Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jaroslav Friedrich

O středech křivosti křivek Cassiniho

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 2, 96--100

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121922`

O středech křivosti křivek Cassiniho.

Napsal

Jaroslav Friedrich,

s. professor v Příbrami.

V ročníku XX. „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky“ str. 130. odvozuje Fr. Machovec konstrukci středů křivosti křivek Cassiniho a uvádí zároveň jinou jejich konstrukci pocházející od Mannheima. Mnohem jednodušeji lze však úlohu tu řešiti použitím jisté zajímavé věty o středech křivosti křivek Cassiniho, kterouž tuto hodlám odvoditi.

Rovnice křivky Cassiniho, jejíž ohniska mají vzdálenost $2a$ a pro jejíž body má součin průvodičů konstantní hodnotu b^2, zní v soustavě pravoúhlé, jejímiž osami jsou obě osy křivky,

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4-b^4=0.$$

Předložme si nyní otázku po velikosti úhlu ψ, jejž svírá s osou X spojnice počátku soustavy se středem křivosti křivky v bodě (x, y). Zoveme-li souřadnice středu křivosti α, β, takže dle obvyklého označení jest

$$\alpha=x-\frac{1+y'^2}{y''}y', \quad \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''},$$

bude

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\psi=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{yy''+1+y'^2}{xy''-(1+y'^2)y'}.$$

Jde tedy především o hodnotu první a druhé derivace. Z rovnice (1) obdržíme snadno, derivujíce dle x a kladouce zároveň $x^2+y^2=r^2$,

$$(3) \qquad y'=\frac{x(a^2-r^2)}{y(a^2+r^2)},$$

kterýžto výraz ještě následovně transformujeme. Píšeme-li v rovnici (1)

$$x^2-y^2=r^2-2y^2,$$

lze ji uvésti na tvar

$$(a^2-r^2)^2=b^4-4a^2y^2$$

čili

$$a^2-r^2=\pm 2a\sqrt{m^2-y^2},$$

kde položeno $\frac{b^2}{2a} = m$; znamení hořejší platí, jak patrno, pro $r < a$, dolejší pro $r > a$. A píšeme-li v (1) obdobně

$$x^2 - y^2 = 2x^2 - r^2,$$

zjednáme si zase

$$a^2 + r^2 = 2a\sqrt{m^2 + x^2},$$

takže použitím těchto dvou výsledků přejde výraz (3) v

$$(4) \qquad y' = \pm \frac{x\sqrt{m^2 - y^2}}{y\sqrt{m^2 + x^2}}.$$

Derivujíce dále tento výraz, obdržíme po několika redukcích

$$(5) \qquad y'' = -m^2 \frac{x^2\sqrt{m^2 + x^2} \mp y^2\sqrt{m^2 - y^2}}{y^3(m^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kde o znameních platí opět svrchu učiněná poznámka.

Zjednajíce si ještě

$$(6) \qquad 1 + y'^2 = \frac{m^2(x^2 + y^2)}{y^2(m^2 + x^2)},$$

dosaďme nyní hodnoty (4), (5) a (6) do výrazu (2), i obdržíme jej po skrácení společným činitelem m^2 a po odstranění zlomků z čítatele a jmenovatele ve tvaru

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-x^2y\sqrt{m^2 + x^2} \pm y^3\sqrt{m^2 - y^2} + y(x^2 + y^2)\sqrt{m^2 + x^2}}{-x^3\sqrt{m^2 + x^2} \pm xy^2\sqrt{m^2 - y^2} \mp x(x^2 + y^2)\sqrt{m^2 - y^2}}.$$

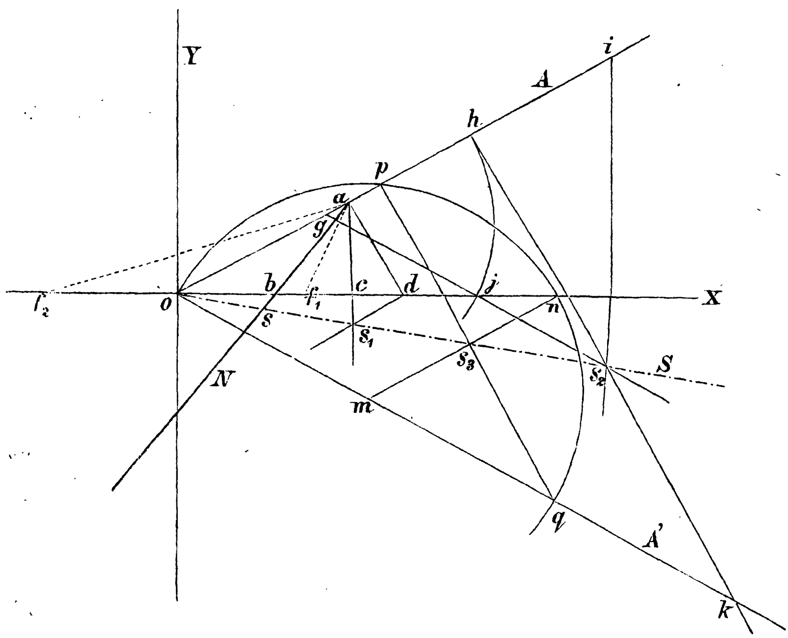
Zde však některé členy se ruší, i lze potom krátiti výrazem $\sqrt{m^2 + x^2} \pm \sqrt{m^2 - y^2}$, takže konečně zbývá

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{y^3}{x^3}.$$

Zoveme-li tedy úhel, jejž svírá s osou X průvodič k bodu (x, y) z počátku vedený, φ, přicházíme k tomuto velmi jednoduchému vztahu mezi úhly φ a ψ

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\psi = -\operatorname{tg}^3\varphi.$$

Relace tato jest však zajímavou nejen pro jednoduchou souvislost úhlů φ a ψ, ale zvláště také tím, že nevyskytuje se v ní ani jedna z konstant a, b stanovících určitou křivku Cassiniho. Je tudíž úhel ψ na veličinách a, b úplně nezávislý, takže pro jakoukoli křivku Cassiniho náleží k stejnému úhlu φ stejný úhel ψ. Ovšem musí oba tyto úhly býti měřeny od hlavní osy křivky, neboť tato vzata byla v předcházejícím odvození za osu X.



Představíme-li si tudíž všechny křivky Cassiniho sestrojené nad týmiž dvěma osami, můžeme o nich vysloviti větu:

Promítneme-li soustavu souosých křivek Cassiniho přímkou vedenou společným jich středem, leží středy křivosti všech průsečíků rovněž na přímce středem tím vedené.

Jak nyní výsledku toho použíti jest ku konstrukci, leží na snadě. Dle předcházejícího jeví se totiž střed křivosti jako průsečík normaly s přímkou, jež prochází počátkem soustavy a svírá s osou X úhel ψ stanovený relací (7). Konstrukci normaly nutno zde předpokládati za známou, i jde tedy pouze o sestrojení zmíněné přímky.

Nechť jest na př. sestrojiti střed křivosti bodu a (viz obr.) křivky Cassiniho, jejíž ohniska jsou f_1, f_2. Normalou v daném bodě jest přímka N; k vůli úplnosti budiž uvedeno, že lze ji jednoduše sestrojiti na př. tím způsobem, že učiní se

$$\sphericalangle f_1 ab = \sphericalangle f_2 ao.$$

Spusťme nyní

$$ac \perp X, \; ad \perp ao, \; ds_1 \perp ad,$$

průsečík s_1 spojme s počátkem soustavy o, i bude spojnice os_1 protínati normalu N v hledaném středu křivosti s. Z konstrukce totiž je patrno, že $\sphericalangle f_1 os$ nejen co do velikosti, ale i co do znamení — ležíť na opačné straně osy X — hoví relaci (7), takže jest

$$\sphericalangle f_1 os = \psi.$$

Také lze však použíti věty vyslovené svrchu o souosých křivkách Cassiniho. Střed křivosti bodu a bude ležeti na téže přímce, na které leží střed křivosti kteréhokoli bodu přímky A, pokud jej pokládáme za bod některé křivky Cassiniho o osách X, Y. K účelu tomu hodí se však pouze lemniskata, neboť pouze u této lze konstrukci středu křivosti bez znalosti relace (7) snadno provésti. Je totiž u lemniskaty výraz pro poloměr křivosti

$$R = \frac{1}{3} \frac{r}{\cos 2\varphi},$$

jak z polarní rovnice její

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

snadno lze se přesvědčiti; mimo to svírá normala lemniskaty, jak známo, s osou X úhel 3φ. Ježto pak lze kterýkoli bod přímky A pokládati za bod jisté lemniskaty o osách X, Y, nanesme od bodu o na přímku A tři libovolné, sobě rovné dílky, na př.

$$og = gh = hi$$

a prohlašme koncový bod i za bod lemniskaty. Střed křivosti tohoto bodu sestrojí se tím způsobem, že učiní se

$$hs_2 \perp ho$$

a
$$\sphericalangle\, ois_2 = 2\varphi.$$

Pak je totiž is_2 normalou lemniskaty v bodě i, a délka

$$is_2 = \frac{hi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{3}\frac{r}{\cos 2\varphi} = R.$$

Spojnice os_2 protíná pak normalu N v hledaném středu křivosti s.

Ke konstrukci bodu s_2 lze však užíti výhodněji místo is_2 přímky gs_2 svírající s gi rovněž úhel 2φ. Tuto lze totiž obdržeti jednoduše jako spojnici bodu g s bodem j, v němž kruhový oblouk z bodu g poloměrem og vedený protíná osu X.

Ježto pro úhel $\varphi > 45^0$ nemá lemniskata žádného bodu realného, ztrácí v případě tom konstrukce tato svůj podklad; nicméně můžeme ji přece i v tom případě provésti, supponujíce lemniskatu v poloze takové, že její hlavní osou je osa Y.

Vedeme-li konečně přímku A' tak, že úhel mezi ní a osou X rovná se φ, a prodloužíme-li potom kolmici hs_2, až protne A' v bodě k, je patrně $hs_2 = ks_2$, neboť $og = gh$ a $gs_2 \parallel A'$. Tato vlastnost přímky S, že půlí kolmici hk, plyne také neodvisle od předcházející konstrukce z toho, že o úhlu hos_2 platí za příčinou relace (7)

$$\operatorname{tg} \sphericalangle\, hos_2 = \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\varphi.$$

Konstrukci pak na této vlastnosti se zakládající lze dáti tento pohodlný tvar: Z libovolného bodu m přímky A' opíše se půlkružnice poloměrem om; spojíme-li pak navzájem body p a q, m a n a zoveme průsečík těchto spojnic s_3, je os_3 hledanou přímkou S.*)

V Příbrami, r. 1896.

*) Jinou konstrukci středu křivosti křivky Cassinické na základě kinematické geometrie uvádí *Bedřich Procházka* ve článku *„Poznámka ku strojení středu křivosti některých druhů křivek."* Viz v Rozpravách České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění v Praze. Třída II., ročn. IV., čís. 8., str. 3. *R.*