Vilém Jung

Odvození vzorce pro součet kladných a celistvých mocnin čísel přirozené řady ve formě nezávislé

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 3, 191--198

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121866

Odvození vzorce pro součet kladných a celistvých mocnin čísel přirozené řady ve formě nezávislé.

Píše

Vilém Jung,

professor státní průmysl. školy v Praze.

Na základě binomické poučky, vyjádřené vzorcem

$$(x-1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (p+1)_k \, x^{p+1-k},$$

při čemž

$$x^0 = 1, (p+1)_0 = (p+1)_{p+1} = 1,$$

platí pro $x = 1, 2, 3, \ldots n$ identické rovnice:

$$\begin{aligned}
0^{p+1} &= 1^{p+1} - (p+1)_1 1^p + (p+1)_2 1^{p-1} - \ldots \\
&\quad + (-1)^p (p+1)_1 1^1 + (-1)^{p+1} 1^0 \\
1^{p+1} &= 2^{p+1} - (p+1)_1 2^p + (p+1)_2 2^{p-1} - \ldots \\
&\quad + (-1)^p (p+1)_1 2^1 + (-1)^{p+1} 2^0 \\
2^{p+1} &= 3^{p+1} - (p+1)_1 3^p + (p+1)_2 3^{p-1} - \ldots \\
&\quad + (-1)^p (p+1)_1 3^1 + (-1)^{p+1} 3^0 \\
3^{p+1} &= 4^{p+1} - (p+1)_1 4^p + (p+1)_2 4^{p-1} - \ldots \\
&\quad + (-1)^p (p+1)_1 4^1 + (-1)^{p+1} 4^0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-2)^{p+1} &= (n-1)^{p+1} - (p+1)_1 (n-1)^p + (p+1)_2 (n-1)^{p-1} - \ldots \\
&\quad + (-1)^p (p+1)_1 (n-1)^1 + (-1)^{p+1} (n-1)^0 \\
(n-1)^{p+1} &= n^{p+1} - (p+1)_1 n^p + (p+1)_2 n^{p-1} - \ldots \\
&\quad + (-1)^p (p+1)_1 n^1 + (-1)^{p+1} n^0.
\end{aligned}$$

Sečtením těchto rovnic obdržíme identickou rovnici:

$$0 = n^{p+1} - (p+1)_1 \sum_{k=1}^{n} k^p + (p+1)_2 \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} - (p+1)_3 \sum_{k=1}^{n} k^{p-2}$$
$$+ \ldots + (-1)^{p-1} (p+1)_p \sum_{k=1}^{n} k^2 + (-1)^p (p+1)_1 \sum_{k=1}^{n} k^1$$
$$+ (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{n} k^0 .$$

Pro $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ obdržíme úplnou soustavu lineárných rovnic ohledně $\sum_1^n k^0, \sum_1^n k^1, \sum_1^n k^2, \sum_1^n k^3, \sum_1^n k^4, \ldots$ totiž:

$$\begin{array}{rcccccl}
\sum_1^n k^0 + & 0 & + & 0 & + & 0 & + \; 0 = n \\
-\sum_1^n k^0 + (2)_1 \sum_1^n k^1 + & 0 & + & 0 & + & 0 & = n^2 \\
\sum_1^n k^0 - (3)_1 \sum_1^n k^1 + (3)_2 \sum_1^n k^2 + & 0 & + & 0 & & & = n^3 \\
-\sum_1^n k^0 + (4)_1 \sum_1^n k^1 - (4)_2 \sum_1^n k^2 + (4)_3 \sum_1^n k^3 + & 0 & & & & & = n^4 \\
\sum_1^n k^0 - (5)_1 \sum_1^n k^1 + (5)_2 \sum_1^n k^2 - (5)_3 \sum_1^n k^3 + (5)_4 \sum_1^n k^4 & & & & & & = n^5 .
\end{array}$$

Determinant soustavy

$$\Delta = 1 \, . \, (2)_1 \, . \, (3)_2 \, . \, (4)_3 \, . \, (5)_4 = 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5 = 5!$$

Platí tedy

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & n \\ -1, & (2)_1, & 0, & 0, & n^2 \\ 1, & -(3)_1, & (3)_2, & 0, & n^3 \\ -1, & (4)_1, & -(4)_2, & (4)_3, & n^4 \\ 1, & -(5)_1, & (5)_2, & -(5)_3, & n^5 \end{vmatrix}}{5!} .$$

Na př.:

$$\sum_1^n k^0 = n,$$

$$\sum_1^n k^1 = \frac{\begin{vmatrix} 1, & n \\ -1, & n^2 \end{vmatrix}}{2!} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

$$\sum_1^n k^2 = \frac{\begin{vmatrix} 1, & 0, & n \\ -1, & 2, & n^2 \\ 1, & -3, & n^3 \end{vmatrix}}{3!} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$\sum_1^n k^3 = \frac{\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & n \\ -1, & 2, & 0, & n^2 \\ 1, & -3, & 3, & n^3 \\ -1, & 4, & -6, & n^4 \end{vmatrix}}{4!} = \frac{6\,n^4+12\,n^3+6\,n^2}{24}$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

$$\sum_1^n k^4 = \frac{\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & n \\ -1, & 2, & 0, & 0, & n^2 \\ 1, & -3, & 3, & 0, & n^3 \\ -1, & 4, & -6, & 4, & n^4 \\ 1, & -5, & 10, & -10, & n^5 \end{vmatrix}}{5!}$$

$$= \frac{1.2.3.4n^5 + 1.2.3.10n^4 + 40n^3 - 4n}{1.2.3.4.5}$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30},$$

$$\sum_{1}^{n} k^5 = \frac{\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & n \\ -1, & 2, & 0, & 0, & 0, & n^2 \\ 1, & -3, & 3, & 0, & 0, & n^3 \\ -1, & 4, & -6, & 4, & 0, & n^4 \\ 1, & -5, & 10, & -10, & 5, & n^5 \\ -1, & 6, & -15, & 20, & -15, & n^6 \end{vmatrix}}{6!}$$

$$= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.$$

Patrno, jak by se počítal vzorec $\sum_{k=1}^{n} k^p$ pro libovolné kladné a celistvé p.

Dále vidíme, že jest $\sum_{k=1}^{n} k^p$ celistvou racionalní funkcí veličiny n stupně $(p+1)$ho, a sice $\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=p+1}^{k=1} A_k n^k$.

Zajímavo jest, že $A_{p+1} = \frac{1}{p+1}$, $A_p = \frac{1}{2}$,

neboť $A_{p+1} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}$,

$$A_p = -\frac{(p-1)!\,[-(p+1)_2]}{(p+1)!} = \frac{(p-1)!\,(p+1)p}{(p+1)!\,1.2}$$
$$= \frac{(p+1)!}{2(p+1)!} = \frac{1}{2}.$$

Z posledního vzorce obdržíme příslušným dělením

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} + \frac{A_p}{n} + \frac{A_{p-1}}{n^2} + \ldots$$

Z tohoto pak plyne

$$\lim \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

pro $n = \infty$, což jest důležitý vzorec při elementárním odvozování vzorce pro kvadraturu křivek $y = Cx^p$, v geometrii jakož i v mechanice velmi často se vyskytující.

Násobíme-li číslem (-1) příslušné řádky a sloupce determinantu, vyjadřujícího $\sum_{k=1}^{n} k^p$, obdržíme obecně:

$$
(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^p
$$

$$
= \frac{1}{(p+1)!} \begin{vmatrix}
1, & 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0, & 0, & (-1)^p n \\
1, & (2)_1, & 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0, & 0, & (-1)^{p-1} n^2 \\
1, & (3)_1, & (3)_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0, & 0, & (-1)^{p-2} n^3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1, & (p-k-1)_1, & (p-k-1)_2, & \ldots (p-k-1)_{p-k-2}, & \ldots & \ldots & 0, & 0, & (-1)^{k+2} n^{p-k-1} \\
1, & (p-k)_1, & (p-k)_2, & \ldots (p-k)_{p-k-2}, & (p-k)_{p-k-1}, & \ldots & 0, & 0, & (-1)^{k+1} n^{p-k} \\
1, & (p-k+1)_1, & (p-k+1)_2, & \ldots (p-k+1)_{p-k-2}, & (p-k+1)_{p-k-1}, & (p-k+1)_{p-k}, & 0, & 0, & (-1)^k n^{p-k+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1, & (p-1)_1, & (p-1)_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & (p-1)_{p-2}, & 0, & n^{p-1} \\
1, & (p)_1, & (p)_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & (p)_{p-2} & (p)_{p-1}, & -n^p \\
1, & (p+1)_1, & (p+1)_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & (p+1)_{p-2}, & (p+1)_{p-1}, & n^{p+1}
\end{vmatrix}.
$$

Z toho plyne

$$
\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{m=p+1}^{m=1} A_m n^m, \qquad A_m = \frac{a_m}{(p+1)!},
$$

znamená-li a_m subdeterminant, příslušející prvku $(-1)^{p-m+1}n^m$. Z předu již bylo dokázáno, že obecně platí

$$A_{p+1}=\frac{1}{p+1}\,,\quad A_p=\frac{1}{2}\,.$$

Dále se dá dokázati, že

$$A_{p-(2r-1)}=(-1)^{r+1}\frac{(p)_{2r-1}}{2r}B_r\,, \tag{2}$$

$$A_{p-2r}=o\,, \tag{3}$$

pro $r>o$, při čemž B_r značí *čísla Bernoulliova*.

Potom možno psáti:

$$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+\frac{(p)_1}{2}B_1n^{p-1}-\frac{(p)_3}{4}B_2n^{p-3}$$
$$+\frac{(p)_5}{6}B_3n^{p-5}-\frac{(p)_7}{8}B_4n^{p-7}+\dots \tag{4}$$

Abychom to dokázali, stanovme ze vzorce (1) hodnotu

$A_{p-k}=\dfrac{a_{p-k}}{(p+1)!}$ pro $k>o$, totiž:

$$a_{p-k}=(p-k-1)!\begin{vmatrix}(p-k+1)_{p-k-1}, & (p-k+1)_{p-k}, & 0, & \dots\dots & 0, & 0\\ (p-k+2)_{p-k-1}, & (p-k+2)_{p-k}, & (p-k+2)_{p-k+1}, & \dots & 0, & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (p-1)_{p-k-1}, & (p-1)_{p-k}, & (p-1)_{p-k+1}, & \dots & (p-1)_{p-2}, & 0\\ (p)_{p-k-1}, & (p)_{p-k}, & (p)_{p-k+1}, & \dots & (p)_{p-2}, & (p)_{p-1}\\ (p+1)_{p-k-1}, & (p+1)_{p-k}, & (p+1)_{p-k+1}, & \dots & (p+1)_{p-2}, & (p+1)_{p-1}\end{vmatrix}.$$

Vyjmeme-li patřičným způsobem společné činitele v příslušných řádcích a sloupcích, obdržíme:

$$A_{p-k}=\frac{(p-k-1)!}{(p+1)!}\cdot\frac{(p-k+1)!\dots(p-2)!\,(p-1)!\,p!\,(p+1)!}{2!\,3!\dots(k-1)!\,k!\,(k+1)!\,(k+2)!}$$
$$\frac{2!\,3!\,\dots\dots\dots\dots\dots\,(k-1)!\,k!}{(p-k-1)!\,(p-k)!\,(p-k+1)!\dots(p-2)!\,(p-1)!}\,\Delta_{k+1},$$

značí-li

$$\Delta_{k+1} = \begin{vmatrix} 1, & (2)_1, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0 \\ 1, & (3)_1, & (3)_2, & \ldots\ldots & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & (k)_1, & (k)_2, & \ldots\ldots & (k)_{k-1}, & 0 \\ 1, & (k+1)_1, & (k+1)_2, & \ldots\ldots & (k+1)_{k-1}, & (k+1)_k \\ 1, & (k+2)_1, & (k+2)_2, & \ldots\ldots & (k+2)_{k-1}, & (k+2)_k \end{vmatrix}$$

pro $k > o$.

Zkrátíme-li co možná, obdržíme dále

$$(5) \qquad A_{p-k} = \frac{p!}{(p-k)!\,(k+1)!} \; \frac{\Delta_{k+1}}{(k+2)!} = \frac{(p)_k}{k+1} \; \frac{\Delta_{k+1}}{(k+2)!}.$$

Prof. Dr. F. J. Studnička ukázal ve svém pojednání: „*O novém neodvislém vyjádření čísel Bernujských a o vlastnostech příslušného determinantu*“ (v tomto časopise R. XV., č. III., pag. 97.—101.), že platí:

$$(6) \qquad B_r = (-1)^{r+1} \frac{\Delta_{2r}}{(2r+1)!},$$

$$(7) \qquad \Delta_{2r+1} = 0$$

pro $r > o$, značí-li B_r čísla Bernoulliova a

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1, & (2)_1, & 0, & \ldots & 0, & 0 \\ 1, & (3)_1, & (3)_2, & \ldots & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & (m-1)_1, & (m-1)_2, & \ldots & (m-1)_{m-2}, & 0 \\ 1, & (m)_1, & (m)_2, & \ldots & (m)_{m-2}, & (m)_{m-1} \\ 1, & (m+1)_1, & (m+1)_2, & \ldots & (m+1)_{m-2}, & (m+1)_{m-1} \end{vmatrix}.$$

Na základě tom obdržíme konečně ze vzorce (5), položíme-li $k = 2r-1$,

$$A_{p-(2r-1)} = \frac{(p)_{2r-1}}{2r} \cdot \frac{\Delta_{2r}}{(2r+1)!} = (-1)^{r+1} \frac{(p)_{2r-1}}{2r} B_r$$

a položíme-li $k = 2r$,

$$A_{p-2r} = \frac{(p)_{2r}}{2r+1} \cdot \frac{\Delta_{2r+1}}{(2r+2)!} = 0$$

pro $r > 0$.

Vzorec (4) uvádí také Dr. Benedikt Sporer ve svém spisku: „Niedere Analysis" (Göschen, Leipzig 1896) pag. 59.

Nedokázal jej však deduktivně, nýbrž pouze uměle sestrojil na základě analogie podle vzorců specialních pro Σk, Σk^2, Σk^3, Σk^4, ..., k nimž dospěl na základě vyšších řad arithmetických.

Bernoulliova čísla lze buď přímo nezávisle počítati dle vzorce (6), při čemž se může s prospěchem užiti subtraktivní transformace příslušného determinantu, anebo možno si pomocí vzorce (4) zjednati pro tato čísla rekurrentní formule.

Z tohoto vzorce plyne totiž pro $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1} k^p = 1^p = 1,$$

takže

$$1 = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{(p)_1}{2} B_1 - \frac{(p)_3}{4} B_2 + \frac{(p)_5}{6} B_3 - \frac{(p)_7}{8} B_4 + \dots. \tag{8}$$

Dosadíme-li do (8) postupně za $p = 2, 4, 6, 8, \dots$, obdržíme dostatečný počet linearných rovnic k určení čísel B.

Ke konci uvádím hodnoty několika prvních čísel Bernoulliových, jak je uvádí Dr. B. Sporer ve zmíněném spisku

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730},$$

$$B_7 = \frac{7}{6},\ B_8 = \frac{3617}{510},\ B_9 = \frac{43867}{798},\ B_{10} = \frac{174611}{330},\ \dots .$$