Zdeněk Chládek

Nová methoda rozkladu reducibilních mnohočlenů jedné proměnné

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 2, 97--101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121915

$$(37)\qquad S\left\{\begin{array}{l} x_i = \sum_{\varrho=1}^{2}\ \sum_{t_\varrho=0}^{2} x_i^{\varrho,\,t_\varrho}\ \bar{x}_{\varrho,\,t_\varrho} \\ y_k = \sum_{\sigma=1}^{2}\ \sum_{t_\sigma=0}^{2} x_k^{\sigma,\,t_\sigma}\ \bar{y}_{\sigma,\,t_\sigma} \end{array}\right.$$

Dostaneme tak ze svazku $A - \lambda E$ svazek

$$\bar{A} - \lambda \bar{E} = \sum_{\varrho,\,\sigma=1}^{2}\ \sum_{t_\varrho,\,t_\sigma=0}^{2} (a_{\varrho,\,t_\varrho;\,\sigma,\,t_\sigma} - \lambda\ \bar{\varepsilon}_{\varrho,\,t_\varrho;\,\sigma,\,t_\sigma})\ \bar{x}_{\varrho,\,t_\varrho}\ \bar{y}_{\sigma,\,t_\sigma} =$$

$= S'\ (A - \lambda E)\ S$ v němž jest

$$(38)\left\{\begin{array}{l} \bar{a}_{\varrho,\,t_\varrho;\,\sigma,\,t_\sigma} = \sum_{i,\,k=1}^{6} a_{i,\,k}\ x_i^{\varrho,\,t_\varrho}\ x_k^{\sigma,\,t_\sigma} \\ \bar{\varepsilon}_{\varrho\ t_\varrho;\ \sigma,\ t_\sigma} = \sum_{i,\,k=1}^{6} \varepsilon_{i,\,k}\ x_i^{\varrho,\,t_\varrho}\ x_k^{\sigma,\,t_\sigma} = x_1^{\varrho,\,t_\varrho} x_4^{\sigma,\,t_\sigma} - x_4^{\varrho,\,t_\varrho} x_1^{\sigma,\,t_\sigma} \\ + x_2^{\varrho,\,t_\varrho} x_5^{\sigma,\,t_\sigma} - x_5^{\varrho,\,t_\varrho} x_2^{\sigma,\,t_\sigma} + x_3^{\varrho,\,t_\varrho} x_6^{\sigma,\,t_\sigma} - x_6^{\varrho,\,t_\varrho} x_3^{\sigma,\,t_\sigma} \end{array}\right.$$

(Pokračování.)

Nová methoda rozkladu reducibilních mnohočlenů jedné proměnné.

Napsal Prof. *Zdeněk Chládek* v Hodoníně.

Jsou známy dvě methody, jak stanoviti dělitele mnohočlenu reducibilního: methoda starší, Kroneckerova[1]) posléze zjednodušená Rungem,[2]) opírající se o interpolační vzorce, a druhá, Mandlova,[3]) která vypočítává součinitele dělitelů hledaných přímo pomocí diofantických rovnic, jež vzniknou ze vztahů platících mezi součiniteli danými a hledanými. Obě vyžadují mnoho počítání a jsou proto pro praxi nevýhodné.

V následujícím vyložím methodu novou, vzniklou zjednodušením a sloučením obou uvedených, která už proto, že obecně po krátkých úvahách umožňuje zjistiti, zda předložený mnohočlen jest vůbec reducibilní nebo ne, uspoří mnoho počítání pokusného, s použitím tabulek multiplikačních pak omezuje počet nutných operací na minimum.

Mnohočlen daný s celistvými součiniteli budiž

$F(x) = c_0 + c_1\ x + c_2\ x^2 + \ldots + c_n\ x^n$, kde $c_n > 0$.

Jest patrno, že $F(x) \equiv c_0 \pmod{x}$ a každý dělitel $F(x)$ musí dle celistvého čísla *co* modulu, jež za x dosadíme, být shodný se svým absolutním členem.

[1]) Crelles Journ. sv. 92.
[2]) Crelles Journ. sv. 94.
[3]) Crelles Journ. sv. 113.

Dejme tomu, že by předložený mnohočlen dal se rozložiti ve dva nebo více dělitelů stupňů nižších s celistvými součiniteli, tudíž byl reducibilní, tak že ku př. by platilo

$$F(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x).$$

Je-li r číslo celistvé, musí pak existovati rozklad celistvého čísla $F(r) = \varphi_1(r) \cdot \varphi_2(r) \cdot \varphi_3(r)$ a členu absolutního $c_0 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3$, kde $\varphi_1(r) \equiv \gamma_1$, $\varphi_2(r) \equiv \gamma_2$, $\varphi_3(r) \equiv \gamma_3 \pmod r$. Máme tu dvě skupiny čísel; každému z čísel skupiny jedné jest kongruencí přiřazeno jisté číslo skupiny druhé; čísla jedné skupiny dají spolu násobena $F(r)$, čísla skupiny druhé pak c_0. Jest to jeden způsob rozkladu absolutního členu a to pro modul r.

Všimněme si nyní rozkladů, které jsou možny vždy, i když $F(r)$ a c_0 jsou prvočísly. Jsou to rozklady $F(r) = 1 \cdot F(r)$, $c_0 = 1 \cdot c_0$, které si též vždy odpovídají. Nasvědčovaly by dělitelé $\varphi_1(x)$ pro který $\varphi_1(r) = 1$. Možnost, že by jeden z hledaných dělitelů pro $x = r$ stal se rovným jedné, vyloučíme tím, že zvolíme $r > \varrho$, kde ϱ značí horní mez absolutních hodnot kořenů rovnice $F(x) = 0$, již určíme dle známého vzorce $\varrho = M + 1$, při čemž $M = \frac{|c_m|}{c_n}$ a c_m značí součinitele největší absolutní hodnoty z řady součinitelů mnohočlenu $F(x)$. V mnohých případech bude však lze udati číslo mnohem menší co horní mez kořenů. Volíme-li modul r se zřením k uvedené nerovnině, můžeme rozklad $1 \cdot F(r)$ z našich úvah vyloučiti.

Můžeme pak říci, že předložený mnohočlen $F(x)$ jest *irreducibilní*, jestliže pro $r > \varrho$ celistvé číslo $F(r)$ nemá dělitelů skutečných shodných s děliteli svého členu absolutního c_0, jednotku a c_0 v to počítaje. Jest to podmínka postačující, nutná nikoliv.

Obecně nebude rozklad absolutního členu c_0 uvedenými podmínkami stanoven jednoznačně. Proto zvolíme si další modul $s > r$. Vyhledáme-li nyní přípustné rozklady absolutního členu, máme druhý způsob jeho rozkladu. Oba způsoby musí souhlasit v jistém rozkladu, jinak jest $F(x)$ irreducibilní.

Obecně rozkladů souhlasných bude víc. Tu uvažujeme následovně. V intervalu (ϱ, ∞) $F(x)$ s rostoucím x stále roste, totéž platí o všech dělitelích. Máme-li dle modulu r rozklad $F(r) = R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$ a $c_0 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3$, kde $R_1 \equiv \gamma_1$, $R_2 \equiv \gamma_2$, $R_3 \equiv \gamma_3 \pmod r$ a dle mod. s rozklad $F(s) = S = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$, kde $S_1 \equiv \gamma_1$, $S_2 \equiv \gamma_2$ a $S_3 \equiv \gamma_3 \pmod s$, musí též býti $F(r) < F(s)$, $R_1 < S_1$, $R_2 < S_2$, $R_3 < S_3$. To nám dovoluje dále omeziti počet přípustných rozkladů. Ve většině případů bude nyní rozklad členu absolutního jednoznačně stanoven, jinak jest nutno uvažovati další rozklady pro modul $t > s$.

Budiž jednoznačný rozklad členu $c_0 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3$, pak shrneme tyto tři dělitele ve dva píšíce $\gamma_1 = a_0$, $\gamma_2 \cdot \gamma_3 = b_0$. Pro další

postup víme, že platí vztahy: $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + b_0 a_1$, $c_2 = -a_1 b_1 = C_2 = a_0 b_2 + b_0 a_2$ a obecně $C_r = c_r - \sum_1^{r-1} a_i b_{r-i} = a_0 b_r + b_0 a_r$ $(r = 1, 2, 3, \ldots n)$, kde c_0, a_0 a b_0 jsou čísla známá a $a_0, a_1, \ldots a_m$, $b_0, b_1, \ldots b_{n-m}$ součinitelé příslušných dělitelů $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ a $\psi(x) = \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x)$.

Pro součinitele a_1, b_1 stanovíme zbytky dle modulu s: $z_{a,1}$ a $z_{b,1}$. Jest totiž $a_1 = \frac{\varphi(s) - a_0}{s} \equiv \alpha_1 s + z_{a,1}$ a $b_1 = \frac{\psi(s) - b_0}{s} \equiv \equiv \beta_1 s + z_{b,1}$. První rovnice diofantická o neznámých α_1, β_1 bude $a_0(\beta_1 s + z_{b,1}) + b_0(\alpha_1 s + z_{a,1}) = c_1$ nebo

$$a_0\beta_1 + b_0\alpha_1 \quad \frac{c_1 - (a_0 z_{b,1} + b_0 z_{a,1})}{s}$$

zvolíme jisté řešení α_1, β_1 a vypočteme a_1, b_1, nato stanovíme zbytky $z_{a,2}$, $z_{b,2}$ z kongruenci $a_2 \equiv \frac{\varphi(s) - a_1 s - a_0}{s^2} \equiv \alpha_2 s + z_{a,2}$. . . Pro α_2, β_2 máme pak rovnici

$$a_0\beta_2 + b_0\alpha_2 \quad \frac{C_2 - (a_0 z_{b,2} + b_0 z_{a,2})}{s}$$

kde C_2 má svrchu uvedený význam. Nyní z jistého řešení α_2, β_2 vypočteme a_2, b_2, na to pak zbytky $z_{a,3}$, $z_{b,3}$ dle vzorce $a_3 \equiv \equiv \frac{\varphi(s) - a_2 s^2 - a_1 s - a_0}{s^3} \equiv \alpha_3 s + z_{a,3}$. Tak pokračujeme až do konce; další průběh počtů z uvedeného jest jasný. Theoreticky rovnice diofantické sice připouštějí řešení nekonečně mnoho avšak čísla α_r, β_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ budou malá, tím menší, čím větší byl zvolen modul s a bude tudíž možno nalézti je na první pohled bez soustavného řešení příslušných rovnic diofantických. Kdyby další počet ukázal, že jsme nepřipadli na hodnoty správné, jest pak hledati hodnoty jiné, což zajisté nevyžaduje mnoho času, neboť se jedná o počty prajednoduché. Může se ovšem ještě státi, že žádná soustava čísel α_r, β_r s dotyčnými zbytky nevede ku řešení naší úlohy; $F(x)$ jest pak irreducibilní, což bychom též seznali z rozkladu absolutního členu c_0 pro další modul $t > s$.

Když jsme byli stanovili $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, jest nám ještě stejnou cestou nalézti $\varphi_2(x)$ a $\varphi_3(x)$.

Celý postup objasníme na příkladu, jejž Runge i Mandl řeší cestou mnohem obtížnější.

Budiž dán mnohočlen

$$F(x) = 3x^7 + 7x^6 - 10x^5 - 19x^4 + 172x^3 + 71x^2 + 17x - 66.$$

Jakožto horní mez absolutních hodnot kořenů rovnice $F(x) = 0$ postačí vziti $\varrho = 5$, zvolíme tedy za moduly $r = 7$, $s = 10$. Jest pak

$$F(7) = 3143011 = 17 \cdot 293 \cdot 631,$$
$$F(10) = 35989204 = 2^2 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 23011.$$

Ježto první rozklad dává tři prvočísla, nebude míti náš mnohočlen zajisté více než tři dělitele irreducibilní, neboť jednotku co dělitele lze vyloučiti. Rozložíme-li však $F(10)$ všemi možnými způsoby ve tři činitele, shledáme, že není možno nalézti rozklad takový, aby současně každému z činitelů odpovídalo mezi děliteli $F(7)$ číslo menší; nebude tedy $F(x)$ míti tři, nýbrž toliko dva dělitele irreducibilní.

Rozložíme $F(7)$, $F(10)$, a -66 všemi možnými způsoby ve dva činitele. To dá, když v závorce připojíme vždy zbytek čísla předcházejícího dle dotyčného modulu (7 resp. 10), tuto soustavu:

$$\begin{aligned} F(7) &= 17(3) \cdot 184883(6) \quad (\alpha) \\ &= 293(6) \cdot 10727(3) \quad (\beta) \\ &= 631(1) \cdot 4981(4) \quad (\gamma) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -66 &= -1(6) \cdot +66(3) \quad (a) \\ &= -2(5) \cdot +33(5) \quad (b) \\ &= -3(4) \cdot +22(1) \quad (c) \\ &= -6(1) \cdot +11(4) \quad (d) \\ &= +1(1) \cdot -66(4) \quad (e) \\ &= +2(2) \cdot -33(2) \quad (f) \\ &= +3(3) \cdot -22(6) \quad (g) \\ &= +6(6) \cdot -11(3) \quad (h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(10) &= 2 \cdot 17994602 \quad (\delta) \\ &= 4 \cdot 8997301 \quad (\varepsilon) \\ &= 17 \cdot 2157052 \quad (\eta) \\ &= 23 \cdot 1564748 \quad (\vartheta) \\ &= 34 \cdot 1078526 \quad (\iota) \\ &= 46 \cdot 782374 \quad (\varkappa) \\ &= 68 \cdot 529263 \quad (\lambda) \\ &= 92 \cdot 391187 \quad (\mu) \\ &= 391 \cdot 92044 \quad (\nu) \\ &= 782 \cdot 46022 \quad (o) \\ &= 1564 \cdot 23011 \quad (\varrho) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -66 &= -1(9) \cdot +66(6) \quad (a) \\ &= -2(8) \cdot +33(3) \quad (b) \\ &= -3(7) \cdot +22(2) \quad (c) \\ &= -6(4) \cdot +11(1) \quad (d) \\ &= +1(1) \cdot -66(4) \quad (e) \\ &= +2(2) \cdot -33(7) \quad (f) \\ &= +3(3) \cdot -22(8) \quad (g) \\ &= +6(6) \cdot -11(9) \quad (h) \end{aligned}$$

Předně můžeme vyloučiti rozklady δ, ε, η, neboť nevyhovují podmínce, že dělitelé v $(\varrho, \sim)$ musí být funkce stále rostoucí. Taktéž vyloučíme rozklady a, b, f, h, neboť a, h nemá dle modulu 10 analogie v rozkladu $F(10)$ a b, f dle modulu 7 v rozkladu $F(7)$. Zato je vziti v úvahu rozklady α, ϑ jež rozkladem g jsou sobě přiřazeny. Vedly by ku dělíteli $\varphi(x)$ pro nějž $\varphi(7) = 17$, $\varphi(10) = 23$, tudíž $\varphi(x) = 2x + 3$. Ten však nevyhovuje, neboť 2 není dělitelem

součinitele u nejvyšší mocniny v mnohočlenu daném. Rozklady (ι), $\varkappa$, o v rozkladu absolutního členu nemají obdoby, tedy odpadají. Rozklad λ, jenž přes g jest sdružen s α nebo β neshoduje se s požadavkem rostoucich funkcí. Taktéž μ, jenž přes c náleží ku γ, pak ν, jenž přes d nebo e jest sdružen s γ. Zbývají pouze sdružené přes d a e rozklady γ a ϱ, kde z důvodu několikrát již uvedeného vyhovuje jedině sdružení přes d.

Jest tudíž

$\varphi(10) = 23011$, $\psi(10) = 1564$, $a_0 = +11$, $b_0 = -6$,

$a_1 \equiv o$, $b_1 \equiv 7$; $\quad 11\beta_1 - 6\alpha_1 = -6$; $\quad \alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$;
$a_1 = +10$, $b_1 = +7$;

$a_2 \equiv 9$, $b_2 \equiv 5$; $\quad 11\beta_2 - 6\alpha_2 = 0$; $\quad \alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$;
$a_2 = +9$, $b_2 = +5$;

$a_3 \equiv 2$, $b_3 \equiv 1$; $\quad 11\beta_3 - 6\alpha_3 = 6$; $\quad \alpha_3 = -1$, $\beta_3 = o$;
$a_3 = -8$, $b_3 = +1$.

Menší z obou dělitelů může být nejvýše stupně třetího; z toho soudíme, že $a_4 = +3$.

O správnosti toho se přesvědčíme, dosadíme-li a_4 do rovnice

$$c_4 = a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3.$$

Tato kontrola zároveň potvrdí, že skutečně jest

$$F(x) = (3x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 10x + 11)\ (x^3 + 5x^2 + 7x - 6).$$

O kvantisaci podmínečně periodických pohybů s applikací na Rutherford-Bohrův model atomu.*)

Viktor Trkal.

Úvod.

Účelem této práce jest odvoditi obecnou a — pokud mi známo — dosud neuveřejněnou podmínku (24) (variační princip), která platí pro kvantisaci podmínečně periodických pohybů, a doložiti ji na příkladech, z nichž většina se vztahuje k Rutherford-Bohrovu modelu atomu.

Pohyby podmínečně periodické**) získaly ve fysice na důležitosti od té doby, co Schwarzschild***) a Epstein†) applikovali methody

*) Předneseno ve zkrácené formě na týdenní schůzi Jednoty českých matematiků a fysiků 26. listopadu 1921.

**) Viz na př. *C. L. Charlier*, Mechanik des Himmels, Leipzig (Veit & Comp.) 1902, 1. Bd. p. 77. a násl.

***) Berl. Ber. 1916, p. 548.

†) Ann. d. Phys. *50* (1916), p. 489, *51* (1916), p. 168.