Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Otomar Pankraz

Základní rovnice pro časový rozpad statistických kolektivů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 8, 301--309

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121900`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1933

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Základní rovnice pro časový rozpad statistických kolektivů.

Otomar Pankraz.

(Došlo 15. března 1933.)

V následujícím hodlám pokračovati v úvahách, které provedl p. prof. E. Schoenbaum v pojednání „*O jisté integrodifferenciální rovnici* (Rozpravy České akademie 1920)". Obšírné propracování vyjde v časopisu československých pojistných matematiků „*Aktuárské vědy*" pod názvem „*Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs*".

§ 1.

[1.] — Uvažujme konečné množství (soubor, souhrn, kolektiv) individuí s následujícími vlastnostmi:

1. Každé individuum má jako *znaky* přiřazena čísla *1*, *2*, . . ., n.
2. V určitém okamžiku každé individuum může jen jediný znak ztratiti resp. znovu nabýti.
3. Ztráta znaku znamená *výstup* ze souhrnu, získání ztraceného znaku má za následek *návrat* do souhrnu.

Pozorujme toto množství v časovém období $0 \leq t \leq 1$ a hledáme počet $l(t, \tau)$ individuí, která v okamžiku t náležela do souhrnu po dobu τ.

Zřejmě

$l(0, 0)$ = počáteční stav (počet) individuí v souhrnu,
$l(t, 0) = l_0(t)$ = rozložení *prvého* vstupu do souboru,
$l(t, t)$ = rozložení individuí, která se *nezúčastní* rozpadu.

Z významu veličin plyne definiční obor

$$0 \leq \tau \leq t \leq 1.$$

Kromě toho definujeme: Je-li $l_0(t)$ *hladká* funkce (t. j. spojitá i se svojí první derivací), nazveme soubor *otevřeným*. Omezíme se na soubory tohoto typu.

[2.] — K popisu průběhu rozpadu použijeme funkcí ($i = 1, 2, \ldots, n$):

1. *Intensity výstupu:*

$\eta_i(t, \tau)$ = intensita, s níž *vystupuje* individuum ze souhrnu následkem ztráty znaku i; závisí na t a τ.

2. *Intensity návratu:* Individuum opustilo soubor následkem ztráty znaku i v okamžiku $u < t$ a doposud se nevrátilo.

$\varrho_i(t, u)$ = intensita, s níž se individuum *vrátí* do souhrnu následkem opětného získání znaku i právě v okamžiku t.

3. *Pravděpodobnosti pro nepřetržitý výskyt mimo souhrn:*

$p_i(t, \xi)$ = pravděpodobnost, že individuum, které v okamžiku $\xi < t$ ztratilo znak i, jest v okamžiku t stále ještě (t. j. bez přerušení) beze znaku i.

§ 2.

Sestavení rovnice pro soubor otevřený. — *Předpoklad:* Popis rozpadu dán jest *hladkou* funkcí $l(t, \tau)$.

Zvolme v oboru $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ libovolný *vnitřní* bod (t, τ).

(I.) V $(t, t + \Delta t)$ nastanou změny: 1. vystoupí individuí

$$l(t, \tau) \, . \left\{ \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t, \tau) \right\} . \, \Delta t \doteq A(t, \tau) \, \Delta t;$$

2. přibudou individua, která v okamžiku $\xi < t$ vystoupila a doposud se nevrátila. Jejich počet jest

$$\Delta t \int_{\tau}^{t} l(\xi, \tau) \, . \left\{ \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\xi, \tau) p_i(t, \xi) \, \varrho_i(t, \xi) \right\} d\xi \doteq B(t, \tau) \, . \, \Delta t.$$

(II.) Počet individuí, která v období $(t, t + \Delta t)$ byla v souhrnu, jest

$$l(t + \Delta t, \ \tau + \Delta t) - l(t, \tau).$$

Z (I.) a (II.)

$$\frac{l(t + \Delta t, \tau + \Delta t) - l(t, \tau)}{\Delta t} = B(t, \tau) - A(t, \tau).$$

Protože podle předpokladu $l(t, \tau)$ jest hladká, lze použíti

$$l(t + \Delta t, \tau + \Delta t) = l(t, \tau) + \Delta t \left[\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial l}{\partial \tau} \right]_{t + \vartheta \Delta t, \, \tau + \vartheta \Delta t}$$

$$(0 < \vartheta < 1),$$

z čehož

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{l(t + \Delta t, \tau + \Delta t) - l(t, \tau)}{\Delta t} = \frac{\partial l(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial l(t, \tau)}{\partial \tau}.$$

Celkem tedy plyne rovnice typu (η, α jsou známé funkce)

$$\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau}=\mathrm{l}\,.\,\eta+\int_{\tau}^{t}\mathrm{l}(\xi,\tau)\,\alpha(\xi,t,\tau)\,\mathrm{d}\xi$$

s počáteční podmínkou

$$\mathrm{l}(t,0)=\mathrm{l}_0(t).$$

§ 3.

Řešení rovnice

$$(+)\ldots\begin{cases}\dfrac{\partial \mathrm{l}(t,\tau)}{\partial t}+\dfrac{\partial \mathrm{l}(t,\tau)}{\partial \tau}=\mathrm{l}(t,\tau)\,.\,\eta(t,\tau)+\lambda\displaystyle\int_{\tau}^{t}\mathrm{l}(\xi,\tau)\,\alpha(\xi,t,\tau)\,\mathrm{d}\xi\\ (0\leq\tau\leq\xi\leq t\leq 1,\\ \lambda=\text{proměnlivý parametr obecně komplexní}).\end{cases}$$

Dokáže se *věta:*

V rovnici (+) buďtež η a α na svém definičním oboru *hladké* funkce. Kromě toho budiž na $0\leq t\leq 1$ dána počáteční podmínka $\mathrm{l}(t,0)=\mathrm{l}_0(t)$, při čemž $\mathrm{l}_0(t)$ jest rovněž hladká funkce. Pak existuje jedna jediná funkce $\mathrm{l}(t,\tau;\lambda)$, která 1. jest hladká v $0\leq\tau\leq t\leq 1$, 2. jest celistvou transcendentou v rovině proměnné λ, a 3. při uvedené počáteční podmínce vyhovuje dané integrodiferenciální rovnici.

Postup řešení: Zvolme formálně $\mathrm{l}(t,\tau;\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\mathrm{A}_i(t,\tau)$. Značí-li $\mathrm{D}[\mathrm{l}]=\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau}$, pak po dosazení do (+) a srovnáním koeficientů u mocnin parametru λ plynou podmínky

$$(++)\ldots\begin{cases}\mathrm{D}[\mathrm{A}_0]=\eta\,\mathrm{A}_0\\ \mathrm{D}[\mathrm{A}_i]=\eta\,\mathrm{A}_i+\displaystyle\int_{\tau}^{t}\mathrm{A}_{i-1}\alpha\,\mathrm{d}\xi\quad(i=1,2,3,\ldots),\end{cases}$$

což jsou parciální diferenciální rovnice pro koeficienty A_i ($i=0,1,2,\ldots$). Podaří-li se určit A_i, třeba dokázat, že formální řady

$$\mathrm{l}(t,\tau;\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\mathrm{A}_i,\ \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t}=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial t},\ \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau}=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial \tau}$$

stejnoměrně konvergují v určitém oboru. Dále nutno verifikovat, že $\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\mathrm{A}_i$ vskutku jest řešením rovnice (+), a dokázat pak unicitu řešení při dané počáteční podmínce.

§ 4.

Rovnice (++) mají řešení:

$$1. \qquad A_0(t, \tau) = l_0(t - \tau) \, . \exp\left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta} \, d\xi\right),$$

kde

$$\bar{\eta} \equiv \eta\left(\xi + \frac{t - \tau}{2}, \; \xi - \frac{t - \tau}{2}\right),$$

při čemž

$$A_0(t, 0) = l_0(t).$$

2. $(i = 1, 2, 3, \ldots)$

$$A_i(t, \tau) \, . \exp\left(-\int_{\frac{\tau+t}{2}}^{\frac{t-\tau}{2}} \bar{\eta} \, d\xi\right) =$$

$$= \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} d\xi_1 \, . \exp\left(-\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \bar{\eta} \, d\xi_2\right) \times$$

$$\times \int_{\xi_1 - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1 + \frac{t-\tau}{2}} A_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t - \tau}{2}\right) \alpha \left(\xi_3, \xi_1 + \frac{t - \tau}{2}, \; \xi_1 - \frac{t - \tau}{2}\right) d\xi_3,$$

při čemž

$$A_i(t, 0) \equiv 0.$$

Z 1. a 2. snadno plyne, že *počáteční podmínka pro* $l(t, \tau)$ *jest vskutku splněna.*

§ 5.

Konvergence řady $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i(t, \tau)$. — Odvodíme si dříve následující *pomocnou větu 1. Předpoklad: V příslušných definičních oborech jest*

$$0 \leq l_0(t - \tau) < M = \text{konst.},$$

$$| \eta(t, \tau) | < N = \text{konst.}$$

a

$$| \alpha(\xi, t, \tau) | < L = \text{konst.}$$

Tvrzení: Pro každý bod oboru $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ *platí*

$$|A_i(t, \tau)| < B_0 \frac{(e^{2N}Lt)^i}{i!} \qquad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

(B_0 = *positivní konst. nezávislá na* i.)

Důkaz: Pro A_0 jest

$$|A_0(t, \tau)| < Me^N = B_0.$$

Pro A_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) platí odhady

$$|A_i(t, \tau)| < \exp\left(\int_0^1 N\,d\xi\right) \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} d\xi_1 \exp\left(\int_0^1 N\,d\xi_2\right) . \int_{\xi_1 - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1 + \frac{t-\tau}{2}} L \,.\, |A_{i-1}|\,d\xi_3 <$$

$$< e^{2N} L \int_0^1 d\xi_1 \,.\, \int_0^t \left| A_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)\right| d\xi_3.$$

Definuji-li

$$B_i(t) = e^{2N} L \int_0^t B_{i-1}(\xi_3)\,d\xi_3 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(B_0 = \text{konst.} > 0),$$

pak

$$B_i(t) = B_0 \frac{(e^{2N}Lt)^i}{i!}.$$

Protože

$$|A_0(t, \tau)| < B_0,$$

snadno úplnou indukcí

$$|A_i(t, \tau)| < B_i(t),$$

což bylo dokázati.

Závěr pomocné věty 1: Jest

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i |A_i(t, \tau)| < \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i B_i(t) < B_0 \,.\, \exp(e^{2N}L\lambda t).$$

Z toho plyne, že $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i A_i(t, \tau)$ *absolutně a stejnoměrně konverguje pro každé konečné* λ *a pro každou dvojici* (t, τ) *v* $0 \leq \tau \leq t \leq 1$.

§ 6.

Konvergence řad derivovaných. — Jsou-li $\mathrm{l}_0(t-\tau)$, $\eta(t, \tau)$, $\alpha(\xi, t, \tau)$ *hladké* funkce ve svých (uzavřených) definičních oborech, pak existují konstanty M, N, L, že platí

$$\mathrm{l}_0(t-\tau), \quad \left|\frac{\partial \mathrm{l}_0}{\partial t}\right| \text{ a } \left|\frac{\partial \mathrm{l}_0}{\partial \tau}\right| < M,$$

$$|\eta(t, \tau)|, \quad \left|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right| \text{ a } \left|\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right| < N,$$

$$|\alpha(\xi, t, \tau)|, \quad \left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right| \text{ a } \left|\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right| < L.$$

Pomocná věta 2: Buďtež $\mathrm{l}_0(t-\tau)$, $\eta(t, \tau)$, $\alpha(\xi, t, \tau)$ *ve svých definičních oborech hladké funkce. Pak*

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t, \tau)}{\partial t}\right| < \frac{(Bt)^i}{i!} + C \int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \int_0^t \left|\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right)\right| \mathrm{d}\xi_3,$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots),$$

kde positivní konstanty B a C nezávisí na i. Analogický odhad platí pro $\left|\dfrac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial \tau}\right|$.

Důkaz plyne přímo z výrazů pro $\dfrac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial t}$ resp. $\dfrac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial \tau}$, použijeme-li odhady uvedené v pomocné větě 1.

Pomocná věta 2': Kromě předpokladů v pomocné větě 2. budiž

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial t}\right| \text{ a } \left|\frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial \tau}\right| < K = \text{konst.} \quad (K \geq 1).$$

Pak $(i = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t, \tau)}{\partial t}\right| \text{ a } \left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t, \tau)}{\partial \tau}\right| < \frac{(Et)_i}{i!},$$

kde $E = B + CK$.

Důkaz plyne z pomocné věty 2 úplnou indukcí.

Závěr pomocné věty 2': Jest

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t, \tau)}{\partial t}\right| \text{ a } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \left|\frac{\partial \mathrm{A}_i(t, \tau)}{\partial t}\right| < e^{E\lambda t},$$

z čehož následuje, že *řady* $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{\partial A_i}{\partial t}$ a $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{\partial A_i}{\partial \tau}$ *absolutně a stejnoměrně konvergují pro* $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ *a pro každé konečné* λ.

§ 7.

Verifikace, že odvozená řada $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i$ vyhovuje dané parciální integrodiferenciální rovnici, jest pouhým závěrem předcházejících úvah. Důkaz unicity řešení při daných počátečních podmínkách provede se některou z obvyklých metod.

Z věty o řešení rovnice (+) plyne: *Popis časového rozpadu uvažovaného souboru jest dán funkcí* $\mathrm{l}(t, \tau; 1)$.

§ 8.

Hledejme *jiný tvar nekonečné řady pro* $\mathrm{l}(t, \tau; 1)$. V podstatě se jedná o různá seskupení členů v řadě $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i(t, \tau)$ v případě, že $\lambda = 1$.

Vyjděme z rovnice [s danou počáteční podmínkou $\mathrm{l}(t, 0) = \mathrm{l}_0(t)$]

$$\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau} = \mu \left\{ \mathrm{l}\eta + \int_{\tau}^{t} \mathrm{l}(\xi, \tau)\, \alpha(\xi, t, \tau)\, d\xi \right\},$$

kde μ = obecně komplexní parametr. Tato rovnice jest ekvivalentní integrální rovnici

$$\mathrm{l}(t, \tau) = \mathrm{l}_0(t - \tau) + \mu \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \mathrm{F}\left(\xi, \frac{t-\tau}{2}; 1\right) d\xi,$$

kde

$$\mathrm{F}\left(\xi, \frac{t-\tau}{2}; 1\right) \equiv \mathrm{l}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \eta\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) +$$

$$+ \int_{\xi - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi + \frac{t-\tau}{2}} \mathrm{l}\left(\xi_1, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \alpha\left(\xi_1, \xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) d\xi_1.$$

Použijeme-li známých vět z teorie Volterrových integrálních rovnic, ihned plyne nový tvar řešení

$$\mathrm{l}(t, \tau; 1) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{F}_i(t, \tau)$$

se členy

$$\mathrm{F}_0(t, \tau) = \mathrm{l}_0(t - \tau),$$

$$\mathrm{F}_i(t, \tau) =$$

$$= \int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \mathrm{d}\xi \Bigg[\mathrm{F}_{i-1}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \eta\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) +$$

$$+ \int\limits_{\xi-\frac{t-\tau}{2}}^{\xi+\frac{t-\tau}{2}} \mathrm{F}_{i-1}\left(\xi_1, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \alpha\left(\xi_1, \xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \mathrm{d}\xi_1 \Bigg]$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots).$$

§ 9.

Do formulí pro koeficienty $\mathrm{A}_i(t, \tau)$ můžeme zavésti následující *pomocnou pravděpodobnost*. Předpokládejme, že vystouplá individua se nevracejí a uvažujme středy částečných intervalů, které vzniknou vložením hodnoty τ do časového úseku $< 0, t >$. Pak integrál rovnice

$$\frac{1}{\mathrm{l}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{dl}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right)}{\mathrm{d}\xi} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \eta_i\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) = \bar{\eta}$$

v mezích $< \frac{t-\tau}{2}, \frac{t+\tau}{2} >$ jest

$$\mathrm{l}(t, \tau) = \mathrm{l}(t - \tau, 0) \exp\left(\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, \mathrm{d}\xi\right).$$

Smysl mají jen hodnoty $(t - \tau)$, pro které $\mathrm{l}(t - \tau, 0) \neq 0$, takže

$$\frac{\mathrm{l}(t, \tau)}{\mathrm{l}(t - \tau, 0)} = \exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, d\xi\right) = \bar{\mathrm{p}}(t, \tau).$$

Položíme-li $t - \tau = a$, čímž

$$\frac{\mathrm{l}(t, \tau)}{\mathrm{l}(t - \tau, 0)} = \frac{\mathrm{l}(a + \tau, \tau)}{\mathrm{l}(a, 0)} = \bar{\mathrm{p}},$$

jest $\bar{\mathrm{p}}$ *pravděpodobnost, že individuum od svého vstupu v a až do okamžiku pozorování* $(a + \tau)$ *bude trvale v souhrnu.*

*

L'équation fondamentale pour la désagrégation d'un ensemble statistique au cours du temps.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur se propose de continuer les considérations du M. E. Schoenbaum (voir: E. Schoenbaum: Anwendung der Volterra'schen Integralgleichungen in der mathematischen Statistik, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1924, 1925). Pour plus de détails je renvoie à mon mémoire „Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs" qui paraîtra dans les „Aktuárské vědy" (Journal tchécoslovaque pour les sciences actuarielles, rédigé par Dr. E. Schoenbaum, Prague).