Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního. [IX.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 2, 77–85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121912

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Piše *M. Lerch.*

(Pokračování.)

14.

Uvažujme nyní funkci $\varphi(a+x)\,\varphi(b-x)$; její póly a residua jsou

$$x = -a - m,\quad R_m = -\varphi(b + a + m);$$
$$x = b + n,\quad R_n = \varphi(a + b + n).$$

Okolnost ta vede k identitě

$$\text{(II)}\qquad \varphi(a+x)\,\varphi(b-x) - \varphi(a)\,\varphi(b)$$
$$= \sum_0^{\infty} \varphi(a+b+n)\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{b+n} - \frac{1}{n+a+x} - \frac{1}{n+b-x}\right),$$

když se byla shledala celistvá transcendenta, tvořící rozdíl obou stran, býti stálou; nejpohodlněji se to zjistí studiem derivace

$$\varphi'(a+x)\,\varphi(b-x) - \varphi(a+x)\,\varphi'(b-x) =$$
$$= \sum_0^{\infty} \varphi(a+b+n)\left(\frac{1}{(n+a+x)^2} - \frac{1}{(n+b-x)^2}\right).$$

Vložme do (II) $b = 1 - a$, a pišme $x + a = u$:

$$\varphi(u)\,\varphi(1-u) - \varphi(a)\,\varphi(1-a)$$
$$\text{(19)}\qquad = \sum_0^{\infty} \varphi(n+1)\left(\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+1-a} - \frac{1}{n+u} - \frac{1}{n+1-u}\right)$$

Pravou stranu pišme

$$\sum_0^{\infty} \varphi(n+1)\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+u}\right) + \sum_1^{\infty} \varphi(n)\left(\frac{1}{n-a} - \frac{1}{n-u}\right),$$

k druhé připojme řadu

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-a} - \frac{1}{n-u}\right) = \frac{\varphi(1-u)}{u} - \frac{\varphi(1-a)}{a};$$

vyjde

$$\varphi(1+u)\,\varphi(1-u) - \varphi(1+a)\,\varphi(1-a).$$

$$(19^0)\qquad \sum_1^\infty \varphi(n+1)\left(\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n-a}-\frac{1}{n+u}-\frac{1}{n-u}\right)$$

čili pro $a=0$:

$$(19^*)\qquad \varphi(1+u)\,\varphi(1-u)=\sum_1^\infty \varphi(n+1)\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n+u}-\frac{1}{n-u}\right)$$

$$=-2u^2\sum_1^\infty \frac{\varphi(n+1)}{n(n^2-u^2)}.$$

Kladme dále v (II) $x=b-1$; obdržíme

$$(20)\ \varphi(a)\,\varphi(b)=$$

$$=\sum_0^\infty \varphi(a+b+n)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+a+b-1}-\frac{1}{a+n}-\frac{1}{b+n}\right).$$

Integrací dle a v mezích a, $a+1$ vychází odtud

$$\varphi(b)\,(E+\log a)=\sum_0^\infty\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{b+n}\right)[E+\log(a+b+n)]$$

$$-\int_0^\infty\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+b-1+x}\right)\varphi(a+b+x)\,dx;$$

veličina E je na pravé straně násobena řadou

$$\sum_0^\infty\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{b+n}\right)=\varphi(b),$$

i vypadne z rovnice, a píšeme-li $a+b-1=c$, zní výsledek

$$(21)\left|\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{c+x}\right)\varphi(c+x+1)\,dx+\varphi(c+1-a)\log a\\&=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{c-a+n}\right)\log(c+n);\end{aligned}\right.$$

vzorec ten lze ostatně odvoditi elementárním postupem přímo.

Obecněji máme pro nezávislé a, b, c:

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b+x}\right)\cdot\varphi(c+x+1)\,dx+$$

$$+\varphi(c+1-a)\log a-\varphi(c+1-b)\log b=$$

$$=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{c-b+\nu}-\frac{1}{c-a+\nu}\right)\log(c+\nu);$$

zaměníme-li a, b za $c+a$, $c+b$, kladouce dříve $c-1$ za c, vyjde po substituci $x+c$ za x

$$(21^*)\quad \int_c^{\infty}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)\varphi(x)\,dx+\varphi(a)\log(c-a)-\varphi(b)\log(c-b)$$

$$=\sum_0^{\infty}\left(\frac{1}{b+n}-\frac{1}{a+n}\right)\log(c+n),$$

kde se předpokládá $c > a, b$.

Pro $b \sim o$ je (člen $n = o$)

$$\varphi(b)\log(c-b)+\frac{\log c}{b}\sim\frac{\log c-\log(c-b)}{b}\sim\frac{1}{c}$$

a tedy

$$(22)\qquad \int_c^{\infty}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x}\right)\varphi(x)\,dx+\varphi(a)\log(c-a)$$

$$=\frac{1}{c}-\frac{\log c}{a}+\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{a+\nu}\right)\log(c+\nu).$$

Konvergence integrálu vyžaduje $c > o$, $c > a$; pouze v případě $a = 1$ stačí prostě $c > 0$; pak máme

$$\int_c^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x(x-1)}\,dx=\frac{1}{c}-\log c+\sum_1^{\infty}\frac{\log(c+\nu)}{\nu(\nu+1)},\quad c > o.$$

Předpokládejme malé c a rozštěpme integrál dle schematu

$$\int_c^1+\int_1^{\infty},$$

současně odečtěme výrazy

$$\int_c^1\frac{dx}{x}=-\log c,\quad \int_c^1\frac{dx}{x^2}=-1+\frac{1}{c},$$

i obdržíme

$$\int_c^1\left|\frac{\varphi(x)}{x-1}-\frac{\varphi(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right|dx+\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\varphi(x+1)\,dx$$

$$=1-\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)\log(c+\nu),$$

čili po přechodu k limitě pro $c \sim 0$

$$\int_0^1\frac{\varphi(x+1)-1}{x-1}\,dx-\int_0^1\frac{\varphi(x+1)}{x}\,dx+\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\varphi(x+1)\,dx$$

$$= 1 - \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu + 1}\right) \log \nu .$$

Tu jest však

$$\int_{0}^{1} \frac{\varphi(x+1)}{x} dx = 1 - A(o), \quad \int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \varphi(x+1)\, dx = A(o)$$

tedy zbývá

$$(22^{0}) \qquad \int_{0}^{1} \frac{\varphi(x+1)}{x-1} dx = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) \log \nu .$$

Píšeme-li (22) ve tvaru

$$(22^{*}) \qquad \int_{c}^{\infty} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx = J$$

$$= -\frac{1}{c} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) \log\left(1 + \frac{\nu}{c}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) \log \frac{c+n}{c-a},$$

vidíme, že jsou obě strany analytické funkce litery a, jednoznačné a pravidelné v rovině opatřené řezem $(-\infty \ldots c)$, a podmínka real. $a < c$ postačuje k platnosti rovnice (22).

Rovnice ta se bezprostředně verifikuje, derivuje-li se dle c; ježto pak pravá strana (22*) blíží se nule pro nekonečně rostoucí c, je rovnice dokázána.

Užijme poloukonvergentního rozvoje

$$\varphi(x) = E + \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{1}^{p-1} (-1)^{\nu} \frac{B_\nu}{2\nu\, x^{2\nu}} + (-1)^{p} \frac{\Theta B_p}{2p\, x^{2p}};$$

$$0 < \Theta < 1;$$

poněvadž

$$\int_{c}^{\infty} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x}\right) \frac{\Theta\, dx}{x^{2p}} = \vartheta \int_{c}^{\infty} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^{2p}},$$

obdržíme pro integrál (22*)

$$J = \int_{c}^{\infty} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x}\right) \left(E + \log x - \frac{1}{2x}\right) dx$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{p-1} (-1)^{\nu} \frac{B_\nu}{2\nu} J_\nu + (-1)^{p} \frac{B_p}{2p} \vartheta J_p, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

$$J_\nu = \int_{c}^{\infty} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^{2\nu}}.$$

Poněvadž v případě $c > a$
$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}},$$
máme
$$J_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+2\nu)\, c^{n+2\nu}} = \frac{1}{a^{2\nu}} \left\{ \log\frac{c}{c-a} - \sum_{k=1}^{2\nu} \frac{1}{k}\left(\frac{a}{c}\right)^k \right\},$$
$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x}\right)\log x\,dx = \sum_1^\infty \frac{a^n}{c^n}\left\{\frac{\log c}{n} + \frac{1}{n^2}\right\}$$
$$= \log c \log\frac{c}{c-a} + \operatorname{dil}\frac{a}{c},$$
$$\int_c^\infty \left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{a}\log\frac{c}{c-a} - \frac{1}{c}.$$
Po dosazení těchto hodnot obdržíme semikonvergentní rozvoj
$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_c^\infty \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x}\right) \varphi(x)\,dx \\ &= \left(E + \log c - \frac{1}{2a}\right)\log\frac{c}{c-a} + \frac{1}{2c} + \operatorname{dil}\frac{a}{c} \\ &+ \sum_{\nu=1,2,3,\ldots} (-1)^\nu \frac{B_\nu}{2\nu\, a^{2\nu}} \left[\log\frac{c}{c-a} - \sum_{k=1}^{2\nu} \frac{1}{k}\left(\frac{a}{c}\right)^k\right], \end{aligned}\right.$$
při čemž chyba je částkou prvního vynechaného člena.

Případ $a = 1$ dává zvláště
$$(23^0)\quad \frac{1}{c} - \log c + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right)\log(c+\nu) =$$
$$= \left(E + \log c - \frac{1}{2}\right)\log\frac{c}{c-1} +$$
$$+ \frac{1}{2c} + \operatorname{dil}\frac{1}{c} + \sum_{\nu=1,2,3,\ldots} (-1)^\nu \frac{B_\nu}{2\nu}\left[\log\frac{c}{c-1} - \sum_{k=1}^{2\nu}\frac{1}{k\,c^k}\right];$$
tak pro $c = 5$ nám členy až po B_4 dají devět míst, kdežto řada na levé straně konverguje zvolna.

V (23) dosaďme b za a a odečtěme výsledky:
$$(23^*)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_c^\infty \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\log(c-b) - \varphi(a)\log(c-a) \\ &\qquad + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{b+n} - \frac{1}{a+n}\right)\log(c+n) = \end{aligned}\right.$$

$$
(23^*)\quad \left\{\begin{aligned} &-(E+\log c)\log\frac{c-b}{c-a}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\log c+\operatorname{dil}\frac{a}{c}-\operatorname{dil}\frac{b}{c}\\ &-\sum_{\nu=1,2,3,\dots}(-1)^{\nu}\,\frac{B_\nu}{2\nu}\left[\frac{D_{2\nu}\left(\frac{a}{c}\right)}{a^{2\nu}}-\frac{D_{2\nu}\left(\frac{b}{c}\right)}{b^{2\nu}}\right],\end{aligned}\right.
$$

při čemž obecně

$$
D_n(x)=\log\frac{1}{1-x}-\sum_{1}^{n}\frac{x^k}{k}.
$$

V těchto semikonvergentních rozvojích se předpokládá $c > a$, $c > b$; pro $c = a$, $b < a$ bychom užili v řadě

$$
G=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{b+n}-\frac{1}{a+n}\right)\log(a+n)
$$

rozvoje

$$
\frac{1}{b+n}-\frac{1}{a+n}=\sum_{\mu=2}^{\infty}\frac{(a-b)^{\mu-1}}{(a+n)^{\mu}},
$$

aby se dostalo vyjádření

$$
G=\sum_{\mu=2}^{\infty}(a-b)^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log(a+n)}{(a+n)^{\mu}},
$$

načež pro veliká a možno pro vnitřní součet užiti semikonvergentního rozvoje pro funkci $R(a,s)=\Sigma(a+n)^{-s}$, derivovaného dle s:

$$
R(a,s)=\frac{1}{(s-1)a^{s-1}}+\frac{1}{2a^{s}}+\sum_{\nu}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu\,a^{s+2\nu-1}}\binom{s+2\nu-2}{2\nu-1}.
$$

$$
\sum_{0}^{\infty}\frac{\log(a+n)}{(a+n)^{s}}=\frac{1}{(s-1)^2\,a^{s-1}}+\left(\frac{a}{s-1}+\frac{1}{2}\right)\frac{\log a}{a^{s}}
$$

$$
+\sum_{\nu}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu\,a^{s+2\nu-1}}\binom{s+2\nu-2}{2\nu-1}\left[\log a-\sum_{k=0}^{2\nu-2}\frac{1}{s+k}\right].
$$

Znamenejme $a-b=z$; zde máme násobiti z^{s-1} a sečísti výsledky pro $s = 2, 3, 4, \dots$ Operace se značně zjednoduší, vyjdeme-li předem z řady

$$
(24)\quad H=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{b+n}-\frac{1}{a+n}\right)\frac{1}{(a+n)^{s}}=\sum_{\mu=2}^{\infty}(a-b)^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^{s+\mu}}.
$$

Obdržíme $(a-b=z)$ píšíce $\mu-1=m$

$$
H=\sum_{1}^{\infty}\frac{z^m}{(s+m)\,a^{s+m}}+\sum_{1}^{\infty}\frac{z^m}{2\,a^{s+m+1}}
$$

$$
+\sum_{\nu}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}\sum_{m=1}^{\infty}z^m\left(\frac{\binom{s+m+2\nu-1}{2\nu-1}}{a^{s+m+2\nu}}\right).
$$

Dosadíme-li do Eulerovy řady

$$\sum_{1}^{\infty} c_m x^m = \sum_{\varrho=1}^{\infty} \Delta^{\varrho-1} c_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\varrho} \text{ hodnotu } c_m = \binom{s+m+2\nu-1}{2\nu-1},$$

máme

$$\Delta^{\varrho-1} c_m = \binom{s+m+2\nu-1}{2\nu-\varrho}, \quad \varrho \leq 2\nu,$$

a pro další ϱ je $\Delta^{\varrho-1} c_m = 0$: tudíž

$$\sum_{m} \frac{z^m}{a^m}\binom{s+m+2\nu-1}{2\nu-1} = \sum_{\varrho=1}^{2\nu}\binom{s+2\nu}{2\nu-\varrho}\left(\frac{z}{a-z}\right)^{\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{2\nu}\binom{s+2\nu}{2\nu-\varrho}\frac{z^{\varrho}}{b^{\varrho}}$$

a tak vychází

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a-b)^m}{(s+m)\,a^{s+m}} + \frac{a-b}{2b\,a^{s+1}}$$

(24[1])

$$+ \sum_{\nu=1,2,3,\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu\, a^{s+2\nu}} \sum_{\varrho=1}^{2\nu} \binom{s+2\nu}{2\nu-\varrho}\left(\frac{a}{b}-1\right)^{\varrho}.$$

Derivace

$$\binom{s+2\nu}{2\nu-\varrho}' = \binom{s+2\nu}{2\nu-\varrho}\sum_{k=\varrho+1}^{2\nu}\frac{1}{s+2\nu-k}$$

má pro $s = o$ hodnotu

$$\binom{2\nu}{\varrho}\sum_{\alpha=\varrho+1}^{2\nu}\frac{1}{\alpha} = \binom{2\nu}{\varrho}\left[\varphi(2\nu+1) - \varphi(\varrho+1)\right]$$

a tedy obdržíme porovnáváním derivací na $s = o$:

$$(25)\ \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b+n} - \frac{1}{a+n}\right)\log(a+n) = \mathrm{dil}\left(1-\frac{b}{a}\right) + \log a \log\frac{a}{b} + \\ + \frac{a-b}{2ab}\log a + \sum_{\nu=1,2,3,\ldots}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu\,a^{2\nu}}\left\{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2\nu}-1\right]\left[\log a - \varphi(2\nu+1)\right]\right. \\ \left. + \sum_{\varrho=1}^{2\nu}\binom{2\nu}{\varrho}\varphi(\varrho+1)\left(\frac{a}{b}-1\right)^{\varrho}\right\} \end{cases}$$

Při odvození vyskytla se vlastně jen podmínka $|a-b| < a,\ a > o$.

Klademe-li postupně $b = u$ a $b = v$, obdržíme odečtením polokonvergentní rozvoj veličiny

$$\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{u+n} - \frac{1}{v+n}\right)\log(a+n), \quad |a-u| < a, \quad |a-v| < a,$$

takže můžeme počítati řadu na př.

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\log \nu}{(3+\nu)(5+\nu)} \text{ převodem na } \sum_{0}^{\infty}\frac{\log(m+\nu)}{(m+3+\nu)(m+5+\nu)},\ m > 5.$$

Také funkci [7, 7*]

$$(26)\quad \Phi(u) = \int_0^\infty \frac{\log|\sin x\pi|\,dx}{(u+x)^2} = -\frac{\pi^2}{2} + \pi\cot u\pi \,.\, \log u + \frac{\log \pi}{u}$$

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n-u} - \frac{1}{n+u}\right)\log n$$

lze podle této methody (vynecháním několika členů) počítati.

Na tuto řadu vede stanovení integrálu

$$\int_0^1 \psi(x)\sin x\pi\,dx;$$

vyjděme z našeho vzorce [či z Kummerova pro $\log \Gamma(x)$ po částečné integraci]

$$\psi(x)\sin x\pi + \frac{\pi}{2}\cos x\pi + (E + \log 2\pi)\sin x\pi$$

$$= -\sum_1^\infty \log\frac{\nu+1}{\nu}\,.\,\sin(2\nu+1)\,x\pi;$$

pro lichá cel. m jest

$$\int_0^1 \sin m x\pi\,dx = \frac{2}{\pi m},$$

a tedy

$$\int_0^1 \psi(x)\sin x\pi = -(E + \log 2\pi)\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}S,$$

$$(27^1)\quad S = \sum_1^\infty \frac{\log\frac{\nu+1}{\nu}}{2\nu+1} = \sum_1^\infty\left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1}\right)\log\nu.$$

Přejdeme-li k funkci $\varphi(x) = E + \psi(x)$, obdržíme tedy

$$(27^2)\quad -\pi\int_0^1 \varphi(x)\sin x\pi\,dx = 2\log 2\pi + 2S,$$

kde dle (26)

$$(27^3)\qquad 2S = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2} - 2\log\pi,$$

čímž vychází zároveň vztah mezi číselnými konstantami

$$(27^4)\quad -\pi\int_0^1 \varphi(x)\sin x\pi\,dx = \log 4 + \frac{\pi^2}{2} + \int_0^\infty \frac{\log|\sin x\pi|\,dx}{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}$$

V řadě Kummerově

$$\log \Gamma(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)(E + \log 2\pi) - \frac{1}{2}\log\frac{\sin x\pi}{\pi} +$$
$$+ \sum_{1}^{\infty} \frac{\log n}{n\pi} \sin 2n\, x\pi$$

násobme obě strany $\cos u x\pi$ a integrujme od $x = 0$ do $x = 1$; při tom buď u celistvé a liché. Máme pak

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right) \cos u x\pi\, dx = \frac{2}{u^2\pi^2}, \quad \int_0^1 \log\frac{\sin x\pi}{\pi} \,.\, \cos u x\pi\, du = 0,$$

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \sin 2nx\pi \cos u x\pi\, dx = \frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{2n+u} + \frac{1}{2n-u}\right)$$
$$= \frac{2}{u\pi}\left(\frac{1}{2n-u} - \frac{1}{2n+u}\right),$$

a tak máme (pro cel. lichá u)

$$(28^1) \qquad u\pi^2 \int_0^1 \log \Gamma(x) \cos u x\pi\, dx =$$
$$2\,\frac{E + \log 2\pi}{u} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu - \frac{u}{2}} - \frac{1}{\nu + \frac{u}{2}}\right)\log \nu,$$

což vzhledem k (26) má hodnotu

$$(28^2) \qquad \frac{\pi^2}{2} + 2\,\frac{E + \log 2}{u} + \varphi\left(\frac{u}{2}\right).$$

$$E + \log 2 = 1{\cdot}27036284546$$

$$\frac{\pi^2}{E + \log 2} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{54 + \cfrac{1}{3 \ldots}}}}}$$

Poznamenejme ještě, že

$$2e^{E} = 3{\cdot}56214\ldots$$

je blízké kořenu rovnice

$$24\, x^2 - 81\, x = 16, \qquad x = 3{\cdot}562152\ldots$$

(Dokončení.)