Jan Srb

Lineární konstrukce kvadratické nadplochy n-rozměrném prostoru z $\frac{n(n+3)}{2}$ bodů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. 2, 53--67

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121888`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Lineární konstrukce kvadratické nadplochy n-rozměrného prostoru z $\frac{n(n+3)}{2}$ bodů.

Jan Srb, Olomouc.

(Došlo dne 30. října 1939.)

Kvadratická nadplocha n-rozměrného prostoru je určena $\frac{n(n+3)}{2}$ obecnými body. Konstrukce, které se žádají k sestrojení kvadratické nadplochy,[1]) lze provést, dovedeme-li sestrojit polárnou nadrovinu obecného bodu n-rozměrného prostoru vzhledem k hledané nadploše. Konstrukci provedeme pomocí věty:

1. Polárné nadroviny obecného bodu vzhledem ke všem kvadratickým nadplochám n-rozměrného prostoru, náležejícím téže k-mocné lineární soustavě, procházejí pevným $n - k - 1$ rozměrným prostorem.

Důkaz: Pro $k = 0,1$ je věta správná, vyjadřujíc známou polární vlastnost kvadratických nadploch a jejích svazků (jednomocných lineárních soustav). $k + 1$ lineárně nezávislých nadkvadrik n-rozměrného prostoru ${}^iV^2_{n-1}$ ($i = 1,\ldots, k + 1$) určuje k-mocnou lineární soustavu $({}^1V^2_{n-1}, \ldots, {}^{k+1}V^2_{n-1})$. Podle hořejší věty procházejí polárné nadroviny obecného bodu P vzhledem ke všem nadplochám této soustavy $(n - k - 1)$-rozměrným prostorem S_{n-k-1}. Nadplocha ${}^{k+2}V^2_{n-1}$, nenáležející soustavě, určuje s touto $(k + 1)$-mocnou lineární soustavu $({}^1V^2_{n-1}, \ldots, {}^{k+1}V^2_{n-1}, {}^{k+2}V^2_{n-1})$. Polárná nadrovina bodu P vzhledem k nadploše ${}^{k+2}V^2_{n-1}$ nenáleží svazku polárných nadrovin s basí S_{n-k-1} a protíná proto tuto basi v $(n - k - 2)$-rozměrném prostoru S_{n-k-2}. Protože tímto prostorem prochází polárná nadrovina bodu P vzhledem k nadploše ${}^{k+2}V^2_{n-1}$ a vzhledem ke každé nadploše soustavy $({}^1V^2_{n-1}, \ldots, {}^{k+1}V^2_{n-1})$, prochází jím

[1]) Na př. J. Vojtěch: Geometrie projektivní, 1932, str. 473, pozn. 2. Požadavky v této poznámce uvedené pro prostor trojrozměrný zůstávají platné i pro prostor s libovolným počtem rozměrů.

i base svazků polárných nadrovin bodu P vzhledem ke všem kvadratickým nadplochám jednomocných svazků určených nadplochou ${}^{k+2}V_{n-1}^2$ a každou nadplochou soustavy $({}^1V_{n-1}^2, \ldots, {}^{k+1}V_{n-1}^2)$, t. j. prostorem S_{n-k-2} procházejí polárné nadroviny bodu R ke všem kvadratickým nadplochám $(k+1)$-mocné lineární soustavy $({}^1V_{n-1}^2, \ldots, {}^{k+1}V_{n-1}^2, {}^{k+2}V_{n-1}^2)$. Věta je tedy správná pro každé n a pro každé k od 0 do $k = n - 1$.

2. Má-li být průsečný prostor všech polárných nadrovin obecného bodu vzhledem ke všem kvadratickým nadplochám lineární soustavy v prostoru n-rozměrném bod, plyne z předešlé věty pro mocnost této soustavy $n - k - 1 = 0$, t. j. $k = n - 1$. Podle jisté obecné věty o lineárních soustavách nadploch v n-rozměrném prostoru[2]) je $\frac{n(n+3)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ obecnými body určena $(n-1)$-mocná lineární soustava kvadratických nadploch n-rozměrného prostoru, protože $n - 1$ dalšími obecnými body je určena jediná nadplocha soustavy. Rozdělíme-li libovolně $\frac{n(n+3)}{2}$ daných bodů v n skupin po $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ bodech tak, aby v každých dvou skupinách byl alespoň jeden bod různý, a sestrojíme-li k libovolnému obecnému bodu n-rozměrného prostoru body Q_i $(i = 1, \ldots, n)$, v nichž se protínají polárné nadroviny bodu P vzhledem ke kvadratickým nadplochám $(n-1)$-mocných lineárních soustav, určených skupinami $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ bodů, jsou body Q_i nezávislé a určují polárnou nadrovinu bodu P vzhledem k hledané nadploše.

Důkaz: Nadplocha V_{n-1}^2, procházející danými $\frac{n(n+3)}{2}$ body, náleží všem $(n-1)$-mocným lineárním soustavám. Polárná nadrovina obecného bodu P vzhledem k ní prochází proto všemi body Q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Předpokládejme, že body Q_i neurčují nadrovinu, že leží v $(n-2)$-rozměrném prostoru S_{n-2}, určeném na př. body Q_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ tak, že bod Q_n neleží v $(n-3)$-rozměrném prostoru určeném body Q_i $(i = 1, \ldots, n-2)$. Pak, při obecné poloze bodů, určuje $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ bodů $A_i \left(i = 1, \ldots, \frac{n(n+3)}{2} - 1\right)$ svazek kvadratických nadploch Φ_1, protože jedním obecným bodem je určena jedna nadplocha soustavy. Svazek je obsažen v $n - 1$ lineárních $(n-1)$-mocných soustavách kvadra-

[2]) Bertini-Duschek: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionalen Räume, 1924, str. 247.

tických nadploch, určených skupinami bodů $(A_1, \ldots, A_{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)+1}, A_j)$, $\left(j = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2} + n\right)$. Je proto S_{n-2} base svazku polárných nadrovin bodu P vzhledem k nadplochám svazku Φ_1. Bod $A_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ určuje s body A_i $\left(i = 1, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1\right)$ n-tou $(n-1)$-mocnou lineární soustavu, obsaženou ve svazku kvadratických nadploch Φ_2, určeném body A_i $\left(i = 1, \ldots, \frac{n(n+3)}{2} - 2, \frac{n(n+3)}{2}\right)$. Base S'_{n-2} svazku polárných nadrovin bodu P vzhledem k nadplochám svazku Φ_2 je určena body Q_i $(i = 1, \ldots, n-2, n)$, které jsou nezávislé a proto $S_{n-2} \equiv S'_{n-2}$. Potom je také $\Phi_1 \equiv \Phi_2$. Oba svazky jsou totiž obsaženy v dvojmocné lineární soustavě kvadratických nadploch určené body A_i $\left(i = 1, \ldots, \frac{n(n+3)}{2} - 2\right)$. Kdyby bylo $\Phi_1 \not\equiv \Phi_2$, bylo by možno volit v jednom svazku dvě různé nadplochy, ve druhém svazku nadplochu, která nenáleží svazku prvému, tedy tři lineárně nezávislé nadplochy, které určují uvedenou dvojmocnou lineární soustavu. Polárné nadroviny obecného bodu P vzhledem k těmto třem nadplochám, tedy i vzhledem ke všem nadplochám dvojmocného lineárního svazku by měly společný $(n-2)$-rozměrný prostor $S_{n-2} \equiv S'_{n-2}$. Leží proto bod $A_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ v basi svazku Φ_1 a $\frac{n(n+3)}{2}$ daných bodů neurčuje proti předpokladu kvadratickou nadplochu n-rozměrného prostoru j. b. d.

3. Daných $\frac{n(n+3)}{2}$ bodů lze vždy rozdělit v n skupin po $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ bodech, které mají tyto vlastnosti: 1) Každé dvě skupiny obsahují alespoň jeden bod různý. 2) Každá skupina obsahuje alespoň jeden bod takový, že na $(n-1)$-rozměrném kvadratickém kuželi, který vznikne promítnutím libovolných $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ bodů skupiny z tohoto bodu, neleží zbývající bod skupiny.

Důkaz: Rozdělme daných $\frac{n(n+3)}{2}$ bodů libovolně ve dvě skupiny A_i $\left(i = 1, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1\right)$, B_j $(j = 1, \ldots, n)$. Z libovolných n bodů A_i (pro určitost $i = 1, \ldots, n$) promítněme vždy $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ zbývajících bodů skupiny A_i. Tím je určeno n kvadratických $(n-1)$-rozměrných kuželů K_i $(i = 1, \ldots, n)$. Nyní buď a) všechny body B_j padnou na jeden z kuželů K_i, na př. na K_l $(1 \leq l \leq n)$, nebo b) ke každému kuželi K_i patří alespoň jeden bod B_j, který na něm neleží. V případě a) nechť je K_l druhu m $[0 \leq m \leq n-3]$,[3]) s dvojným prostorem S_m.[4]) Je-li poloha daných bodů obecná, může S_m obsahovat nejvýše $\frac{m(m+3)}{2} + 1$ bodů neležících na téže V^2_{n-1}. Z daných bodů zbývá $\frac{n(n+3)}{2} - \frac{m(m+3)}{2} - 1 > n$ bodů, pro všechna n. Je tedy možno volit skupinu A_i tak, aby v ní bylo obsaženo n bodů neležících v dvojném prostoru S_m kužele K_l a vhodnou volbou označení lze tyto body volit za A_i $(i = 1, \ldots, n)$. Tím je převeden případ a) na b). V případě b) existuje tedy ke každému kuželi K_i bod B_j, který na něm neleží. Pak mohou nastat tyto případy: b, 1) Ke každému kuželi K_i je možno volit jiný bod skupiny B_j tak, že při vhodné volbě označení bodů B_j, je možno volit $i = j$ $(i = 1, \ldots, n)$. n skupin po $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ bodech utvoříme, když vždy ke všem bodům A_i přidáme jeden bod B_j. B_j má vlastnost 1), A_i $(i = j)$ má vlastnost 2). Nebo b, 2) může být jeden bod B_j přiřazen několika kuželům, na které nepadne (t. j. všechny zbývající body B_j padnou na všechny zbývající kužely). Vhodnou volbou označení bodů A_i, B_j lze dosáhnout toho, aby pro celá kladná čísla $k, l_t, k + l_1 + \ldots + l_s = n$, $0 \leq k < l_1 < \ldots < l_s \leq n$, ke k kuželům K_i $(i = 1, \ldots, k)$ bylo přiřazeno k různých bodů B_j $(j = 1, \ldots, k)$, které na ně nepadnou; k l_1 kuželům K_i $(i = k+1, \ldots, k+l_1)$ jediný bod B_j $(j = k+1)$; k l_2 kuželům K_i $(i = k + l_1 + 1, \ldots, k + l_1 + l_2)$ jediný bod B_j $(j = k + l_1 + 1), \ldots$ až k l_s kuželům K_i $(i = k + l_1 + \ldots + l_{s-1} + 1, \ldots, k + l_1 + \ldots + l_s)$ jediný bod B_j $(j = k + l_1 + \ldots + l_{s-1} + 1)$. Skupiny po $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$

---

[3]) Předpokládám, že hledaná nadplocha nedegeneruje ve dvě nadroviny (různé nebo splývající), protože pak se o žádnou konstrukci nejedná.

[4]) K_l je hledaná nadkvadrika, tedy jediná. V tomto případě je možno promítnutím $\frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2}$ bodů, neležících v S_m, z prostoru S_m do libovolného $(n-m-1)$-rozměrného, na S_m nezávislého prostoru, redukovat úlohu na sestrojení nadkvadriky $(n-m-1)$-rozměrného prostoru z $\frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2}$ bodů.

bodech (označené indexem kužele v závorce) tvořme takto: Skupiny $(1), \ldots, (k)$ z bodů A_i přidáním bodu B_j s indexem shodným s indexem skupiny. Skupinu $(k+1)$ z bodů A_i a bodu B_j $(j = k+1)$. Skupinu $(k+2)$ z bodů A_i, ze kterých vynecháme jeden bod s indexem jiným než má některá skupina řady $(k+1), \ldots,$ $(k+l_1)$ (na př. A_i, $i = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1$) a bodů B_j $(j = k+1, k+2)$, skupinu $(k+3)$ z týchž bodů A_i a bodů B_j $(j = k+1, k+3), \ldots$ až skupinu $(k+l_1)$ z týchž bodů A_i a bodů B_j $(j = k+1, k+l_1)$. Skupinu $(k+l_1+1)$ z bodů A_i a bodu B_j $(j = k+l_1+1)$. Skupinu $(k+l_1+2)$ z bodů A_i, ze kterých vynecháme jeden bod s indexem jiným než má některá skupina řady $(k+l_1+1), \ldots, (k+l_1+l_2)$ a z bodů B_j $(j = k+l_1+1, k+l_1+2)$, skupinu $(k+l_1+3)$ z týchž bodů A_i a z bodů B_j $(j = k+l_1+1, k+l_1+3), \ldots$ až skupinu $(k+l_1+l_2)$ z týchž bodů A_i a z bodů B_j $(j = k+l_1+1, k+l_1+l_2)$. Stejně pokračujeme dále, až pro poslední řadu volíme pro skupinu $(k+l_1+\ldots+l_{s-1}+1)$ body A_i a bod B_j $(j = k+l_1+\ldots+l_{s-1}+1)$, pro skupinu $(k+l_1+\ldots+l_{s-1}+2)$ body A_i, ze kterých vynecháme jeden bod s indexem jiným než má některá skupina řady, a z bodů B_j $(j = k+l_1+\ldots+l_{s-1}+1, k+l_1+\ldots+l_{s-1}+2)$, skupinu $(k+l_1+\ldots+l_{s-1}+3)$ z týchž bodů A_i a z bodů B_j $(j = k+l_1+\ldots+l_{s-1}+1, k+l_1+\ldots+l_{s-1}+3), \ldots$ až skupinu $(k+l_1+\ldots+l_s)$ z týchž bodů A_i a z bodů B_j $(j = k+l_1+\ldots+l_{s-1}+1, k+l_1+\ldots+l_s)$.

Z provedeného rozdělení je zřejmo, že jsme vyčerpali všechny dané body. Skupiny mají vlastnost 1). Skupiny řad $(1), \ldots, (k)$; $(k+1), \ldots, (k+l_1)$; $\ldots$; $(k+l_1+\ldots+l_{s-1}+1), \ldots, (k+l_1+\ldots+l_s)$ obsahují v prvé řadě body B_j s indexy shodnými s indexy skupin, které nejsou obsaženy v jiné skupině. V řadách následujících obsahuje každá skupina bod B_j s indexem shodným s indexem prvé skupiny řady, který není obsažen v žádné skupině jiné řady. V téže řadě obsahuje prvá skupina bod A_i, který je v ostatních skupinách řady vynechán. Zbývající skupiny řad pak obsahují bod B_j s indexem shodným s indexem skupiny, který není obsažen v žádné jiné skupině řady. Skupiny mají vlastnost 2). V každé skupině (i) je jeden bod B_j, který nepadne na kvadratický kužel vzniklý promítnutím ostatních bodů skupiny z bodu A_i. Je to v řadě $(1), \ldots, (k)$ bod B_j s indexem shodným s indexem skupiny, v ostatních skupinách bod B_j s indexem shodným s indexem prvé skupiny řady. Podle předpokladu padnou v těchto skupinách všechny ostatní body B_j na všechny kužele K_i, tedy, kromě prvé skupiny, i na kužel s indexem shodným s indexem skupiny. Je tedy K_i určen v tomto případě také, promítneme-li z bodu A_i (i index skupiny) zbývající body A_i, v nichž jsme jeden bod vyměnili za bod B_j (j je index skupiny). Zaměníme-li nyní některý z bodů, jichž promítnutím z bodu A_i vznikl kužel K_i, s bodem B_j, který na K_i neleží, vznikne kužel K'_i. Na tomto kuželi nemůže bod zaměněný ležet, protože by bod B_j padl proti předpokladu na kužel K_i j. b. d.

4. Nechť skupina $\frac{(n-1)(n+2)}{2}+2$ bodů $A_i\left(i=1,\ldots,\frac{(n-1)(n+2)}{2}+1\right)$, B má vlastnost 2) předešlého odstavce, t. j. nechť na kvadratickém $(n-1)$-rozměrném kuželi K_i vzniklém promítnutím libovolných $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ bodů A_i z bodu B neleží zbývající bod skupiny. Pak je možno sestrojit n dvojic kvadratických $(n-1)$-rozměrných kuželů, procházejících $\frac{(n-1)(n+2)}{2}+$ $+1$ body skupiny tak, že nadkvadriky svazků, určených dvojicemi těchto kuželů, procházející zbývajícím bodem této skupiny, jsou lineárně nezávislé a určují $(n-1)$-mocný lineární systém.

Důkaz: Bodem B proložme nadrovinu S_{n-1} neprocházející jedním z předem zvolených bodů $A_i \equiv C$ (na př. pro $i=$ $=\frac{(n-1)(n+2)}{2}+1$). Z bodu C promítněme zbývající body $A_i\left(i=1,\ldots,\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)$ do S_{n-1} do bodů A'_i. Bod B a $\frac{(n-1)(n+2)}{2}-1$ bodů A'_i (na př. vynecháme ze skupiny A'_i bod A'_1) určuje $(n-2)$-rozměrnou kvadratickou varietu V^2_{n-2} nadroviny S_{n-1}, která se z bodu C promítá $(n-1)$-rozměrným kvadratickým kuželem K. Na přímce (A'_1, B) zvolme libovolný bod $M \not\equiv A'_1 \not\equiv B$ a sestrojme polárný $(n-2)$-rozměrný prostor bodu M vzhledem k varietě V^2_{n-2}. Tento polárný prostor protne přímku (A'_1, B) v bodě M'. Obecně bude dvojpoměr $(A'_1, B, M, M') \neq -1$, t. j. bod A'_1 nepadne na V^2_{n-2}, tedy bod A_1 nepadne na K. Je-li $(A'_1, B, M, M') = -1$, tedy padne-li A_1 na K, pak je možno na přímce (B, C) zvolit nekonečně mnoho bodů C' takových, že na $(n-1)$-rozměrný kvadratický kužel K', který vznikne promítnutím týchž bodů z bodu C', jichž promítnutím z bodu C vznikl kužel K, neleží bod A_1. Skupina $\frac{(n-1)(n+2)}{2}+2$ daných bodů určuje $(n-1)$-mocný lineární systém kvadratických nadploch. Geometrickým místem dvojných bodů nadploch systému[4]) je $(n-2)$-rozměrná *Jacobiho* varieta stupně $\frac{n(n+1)}{2}$.

[4]) Bertini-Duschek, str. 255.

Přímka (B, C) nenáleží celá této varietě, protože podle vlastnosti 2) bod B není dvojným bodem žádné nadplochy systému. Přímka (B, C) nemá, kromě bodu C, obecně žádný další společný bod s *Jacobiho* varietou. Má-li další společné body, pak je jich méně než $\frac{n(n+1)}{2}$. Zvolíme-li tedy na přímce (B, C) jiný bod C', který není bodem *Jacobiho* variety, nepadne bod A_1 na kužel K', na kterém budou ležet všechny zbývající body dané skupiny. V dalším budeme písmenem C označovat bod C', když A_1 padne na K. Je-li $n \geq 4$, promítněme z bodu B body A'_i do libovolného $(n-2)$-rozměrného prostoru S_{n-2}, ležícího v nadrovině S_{n-1} a neprocházejícího bodem B, do bodů A''_i. $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ libovolných bodů A''_i $\left(\text{pro určitost } i = n, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2} - 1\right)$ určuje $(n-3)$-rozměrnou kvadratickou varietu V^2_{n-3} prostoru S_{n-2}. Všechny body A''_i $\left(i = 1, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)$ nemohou padnout na V^2_{n-3}, protože by v tomto případě body A'_i ležely na $(n-2)$-rozměrném kuželi K'', kterým se promítá V^2_{n-3} z bodu B a tento kužel by se z přímky (B, C) promítal $(n-1)$-rozměrným kvadratickým kuželem obsahujícím všechny $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ body dané skupiny, jehož dvojný prostor by obsahoval přímku (B, C). To však není pro vlastnost 2) bodu B možné. Tedy alespoň jeden bod A''_i, který zjistíme jako nahoře pomocí $(n-3)$-rozměrného polárného prostoru obecného bodu (na spojnici dvou bodů A''_i) vzhledem k V^2_{n-3}, nepadne na V^2_{n-3}, t. j. alespoň jeden bod A'_i nepadne na kužel K''. Nechť je to bod A'_i $\left(i = \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)$. Vynecháme-li ze skupiny $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1$ bodů A'_i $\left(i = 1, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)$, B vždy jeden bod A_i $(i = 1, \ldots, n-1)$, je zbývajícími $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ body určena jediná $(n-2)$-rozměrná kvadratická varieta ${}^iV^2_{n-2}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Tyto variety jsou lineárně nezávislé a určují $(n-2)$-mocný lineární systém Φ_{n-2} nadroviny S_{n-1}, protože podle vlastnosti 2) vždy $n-2$ variety systému ${}^iV^2_{n-2}$ $(i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1)$ procházejí bodem A_k, kterým neprochází zbývající varieta systému ${}^kV^2_{n-2}$ $(1 \leq \leq k \leq n-1)$. Basi systému Φ_{n-2} tvoří pouze body, protože bod A_k base $(k-2)$-mocného lineárního systému určeného $k-1$ varietami

${}^{i}V_{n-2}^{2}$ $(i = 1, \ldots, k - 1)$ neleží na basi $(k - 1)$-mocného lineárního systému vzniklého přidáním lineárně nezávislé variety ${}^{k}V_{n-2}^{2}$ $(1 \leq \leq k \leq n - 1)$. K bodům base patří body B, A'_i $\left(i = n, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)$, z nichž bod B je obecný, t. j. $(n - 2)$-rozměrné tečné prostory tohoto bodu vzhledem ke všem ${}^{i}V_{n-2}^{2}$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$ jsou lineárně nezávislé a mají společný pouze bod B. Kdyby měly společný prostor dimense větší než 0, byl by bod B bodem *Jacobiho* variety lineárního systému Φ_{n-2}, t. j. systém by obsahoval $(n - 2)$-rozměrný kvadratický kužel, v jehož dvojném prostoru by ležel bod B. Podle provedené volby bodů A'_i $\left(i = = n, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1\right)$ je patrno, že na kuželi K s dvojným bodem B určeném všemi body A'_i, kromě bodu posledního, tento poslední bod neleží. Kdybychom poslední bod vyměnili za kterýkoliv jiný bod A'_i, nemůže na takto určeném kuželi vyměněný bod ležet, protože by poslední bod padl na K. Je-li $n = 3$, je Φ_1 svazek kuželoseček v rovině S_2 se základními body B, A'_i $(i = 3, 4, 5)$ různými. Kuželosečky svazku určené zbývajícími body A'_i nemohou mít společnou tečnu v bodě B, protože by body B, A'_i $(i = 1, \ldots, 5)$ ležely na téže kuželosečce. Neexistuje tedy žádný $(n - 2)$-rozměrný kvadratický kužel s dvojným prostorem procházejícím bodem B a obsahující všechny body base systému Φ_{n-2}, t. j. bod B není bodem *Jacobiho* variety tohoto systému. Promítneme-li systém Φ_{n-2} nadroviny S_{n-1} z bodu C, který v této nadrovině neleží, obdržíme $n - 1$ lineárně nezávislých $(n - 1)$-rozměrných kvadratických kuželů K_i $(i = 1, \ldots, n - 1)$ se společným bodem dvojným C a společnou přímkou (B, C). Tečné nadroviny kuželů K_i podél přímky (B, C) jsou lineárně nezávislé a mají tedy společnou pouze tuto přímku. Zvolíme-li dále místo bodu C některý jiný bod C^1 ze skupiny A_i, obdržíme právě popsaným postupem $n - 1$ lineárně nezávislých $(n - 1)$-rozměrných kvadratických kuželů K_i^1 $(i = = 1, \ldots, n - 1)$ se společnou přímkou (B, C^1) a s nezávislými tečnými nadrovinami podél této přímky. Z kuželů K_i^1 se dá vždycky vybrat alespoň jeden kužel, který je se všemi K_i $(i = 1, \ldots, n - 1)$ nezávislý a určuje s nimi $(n - 1)$-mocný lineární systém. V opačném případě by všechny tečné nadroviny podél přímky (B, C^1) ke kuželům K_i^1 musely procházet přímkou (B, C) a nebyly by nezávislé, protože by měly společnou rovinu (B, C, C^1). Volbu provedeme tak, že sestrojíme $(n - 2)$-rozměrné polárné prostory obecného bodu P^1 nadroviny S_{n-1} vzhledem ke všem plochám systému Φ_{n-2}. Tyto polárné prostory jsou nezávislé a protnou se v bodě, který spojíme přímkou b s bodem C. Ze systému Φ_{n-2}^1 pak vybereme varietu takovou, že nadrovina spojující bod C^1 s $(n - 2)$-rozměrným polárným prostorem bodu P^1 vzhledem k této varietě neobsahuje přímku b. Kužel promítající tuto varietu z bodu C^1 buď K_l^1 ($1 \leq \leq l \leq n - 1$). Ke každému kuželi K_i ($i = 1, \ldots, n - 1$), K_l^1 sestrojme ($n - 1$)-rozměrný kvadratický kužel K'_i, ${}^1K'_l$ určený dvojným bodem B a body, které zbudou, vynecháme-li ze všech daných bodů ten, který neleží na K_i, K_l^1. Podle vlastnosti 2) nebude tento bod také ležet na K'_i, ${}^1K'_l$. Kužely dvojic K_i, K'_i; K_l^1, ${}^1K'_l$ jsou různé, protože bod B, který je dvojným bodem kuželů K_i, K_l^1, je obecným bodem kuželů K'_i, ${}^1K'_l$. Je tedy těmito dvojicemi kuželů určeno n svazků kvadratických nadploch $(K, K')_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Bodem A_i (A_l), kterým žádný z kuželů svazek $(K, K')_i$ určujících neprochází, je určena jediná nadplocha svazku ${}^iV_{n-1}^2$. Tečná nadrovina ke kuželi K'_i, ${}^1K'_l$ v bodě B je neurčitá, je proto tečná nadrovina bodu B ke kuželi K_i, K_l^1 společnou tečnou nadrovinou všech nadploch svazku $(K, K')_i$,tedy i nadplochy ${}^iV_{n-1}^2$. Tyto tečné nadroviny jsou podle právě dokázaného lineárně nezávislé. Jsou tedy i nadplochy ${}^iV_{n-1}^2$ lineárně nezávislé j. b. d.

Na základě dokázaných vět popíši nejdříve konstrukci kvadratické nadplochy, která je jednodušší než konstrukce následující, ve které je však třeba, kromě úloh lineárních, sestrojit samodružné body dvou projektivních řad bodových na přímce, a pak ukáži, jak je možno úlohu řešit lineárně.

I. Podle odstavce 2 stačí sestrojit bod Q, kterým procházejí polárné nadroviny obecného bodu P vzhledem ke všem kvadratickým nadplochám ($n - 1$)-mocné lineární soustavy určené $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ body. Podle odstavce 3 proveďme volbu těchto skupin, aby měly vlastnost 1) a 2) tohoto odstavce. Nechť je $A_i \left(i = 1, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1\right)$, B taková skupina, ve které má bod B vlastnost 2). Podle odstavce 4 určeme v této skupině body C; C_1, $n - 1$ bodů A_i a bod A_k tak, že jejich průměty A'_i, A'_k nejsou body base lineární soustavy Φ_{n-2}; Φ'_{n-2} a že kužel K_k^1 nenáleží lineární soustavě určené kužely K_i ($i = 1, \ldots, n - 1$). Označme je A_i ($i = 1, \ldots, n - 1$); A_n (A_n může být některý z bodů A_i ($i = 1, \ldots, n - 1$)). Nechť je dále buď $C \equiv A_i$, nebo C leží na přímce (B, A_i) $\left(i = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1\right)$; $C_1 \equiv A_i$, nebo C_1 leží na přímce (A_i, B) $\left(i = \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)$.

Bodem P, jehož polárnou nadrovinu vzhledem k hledané nadploše chceme sestrojit, a bodem A_i ($i = 1, \ldots, n$) proložme nadrovinu ${}^iS_{n-1}$, která neprochází body B, C pro $i = 1, \ldots, n - 1$, body B, C_1 pro $i = n$. Z bodu B promítněme zbývající body skupiny, kromě bodu A_i, do nadroviny ${}^iS_{n-1}$. Těmito $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ průměty je v ${}^iS_{n-1}$ určena jediná $(n-2)$-rozměrná kvadratická varieta ${}^i_1V^2_{n-2}$. $(n-2)$-rozměrný polární prostor bodu P vzhledem k varietě ${}^i_1V^2_{n-2}$ určuje s bodem B polárnou nadrovinu ${}^i_1S_{n-1}$ bodu P vzhledem k $(n-1)$-rozměrnému kvadratickému kuželi K'_i, kterým se z bodu B promítá varieta ${}^i_1V^2_{n-2}$. Stejně, promítneme-li z bodu C (C_1) zbývající body skupiny, kromě bodu A_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ (A_n), do nadroviny ${}^iS_{n-1}$, je těmito průměty stanovena $(n-2)$-rozměrná kvadratická varieta ${}^i_2V^2_{n-2}$ nadroviny ${}^iS_{n-1}$. $(n-2)$-rozměrný polární prostor bodu P vzhledem k této varietě určuje s bodem C (C_1) polárnou nadrovinu ${}^i_2S_{n-1}$ bodu P vzhledem k $(n-1)$-rozměrnému kuželi K_i, kterým se promítá ${}^i_2V^2_{n-2}$ z bodu C (C_1). Průsečný $(n-2)$-rozměrný prostor ${}^iS_{n-2}$ obou nadrovin ${}^i_1S_{n-1}$, ${}^i_2S_{n-1}$ je base svazku polárných nadrovin bodu P vzhledem k nadplochám svazku $(K, K')_i$ určenému oběma kužely K_i, K'_i. Přímka (P, A_i) neprotíná obecně prostor ${}^iS_{n-2}$ (kdyby protínala, užijeme konstrukce uvedené v II). Sestrojíme-li průsečíky D_i, E_i; D'_i, E'_i této přímky s varietami ${}^i_1V^2_{n-2}$, ${}^i_2V^2_{n-2}$, je bod A^1_i sdružený k bodu A_i v involuční projektivnosti bodových řad na přímce (P, A_i), určené dvojicemi sdružených bodů D_i, E_i; D'_i, E'_i, druhým průsečíkem této přímky s kvadratickou nadplochou svazku $(K, K')_i$ procházející bodem A_i. Tedy bod P takový, že $(A_i, A^1_i, P'_i, P) = -1$ určuje s prostorem ${}^iS_{n-2}$, v němž neleží, polárnou nadrovinu ${}^i_3S_{n-1}$ bodu P vzhledem k nadploše svazku $(K, K')_i$ procházející bodem A_i, tedy procházející všemi $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ body dané skupiny. Pro $i = 1, \ldots, n$ jsou podle odstavce 4 všechny nadroviny ${}^i_3S_{n-1}$ nezávislé a protínají se v hledaném bodě Q. Průsečíky D_i, E_i (D'_i, E'_i) přímky (P, A_i) s $(n-2)$-rozměrnou kvadratickou varietou ${}^i_1V^2_{n-2}$ $({}^i_2V^2_{n-2})$ nadroviny ${}^iS_{n-1}$ sestrojíme takto: Na přímce (P, A_i) zvolíme libovolný bod R_i (různý od P) a sestrojíme jeho $(n-2)$-rozměrný polární prostor vzhledem k této varietě. Polární prostor bodu P, (R_i) protíná přímku (P, A_i) v bodě P'_i, (R'_i). Pak jsou samodružné body involuce harmonických pólů, určené dvojicemi bodů P, P'_i; R_i, R'_i, hledané průsečíky.

II. Zvolme jako v I. body A_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ A_n, B, C, C_1. Ke každému A_i $(i = 1, \ldots, n)$ $(n > 2)$ zvolme dále n různých bodů jiných než B, C, A_i $(i = 1, \ldots, n-1)$, pro $i = n$ jiných než B, C_1, A_n, a označme je D_{ij} $(j = 1, \ldots, n)$. Body D_{ij}, které při různých indexech nemusí být různé, volme tak, aby pro každé i tvořily s bodem A_i skupinu $n + 1$ lineárně nezávislých bodů. To je možné, protože bod A_i neleží na $(n-1)$-rozměrném kuželi K_i určeném dvojným bodem B a zbývajícími body skupiny. Vynecháme-li z těchto bodů bod C (nebo C_1) nemůže zbytek ležet v $(n-2)$-rozměrném prostoru, protože by kužel K_i nebyl určen. Třemi body $P, A_i, D_{i,j}$ proložme libovolnou nadrovinu ${}^{i,j}S_{n-1}$ neprocházející body B, C (pro $i = n$ B, C_1). Z bodů B (C), (pro $i = n$ C_1) promítněme, po vynechání bodu A_i $(i = 1, \ldots, n)$, zbývajících $\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$ bodů do nadroviny ${}^{i,j}S_{n-1}$. Tyto průměty určují v ${}^{i,j}S_{n-1}$ jedinou $(n-2)$-rozměrnou kvadratickou varietu ${}^{i,j}_1V^2_{n-2}$ $({}^{i,j}_2V^2_{n-2})$, která se z bodu B $(C; C_1)$ promítá $(n-1)$-rozměrným kvadratickým kuželem K_i (K'_i) proloženým všemi danými body, kromě bodu A_i. Na přímce $p_{i,j} \equiv (A_i, D_{i,j})$ zvolme dva libovolné body $R_{i,j}$, $U_{i,j}$, různé od $A_i, D_{i,j}$ a body $R'_{i,j}$, $U'_{i,j}$ takové, že $(A_i, D_{i,j}, R_{i,j}, R'_{i,j}) = -1$, $(A_i, D_{i,j}, U_{i,j}, U'_{i,j}) = -1$. $(n-2)$-rozměrný polárný prostor bodu $R_{i,j}$ vzhledem k $(n-2)$-rozměrné kvadratické varietě ${}^{i,j}_1V^2_{n-1}$ $({}^{i,j}_2V^2_{n-1})$, dané v nadrovině ${}^{i,j}S_{n-1}$ $\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$ body, určuje s nezávislým bodem B (C, C_1) polárnou nadrovinu bodu $R_{i,j}$ vzhledem ke kuželi K_i, K'_i. Obě polárné nadroviny se protnou v $(n-2)$-rozměrné basi svazku polárných nadrovin bodu $R_{i,j}$ vzhledem ke všem kvadratickým nadplochám svazku $(K, K')_i$, která tedy s bodem $R'_{i,j}$ určuje polárnou nadrovinu ${}^{i,j}_1S_{n-1}$ bodu $R_{i,j}$ vzhledem ke kvadratické nadploše ${}^iV^2_{n-1}$ svazku $(K, K')_i$ procházející bodem A_i. Stejně sestrojíme polárnou nadrovinu ${}^{i,j}_2S_{n-1}$ bodu $U_{i,j}$ vzhledem k této nadploše. Průsečný $(n-2)$-rozměrný prostor ${}^{i,j}S_{n-2}$ obou polárných nadrovin ${}^{i,j}_1S_{n-1}$, ${}^{i,j}_2S_{n-1}$ je base svazku polárných nadrovin všech bodů přímky $p_{i,j}$ vzhledem k nadploše ${}^iV^2_{n-1}$, procházející všemi danými body. Předpokládejme obecný případ, že bod P nepadne do prostoru ${}^{i,j}S_{n-2}$, nebo, že nadrovina $(P, {}^{i,j}S_{n-2})$ neprochází bodem A_i. Pak protne nadrovina $(P, {}^{i,j}S_{n-2})$ přímku $p_{i,j}$ v bodě $P_{i,j}$ (různém od A_i) a bod $P'_{i,j}$ na přímce $p_{i,j}$ takový, že $(A_i, D_{i,j}, P_{i,j}, P'_{i,j}) = -1$, je jejím pólem vzhledem k nadploše ${}^iV^2_{n-1}$. Při pevném i jsou body $P'_{i,j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ nezávislé a určují polárnou nadrovinu bodu P vzhledem k nadploše ${}^iV^2_{n-1}$. Nezávislé jsou, protože každý leží na jedné spojnici jednoho z $n+1$ nezávislých bodů s ostatními a žádný nesplývá se společným bodem těchto spojnic. Polárnou nadrovinu bodu P vzhledem k nadploše ${}^iV^2_{n-1}$ určují, protože jejich polárné nadroviny se protínají v bodě P. Pro všechna $i = 1, \ldots, n$ jsou podle odstavce 4 tyto polárné nadroviny nezávislé a protínají se v hledaném bodě Q.

Ve zvláštním případě může bod P padnout do nadroviny $(A_i, {}^{i,j}S_{n-2})$. Pak zřejmě všechny sdružené poláry ${}^{i,j}S_{n-2}$ přímek $p_{i,j}$ (při pevném i) padnou do této tečné nadroviny nadplochy ${}^iV^2_{n-1}$

v bodě A_i. Veďme bodem P libovolnou přímku m, která neleží v této tečné nadrovině. Zvolme na m dva libovolné body M_1, M_2 (různé od P), které tedy neleží v tečné nadrovině. Sestrojme nahoře uvedenou konstrukcí jejich polárné nadroviny ${}^1S_{n-1}$, ${}^2S_{n-1}$, které protnou přímku $p_{i,j}$ v bodech M'_1, M'_2. Nadrovina svazku (${}^1S_{n-1}$, ${}^2S_{n-1}$) procházející bodem přidruženým k bodu P v involuci harmonických pólů M_1, M_2; M'_1, M'_2 na přímce m, je hledaná polárná nadrovina bodu P vzhledem k nadploše ${}^iV^2_{n-1}$.

Ve II. je protínáním a promítáním lineárních prostorů převedeno sestrojení polárné nadroviny obecného bodu vzhledem ke kvadratické nadploše n-rozměrného prostoru, určeného $\frac{n(n+3)}{2}$ obecnými body, na sestrojení polárné nadroviny obecného bodu vzhledem ke kvadratické nadploše $(n-1)$-rozměrného prostoru, určeného $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ obecnými body, t. j. postupně až na sestrojení této úlohy v prostoru dvojrozměrném, kde je úloha lineární.

*

Eine lineare Konstruktion der quadratischen Hyperfläche des n-dimensionalen Raumes aus $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkten.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Eine quadratische Hyperfläche des n-dimensionalen Raumes ist durch $\frac{n(n+3)}{2}$ allgemein gelegene Punkte bestimmt. Um ihre Konstruktion auszuführen, genügt es die polare Hyperebene eines allgemeinen Punktes in Bezug auf diese Hyperfläche zu konstruieren. Wir teilen die gegebenen Punkte beliebig in zwei Gruppen $A_i \left(i = 1, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1\right)$, B_j $(j = 1, \ldots, n)$ ein. Aus n Punkten A_i $(i = 1, \ldots, n)$ projiziere man die jedesmal übrigbleibenden $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte A_i in eine beliebige, den Punkt A_i nicht enthaltende Hyperebene ${}^iS_{n-1}$. Durch diese Projektionen ist in ${}^iS_{n-1}$ eine $(n-2)$-dimensionale quadratische Mannigfaltigkeit ${}^iV^2_{n-2}$, die aus dem Punkte A_i durch einen $(n-1)$-dimensionalen Kegel K_i projiziert wird, eindeutig bestimmt. Ein Punkt B_j liegt auf dem Kegel K_i, wenn seine Projektion B'_j auf ${}^iV^2_{n-2}$ liegt, was mit Hilfe eines $(n-2)$-dimensionalen Polarraumes von ${}^iV^2_{n-2}$ in ${}^iS_{n-1}$ festgestellt werden kann. Gehören alle Punkte B_j einem der Kegel K_i an, so ist dieser die gesuchte Hyperfläche und ihre Konstruktion ist auf die Konstruktion von ${}^iV_{n-2}^2$ in ${}^iS_{n-1}$ aus den $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Projektionen der Punkte A_i zurückgeführt. Im allgemeinen Falle gibt es zu jedem Kegel K_i wenigstens einen Punkt B_j, den der Kegel nicht enthält. In diesem Falle bilde man aus den gegebenen $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkten n Gruppen zu je $\frac{(n-1)(n+2)}{2}+2$ Punkten auf die folgende Weise: In einer Reihe, wo jedem Kegel K_i ein Punkt B_j zugewiesen werden kann, den er nicht enthält, bilde man jedesmal Gruppen aus allen Punkten A_i und eben diesem Punkte B_j. In den übrigen Reihen, wo mehreren Kegeln derselbe auf ihnen nicht liegende Punkt B_j zugewiesen ist, bilde man eine Gruppe aus allen Punkten A_i und diesem Punkte B_j. Die übrigen Gruppen der Reihe bilde man aus den Punkten A_i, von welchen man einen Punkt wegläßt, dessen Index von demjenigen irgend eines Kegels der Reihe verschieden ist, aus dem Punkte B_j der ersten Gruppe und irgend einem weiteren Punkte B_j, welcher noch keiner Gruppe zugewiesen wurde. Auf diese Weise ist ein jeder der gegebenen Punkte in eine Gruppe eingegliedert, welche die folgenden Eigenschaften hat: 1) Je zwei der Gruppen unterscheiden sich wenigstens in einem Punkte. 2) In jeder Gruppe gibt es einen Punkt von solcher Beschaffenheit, daß der durch diesen Punkt als Doppelpunkt und durch beliebige weitere $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte der Gruppe bestimmte quadratische Kegel den übrigbleibenden Punkt der Gruppe nicht enthält. Die Punkte von der Eigenschaft 2) sind die Punkte A_i ($i = = 1, \ldots, n$) und zwar in jeder Gruppe der Doppelpunkt desjenigen Kegels K_i, mit Hilfe dessen die betreffende Gruppe gebildet wurde. Die durch alle Punkte irgend einer Gruppe hindurchgehenden quadratischen Hyperflächen bilden ein lineares System von der Dimension $(n-1)$. Die polaren Hyperebenen eines allgemeinen Punktes P in Bezug auf alle Hyperflächen dieses Systems treffen einander in einem Punkte Q. Haben die Gruppen die Eigenschaft 1), so sind die n Punkte Q, die dem Punkte P entsprechen, linear unabhängig und bestimmen die polare Hyperebene des Punktes P in Bezug auf die durch die $\frac{n(n+3)}{2}$ gegebenen Punkte bestimmte quadratische Hyperfläche.

Konstruktion des Punktes Q: Es sei $A_i\left(i = 1, \ldots, \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)$, B, C eine solche Gruppe von Punkten, in welcher der Punkt B die

Eigenschaft 2) besitzt und C ein beliebiger Punkt der Gruppe ist. Man projiziere in eine beliebige, den Punkt C nicht enthaltende Hyperebene, aus eben diesem Punkte die übrigen Punkte der Gruppe. Liegen alle Projektionen auf derselben, durch beliebige $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ unter ihnen bestimmten $(n-2)$-dimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeit, so gibt es in Allgemeinen auf der Geraden (B, C) keinen andern Punkt, für den dieser Fall eintritt; jedenfalls gibt es solcher Punkte auf der Geraden (B, C) weniger als $\frac{n(n+1)}{2}$. Sollte dieser Fall eintreten, so ersetze man diesen Punkt durch einen andern Punkt der Geraden (B, C), den wir ebenfalls mit C bezeichnen und für den dieser Fall nicht eintritt. Zu jedem Punkt A_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ $(n > 2)$ wähle man n voneinander und von A_i, B, C verschiedene Punkte D_{ij} $(j = 1, \ldots, n)$ derart, daß diese Punkte für jedes i mit den Punkten A_i eine Gruppe von $n + 1$ linear unabhängigen Punkten bilden. Ist $n \geq 4$, so wähle man die Punkte A_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ folgendermaßen: Man projiziere aus dem Punkte C alle Punkte A_i auf eine den Punkt B enthaltende Hyperebene S_{n-1} in die Punkte A'_i. Aus dem Punkte B projiziere man sodann die Punkte A'_i auf einen $(n-2)$-dimensionalen Raum der Hyperebene S_{n-1}, der den Punkt B nicht enthält, in die Punkte A''_i. Wenigstens ein Punkt A''_i liegt dann nicht auf einer durch beliebige $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ von diesen Punkten bestimmten V^2_{n-3}. Als Gruppe A_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ wählt man eine solche, die keinen Punkt A_i enthält, dessen Projektion nicht in V^2_{n-3} liegt. Man lege durch drei Punkte P, A_i, D_{ij} eine, die Punkte B, C nicht enthaltende Hyperebene ${}^{ij}S_{n-1}$. Aus dem Punkte B (C) projiziere man die übrigen $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte der Gruppe auf ${}^{ij}S_{n-1}$. Die so erhaltenen Projektionen bestimmten in ${}^{ij}S_{n-1}$ eindeutig eine $(n-2)$-dimensionale quadratische Mannigfaltigkeit ${}^{ij}_{1}V^2_{n-2}$ $({}^{ij}_{2}V^2_{n-2})$, die den Punkt A_i nicht enthält. Man wähle auf der Geraden $p_{ij} \equiv (A_i, D_{ij})$ zwei beliebige, von A_i, D_{ij} verschiedene Punkte R_{ij}, U_{ij} und weitere zwei Punkte R'_{ij}, U'_{ij} derart, daß $(A_i, D_{ij}, R_{ij}, R'_{ij}) = -1$, $(A_i, D_{ij}, U_{ij}, U'_{ij}) = -1$. Der $(n-2)$-dimensionale Polarraum des Punktes R_{ij} in Bezug auf die Mannigfaltigkeit ${}^{ij}_{1}V^2_{n-2}$ $({}^{ij}_{1}V^2_{n-2})$ der Hyperebene ${}^{ij}S_{n-1}$, die durch die $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte bestimmt ist, gibt, mit dem Punkte B (C) verbunden, zwei Hyperebenen, deren Schnittraum mit dem Punkte R'_{ij} eine Hyperebene ${}^{ij}_{1}S_{n-1}$ bestimmt. Desgleichen bestimmt der Punkt U_{ij} eine Hyperebene ${}^{ij}_{2}S_{n-1}$. Beide Hyperebenen schneiden einander in ${}^{ij}S_{n-2}$. Die Hyperebene $(P,$

${}^{ij}S_{n-2}$) schneidet die Gerade p_{ij} in einem Punkte P_{ij}; der Punkt P'_{ij}, für welchen $(A_i, D_{ij}, P_{ij}, P'_{ij}) = -1$, ist Pol der Hyperebene $(P, {}^{ij}S_{n-2})$ in Bezug auf die, alle Punkte der Gruppe enthaltende Mannigfaltigkeit ${}^iV^2_{n-1}$. Für ein festes i sind die Punkte P_{ij} ($j = 1, \ldots, n$) unabhängig und bestimmen die polare Hyperebene des Punktes P in Bezug auf ${}^iV^2_{n-1}$. Für alle Werte von $i = 1, \ldots, n-1$ sind diese Hyperebenen unabhängig und bilden ein lineares System von der Dimension $(n-2)$ mit der Basis S_1. Wählt man anstatt des Punktes C einen anderen Punkt der Gruppe, der von B verschieden ist, so bekommt man in der angegebenen Weise ein anderes System von Hyperebenen, von der Dimension $(n-2)$, mit der Basis S'_1. In diesem System gibt es wenigstens eine Hyperebene, die nicht zum ersten System gehört; diese schneidet S_1 im gesuchten Punkte O.

Im vorhergehenden Artikel wird noch eine einfachere Konstruktion beschrieben, die jedoch quadratisch ist.