Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Havlíček
O větách Pelcových

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D6--D11

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121841`

O větách Pelcových.

Dr. K. Havlíček, Praha.

Věty Pelcovy,[1]) důležité pro zobrazování ploch druhého stupně, pojednávají o ohniskách homotetických kuželoseček, jež jsou průměty řezů dané plochy. Tyto homotetické kuželosečky se dotýkají dvakrát jakési jiné kuželosečky, totiž průmětu obrysu dané plochy.

Abychom odvodili Pelcovy věty, vyjděme z této věty (její důkaz je na příklad v knize E. Weyr: „Projektivná geometrie . . .“ str. 188).

Věta 1: Průsečíky odpovídajících si paprsku dvou křivých projektivních svazku tečen na kuželosečce vytvářejí kuželosečku, která se dané kuželosečky dvakrát dotýká, a to v samodružných elementech obou svazků.

Duálně: Spojnice odpovídajících si bodů dvou projektivních soumístných řad na kuželosečce obalují kuželosečku, která se dané kuželosečky dvakrát dotýká, a to v samodružných bodech obou řad.

Této věty lze užíti při řešení úlohy: sestrojiti kuželosečku, která prochází třemi danými body A, B, C a dotýká se dvakrát dané kuželosečky k^2. Z daných bodů sestrojíme tečny ke k^2: z bodu A tečny a, a', z bodu B tečny b, b', z bodu C tečny c, c'. Tím jsou určeny projektivní svazky tečen $(a, b, c, \ldots) \overline{\wedge} (a', b', c', \ldots)$, jejichž samodružné elementy dávají na k^2 dotyčné body hledané kuželosečky. Podle toho, jak v jednotlivých párech k sobě tečny přiřadíme, dostáváme čtvero řešení.

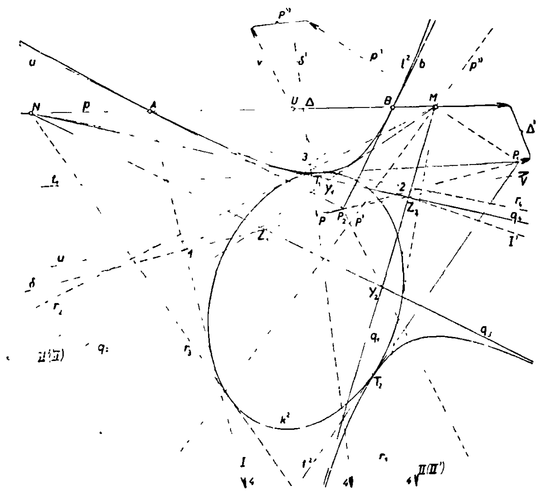
Obraťme se nyní k systému Σ kuželoseček, jež procházejí dvěma danými body A, B a dotýkají se dvakrát dané kuželosečky k^2. Právě uvedená úloha bude nám zde dobrá. Z bodů A, B vedeme ke k^2 tečny $I, I'; II, II'$. Z projektivních svazků známe nyní jen dva páry odpovídajících si elementů a pro direkční střed známe jen jedno geometrické místo, totiž přímku δ (viz obr.). Kdybychom k sobě přiřadili tečny v projektivních svazcích druhým možným způsobem, jak v obrázku naznačeno v závorkách, dostali bychom jiné projektivní svazky tečen; a pro jejich direkční střed opět jediné geometrické místo, totiž přímku δ'. Tím jsme množství všech kuželoseček naší soustavy Σ rozdělili ve dvě skupiny.[2]) Společné

[1]) Prof. K. Pelc je odvodil v pojednání: „Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades“. Zprávy o zasedání II. tř. vídeňské Akademie der Wissenschaften, sv. LXXV (r. 1877) a „Ergänzung zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades“, tamtéž sv. LXXVII (r. 1878).

[2]) Obě skupiny jsou rovnocenné, takže co dokážeme pro jednu, platí i pro druhou.

tečny kuželosečky k^2 a kuželoseček daného systému jsou pak samodružné elementy projektivních svazků; procházejí tedy direkčním středem, pro který známe jen jedno geometrické místo; platí tedy

věta 2: Společné tečny dotykové kuželosečky k^2 a kuželoseček daného množství Σ tvoří na k^2 dvě involuce tečen o osách δ a δ'.



Duálně: Budiž dáno množství Σ' kuželoseček, které se dotýkají dvou daných přímek a dvakrát dané kuželosečky. Dotykové body kuželoseček tohoto množství s kuželosečkou danou tvoří na dané kuželosečce dvě involuce.

— Důkazy všech duálních vět plynou z našich úvah užitím principu duality. —

Zvolme v dané soustavě jednu kuželosečku l^2 (viz obr.). To učiníme tak, že zvolíme její společné tečny t_1, t_2 s kuželosečkou k^2, jež se protínají na příklad na přímce δ. Jejich dotykové body na k^2 jsou body T_1, T_2. Jejich spojnice prochází pólem přímky δ ke k^2, bodem Δ. Bod Δ je na přímce $AB \equiv p$. Hledejme poláru bodu Δ ke kuželosečce l^2. Tato polára prochází bodem Δ', pro nějž je $(A, B, \Delta, \Delta') = -1$ — neboť A, B jsou body na l^2. Bod Δ' je na přímce δ, jak plyne z vlastností čtyrstranu I, I', II, II' opsaného k^2. Dále je bod Δ na spojnici T_1T_2; tyto body jsou opět na l^2; sestrojíme tedy k bodu Δ sdružený pól na této spojnici. A to je zase bod na přímce δ. Tedy polárou bodu Δ pro kuželosečku l^2 je přímka δ. Protože pak tato kuželosečka byla zvolena v daném systému zcela libovolně a bod Δ s přímkou δ jsou pevné, platí

věta 3:[3]) Všechny kuželosečky daného systému Σ, jejichž tečny s k^2 se protínají na přímce δ, mají společný pól Δ s polárou δ; druhá skupina má společný pól Δ' s polárou δ'.

Duálně: Všechny kuželosečky duálního systému Σ' se rozdělují ve dvě skupiny. Všechny kuželosečky téže skupiny mají společný pól s polárou.

První důsledek této věty je, že tečny jednotlivých kuželoseček dané soustavy Σ sestrojené v bodech A, B, se protínají na přímce δ nebo δ', neboť spojnice jejich dotykových bodů prochází bodem Δ resp. Δ'.

Sestrojme tečny kuželosečky l^2 v bodech A, B. Stačí sestrojiti jen tečnu na příklad v bodě B, neboť druhou sestrojíme podle toho, že se obě protínají na δ. — Kuželosečka l^2 se dotýká přímek t_1, t_2 v bodech T_1, T_2 (což můžeme pokládati za určení řady kuželoseček) a má procházeti bodem B. Podle věty Desarguesovy tvoří tečny v B sestrojené ke kuželosečkám zmíněné řady involuci. Jeden pár její jsou zde přímky II, II', tečny to ke k^2. Kromě toho známe jeden samodružný element této involuce. Je to spojnice bodu B s průsečíkem tečen t_1, t_2, který nazveme P_1. Druhý samodružný element dotýká se v bodě B té jednoduché kuželosečky, jež tím bodem prochází. To je l^2. A pro tento druhý samodružný element b platí $(II, II', BP_1, b) = -1$. Tato čtveřina vytíná na δ opět čtveřinu harmonickou: $(1, 2, P_1, P_2) = -1$, kde $1, 2$ jsou průsečíky δ s přímkami II, II' (resp. I, I') a P_2 je průsečík δ s b. Protože body $1, 2$ jsou pevné, platí

věta 4:[4]) Průsečík společných tečen s kuželosečkou k^2 a průsečík tečen v bodech A, B sestrojených k jednotlivým kuželosečkám daného systému Σ jsou páry involuce na přímce δ resp. δ' (o samodružných bodech $1, 2$ resp. $3, 4$; viz obr.).

---

[3]) Obecné polární vlastnosti tohoto systému a obecnějších odvodil prof. J. Klíma v článku: „Polárné vlastnosti soustavy kuželoseček, dotýkajících se dvojnásob dvou kuželoseček, . . .“ Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, ročník LVI.

[4]) Podobnou větu v soustavě kuželoseček, jež se dvakrát dotýkají dvou daných kuželoseček, dokázal prof. J. Sobotka v článku: „K některým konstrukcím kuželoseček, jejichž určující útvary nejsou reálné“. Časopis pro pěstování matem. a fys., ročník LIV.

Duálně: Tětiva spojující dotykové body kuželosečky systému Σ' s danou kuželosečkou k^2 a tětiva spojující dotykové body takové kuželosečky s danými dvěma přímkami tvoří pár jedné ze dvou paprskových involucí přiřazených systému Σ'.

Poznámka: Ve všech těchto úvahách bylo ovšem předpokládáno, že přímka $p = AB$ se nedotýká kuželosečky k^2; podobně ve větách duálních předpokládáme, že prusečík tečen a, b neleží na k^2.

Přikročme nyní k dukazu hlavní a poslední věty.

Věta 5: Veďme ke kuželosečkám systému Σ tečny z libovolných dvou pevných bodu M, N, jež jsou na spojnici základních bodů A, B. Průsečíky odpovídajících si tečen (vždy tečen téže kuželosečky) vyplní pro každou skupinu dvě kuželosečky (tedy celkem čtyři kuželosečky x_i^2, $i = 1, \ldots, 4$), jež mají s danou kuželosečkou k^2 společné tečny z bodu M, N (patří do téže řady).

Duálně: Sestrojme průsečíky kuželoseček soustavy Σ' se dvěma přímkami m, n, jež procházejí průsečíkem základních tečen a, b. Spojnice odpovídajících si prusečíků (vždy prusečíků s toutéž kuželosečkou) obalují pro každou skupinu dvě kuželosečky (tedy celkem čtyři), jež procházejí prusečíky dané kuželosečky s přímkami m, n (patří do téhož svazku).

Při důkazu budeme postupovati takto: Nejprve vytkneme kuželosečky x_i^2 ($i = 1, \ldots, 4$) — v obr. nerýsovány — a pak dokážeme, že prusečíky tečen z bodů M, N vedených k libovolné kuželosečce dané soustavy jsou na těchto kuželosečkách. Stačí ovšem provést důkaz jen pro jednu skupinu našich křivek, na př. pro skupinu těch kuželoseček, jež mají společný pól Δ s polárou δ (podle věty 3).

Kuželosečky x_1^2, x_2^2 k této skupině příslušné jsou dány čtyřmi tečnami r_i ($i = 1, \ldots, 4$) a bodem *1*. Přímkami r_i jsou tečny vedené z bodů M, N ke k^2 a bod *1* jest prusečík tečen *I* a *II'*. Leží ovšem na přímce δ. Tím jsou určeny dvě kuželosečky (podle věty Desarguesovy). Všimněme si nejprve, že také bod *2* leží na obou těchto kuželosečkách. Neboť pro všechny kuželosečky dotýkající se přímek r_i je pólem přímky p bod P, který je jejím pólem pro k^2. Je to průsečík přímek δ a δ'. A protože je $(1, 2, P, \Delta') = -1$, jak plyne z čtyrstranu I, I', II, II' opsaného rovněž k^2, jest bod *2* také na x_1^2 a x_2^2. Body *1* a *2* jsou zcela rovnocenné.

Hledejme póly přímky δ ke kuželosečkám x_1^2 a x_2^2. Tyto póly oba jsou na přímce p, neboť δ prochází jejím pólem P. Jako druhé geometrické místo pro tyto body stačí určit tečnu k x_1^2 a x_2^2 v bodě *1* (nebo *2*). Podle věty Desarguesovy jest v bodě *1* involuce tečen ke kuželosečkám dotýkajícím se přímek r_i. Jeden pár této involuce jsou tečny ke k^2, přímky I a II'. Druhý pár jsou na př. spojnice bodu 1 s některými protějšími vrcholy čtyrstranu r_i. Zvolme spojnice s body M, N. A tečny k x_1^2 a x_2^2 zde sestrojené jsou samodružné elementy této involuce a protnou přímku p v hledaných pólech. Tyto póly jsou tedy samodružné body involuce na p dané páry M, N — A, B. Tyto body nazveme U, V a jsou pevné, neboť oba páry involuce je určující jsou pevné. Bod U je tedy pólem přímky δ pro x_1^2 a bod V pro x_2^2.

Nyní sestrojme tečny z bodů M, N k některé kuželosečce naší soustavy první skupiny. Na př. k l^2. Označme je q_i $(i = 1, \ldots, 4)$. Ty se protínají ještě ve čtyřech bodech $Y_1, Y_2; Z_1, Z_2$. — Y_1, Y_2 jsou protější vrcholy a Z_1, Z_2 rovněž protější vrcholy čtyrstranu q_i. — Dokážeme, že body Y_1, Y_2 jsou na x_1^2, body Z_1, Z_2 na x_2^2.

Čtyrstran q_i opsaný l^2 má jednu diagonální stranu opět přímku p, jejímž pólem je tentokráte pro l^2 bod P_2, průsečík tečen k l^2 v bodech A, B. Budou tedy druhé dvě diagonální strany procházet pólem P_2 a budou protínat přímku p v bodech, jež dělí harmonicky body M, N a také body A, B (neboť to jsou body na l^2). To jsou ovšem body U, V, které jsme již výše určili. Jsou tedy dvě diagonální strany čtyrstranu q_i (nazveme je $u \equiv Z_1Z_2$ a $v \equiv Y_1Y_2$) spojnice bodů U, V s bodem P_2.

Uvažujme nyní involuci sdružených pólů kuželosečky x_1^2 na přímce $v \equiv Y_1Y_2$. Přímka v prochází bodem U a protíná jeho poláru k x_1^2, přímku δ, v bodě P_2. Jsou tedy body U a P_2 sdružené póly kuželosečky x_1^2 na v. A všimněme si hned, že platí

$$(Y_1, Y_2, U, P_2) = -1 \tag{1}$$

jak plyne z vlastností čtyrstranu q_i.

Abychom našli druhý pár sdružených pólů na v, stanovme nejdřív pól přímky v k x_1^2. Ten je zřejmě na přímce δ, a je harmonicky sdružen s bodem P_2 podle bodů $1, 2$. A to je bod P_1, průsečík společných tečen t_1, t_2 kuželoseček k^2 a l^2, jak plyne z věty 4. — Je tedy pólem přímky v k x_1^2 bod P_1.

Dále sestrojme pól přímky $MP_1 \equiv p'$ ke kuželosečce x_1^2. Nic by se nezměnilo na výsledku, kdybychom uvažovali spojnici NP_1. Tento pól je na přímce v a na sdružené poláře p'' k p' v bodě M, pro kterou platí $(r_1, r_2, p', p'') = -1$, neboť x_1^2 se dotýká přímek r_1, r_2. Průsečík přímek p'' a v, bod P', je tedy pólem přímky p' k x_1^2 a k němu sdružený pól na v je bod P'', průsečík přímek p' a v. — Uvažujeme-li řadu kuželoseček danou tečnami t_1, t_2 s dotyčnými body T_1, T_2, je v bodě M involuce tečen ke kuželosečkám té řady. Jeden pár této involuce je r_1, r_2, druhý q_1, q_2. Přímka $p' \equiv MP_1$ je jeden samodružný element. Protože je $(p', p'', r_1, r_2) = -1$, je také $(p', p'', q_1, q_2) = -1$ a tedy také

$$(P', P'', Y_1, Y_2) = -1. \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) ukazují, že body Y_1, Y_2 oddělují dva páry sdružených pólů kuželosečky x_1^2 harmonicky. To znamená, že tyto body jsou na kuželosečce x_1^2.

Podobně bychom dokázali, že body Z_1, Z_2 jsou na kuželosečce x_2^2.

Celou úvahu opakujme pro druhou skupinu naší soustavy kuželoseček, kde budou podobně vytvořeny kuželosečky x_3^2 a x_4^2.

Průsečíky zmíněných tečen skutečně vyplní křivky x_i^2. Neboť zvolíme-li bod na některé z nich, můžeme jej vždy považovat za průsečík tečen z bodů M, N vedených k nějaké kuželosečce dané soustavy. Důkaz je veden podobnými úvahami jako předcházející. — Věta 5 je tedy dokázána.

Všimněme si ještě toho **případu, kdy přímka** $p \equiv AB$ je **tečnou kuželosečky** k^2. Pak jednu skupinu naší soustavy tvoří kuželosečky složené. Skládají se z přímky p a z kterékoli jiné tečny k^2. Všechny věty dříve odvozené platí i zde, ale jen pro jednu skupinu, neboť pro složené kuželosečky nemá smysl o nich mluvit. Zvláště tedy podle věty 5 tečny z libovolných dvou bodů M, N přímky p k uvažovaným kuželosečkám vedené vytvoří svými průsečíky dvě kuželosečky, dotýkající se přímky p v jejím dotykovém bodě s k^2 a tečen z bodů M, N ke k^2 vedených.

Je-li přímka p nevlastní a body M, N body kruhové, změní se znění věty 5 takto:

Ohniska homotetických dané středové kuželosečky se dvakrát dotýkajících kuželoseček vyplní čtyři kuželosečky, jež jsou s danou kuželosečkou konfokální.

Ohniska homotetických dané paraboly se dvakrát dotýkajících kuželoseček vyplní dvě paraboly, jež mají s danou parabolou společné ohnisko a osu.

Tím jsou také dokázány věty Pelcovy. Neboť příslušné řezy plochy druhého stupně promítají se do kuželoseček, jež patří do **jedné** skupiny našeho množství. A v této skupině vytvoří jejich ohnisko jen **dvě** kuželosečky.

Kreslil Dr. K. Havlíček. Archiv JČMF.