hledaný vzorec

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad . \quad . \quad (1)$$

Podobným spůsobem nabudeme z rovnice:

$$b = b_1 + b_2 = a\cos\gamma + c\cos\alpha,$$

$$\sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma \quad . \quad . \quad (2)$$

II. Dosadíme-li do vzorce (2) hodnoty

$$\sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta, \quad \cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta), \quad \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta),$$

obdržíme

$$\sin\beta = -\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) + \cos\alpha\sin(a+\beta),$$

odkudž vyjde dosazením vzorce (1)

$$\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\alpha\cos\beta - \sin^2\alpha\sin\beta,$$

z čehož plyne druhý hledaný vzorec

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Poznámka. Jelikož v úhloměrství čili v goniometrii bez pravoúhlých trojúhelníkův ani pojmy a vlastnosti úhloměrných úkonův ustanoviti, ani jakýchkoliv úhloměrných vzorců vyvinouti nelze, a poněvadž věta sinusová jenom dva pravoúhlé trojúhelníky, kteroukoli výškou kosoúhlého trojúhelníku vzniklé, předpokládá a přímo plyne ze základních pojmův úhloměrných úkonů, proto snad nebude, kdo by hořejší kratičké odvození vzorců pro $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$ z té příčiny chtěl zavrhnouti, že spočívá na základě sinusové věty, kteráž dle obvyklé soustavy, teprv později, totiž v rovinné trigonometrii, se odvozuje.