Václav Láska

Některé věty trigonometrické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 3, 217--220

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121864

Poznámka. Hodnoty $\sqrt[5]{1}$ jsou kořeny rovnice

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0;$$

rovnice stupně čtvrtého jest reciproká.

Některé věty trigonometrické.

Žákům středních škol podává

Dr. V. Láska,

docent české vysoké školy technické v Praze.*)

Označme strany trojúhelníka a, b, c a protilehlé úhly α, β, γ; pak platí, jak známo, věty:

$$b \cos \alpha + a \cos \beta = c$$
$$b \sin \alpha - a \sin \beta = 0.$$

Položíme-li

$$a = s_1 + s_2, \qquad \alpha = S_1 + S_2,$$
$$b = s_1 - s_2, \qquad \beta = S_1 - S_2,$$

nabudeme

$$s_1 \{\cos (S_1 + S_2) + \cos (S_1 - S_2)\}$$
$$- s_2 \{\cos (S_1 + S_2) - \cos (S_1 - S_2)\} = c,$$
$$s_1 \{\sin (S_1 + S_2) - \sin (S_1 - S_2)\}$$
$$- s_2 \{\sin (S_1 + S_2) + \sin (S_1 - S_2)\} = 0.$$

Poněvadž však

$$\sin (S_1 + S_2) + \sin (S_1 - S_2) = 2 \sin S_1 \cos S_2,$$
$$\sin (S_1 + S_2) - \sin (S_1 - S_2) = 2 \cos S_1 \sin S_2,$$
$$\cos (S_1 + S_2) + \cos (S_1 - S_2) = 2 \cos S_1 \cos S_2,$$
$$\cos (S_1 + S_2) - \cos (S_1 - S_2) = -2 \sin S_1 \sin S_2,$$

bude

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2\, s_1 \cos S_1 \cos S_2 + 2\, s_2 \sin S_1 \sin S_2 &= c, \\ s_1 \cos S_1 \sin S_2 - s_2 \sin S_1 \cos S_2 &= 0, \end{aligned}$$

---

*) t. č. professor vyšší geodaesie i astronomie při c. k. vysoké škole technické ve Lvově. *Red.*

takže máme vzorce:

$$(2)\quad \begin{aligned}(a+b)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+(a-b)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}&=c,\\ (a+b)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-(a-b)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}&=0.\end{aligned}$$

Poslední rovnice dává větu tangentovou

$$(3)\qquad (a+b)\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=(a-b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Vyloučíme-li z rovnic (2) veličiny $(a-b)$ neb $(a+b)$, obdržíme vzorce Cagnoliovy

$$(4)\qquad \begin{aligned}a+b&=c\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}},\\ a-b&=c\,\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.\end{aligned}$$

Poněvadž

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90-\frac{\gamma}{2},$$

bude dále:

$$(5)\qquad \begin{aligned}c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}&=(a-b)\cos\frac{\gamma}{2},\\ c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}&=(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Položme nyní v základních rovnicích

$$\begin{aligned}a&=m-(m-a),\\ b&=m-(m-b);\end{aligned}$$

pak bude

$$\begin{aligned}m\{\cos\alpha+\cos\beta\}&=(m-b)\cos\alpha+(m-a)\cos\beta+c,\\ m\{\sin\alpha-\sin\beta\}&=(m-b)\sin\alpha-(m-a)\sin\beta\end{aligned}$$

aneb

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{m-b}{2\,m}\cos\alpha+\frac{m-a}{2\,m}\cos\beta+\frac{c}{2m},$$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m-b}{2\,m}\sin\alpha-\frac{m-a}{2\,m}\sin\beta$$

a dělením

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{(m-b)\sin\alpha-(m-a)\sin\beta}{(m-b)\cos\alpha+(m-a)\cos\beta+c}.$$

Položme nyní

$$m-a=0,$$

pak jest

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{(a-b)\sin\alpha}{(a-b)\cos\alpha+c}. \tag{6}$$

Položíme-li

$$m-b=0,$$

plyne

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{(a-b)\sin\beta}{(a-b)\cos\beta-c} \tag{7}$$

a konečně pro

$$m-c=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{(c-b)\sin\alpha-(c-a)\sin\beta}{(c-b)\cos\alpha+(c-a)\cos\beta}. \tag{8}$$

Vzorců (6) a (7) lze výhodně použíti pro rozvinutí v řady v případě, že a jest málo rozdílným od b. Jimi řešen úkol z daných veličin

$$a-b,\ a-c,\ \alpha$$

vypočísti trojúhelník.

Z rovnice (7) plyne, značí-li λ ještě neznámý faktor:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\lambda\,\{(a-b)\sin\beta\},$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\lambda\,\{(a-b)\cos\beta-c\}.$$

Abychom λ určili, použijme vztahu

$$1 = \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2},$$

takže bude

$$1 : \lambda^2 = [(a - b) \sin \beta]^2 + [(a - b) \cos \beta - c]^2$$
$$= (a - b - c)^2 + 4c\,(a - b) \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

i máme potom

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \sin \beta}{\sqrt{(a - b - c)^2 + 4c\,(a - b) \sin^2 \frac{\beta}{2}}}, \tag{9}$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \cos \beta - c}{\sqrt{(a - b - c)^2 + 4c\,(a - b) \sin^2 \frac{\beta}{2}}}. \tag{10}$$

Vztahy takové, ač k výpočtu nejsou způsobilé, dlužno přece znáti, neboť mohou někdy komplikované výpočty zjednodušiti.

V Praze, v srpnu 1895.

O trojúhelníku, jehož strany tvoří řadu arithmetickou.

Podává

Antonín Libický,
professor na Král. Vinohradech.

(Dokončení.)

Důležitými příčkami každého trojúhelníka jsou *těžnice;* pro náš zvláštní trojúhelník zjednoduší se vzorce, kterými se vypočítávají tyto příčky ze stran trojúhelníka, takto:

Budiž B_2 rozpolovací bod strany AC trojúhelníka ABC; těžnici BB_2 označme t_2 a ω jeden z obou úhlů vedlejších, jež tvoří u bodu B_2 tato těžnice se stranou AC a to úhel ležící proti nejmenší straně a. V $\triangle\, B_2CB$, jehož strany jsou $2m - d$, m a t_2, bude dle věty cosinové