Josef Štěpánek

Z geometrie trojúhelníka

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 3, R40--R43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121798

Z geometrie trojúhelníka.

1. příspěvek podává *Josef Štěpánek*, Tábor.

Ze sinové věty

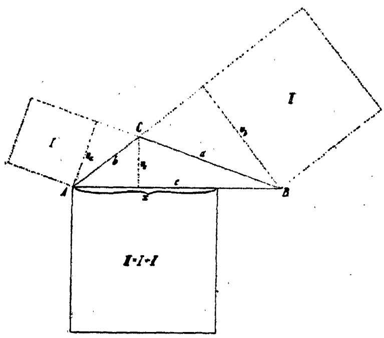
$$a \sin \gamma = c \sin \alpha$$
$$b \sin \gamma = c \sin \beta$$

dostanu, povýším-li tyto dva vztahy a sečtu:

$$a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma = c^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta). \quad (1)$$

Levá strana je součet obsahů čtverců o stranách $a \sin \gamma$, $b \sin \gamma$, a pravá strana je obsah čtverce o straně $x = c . \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$. Sestrojme v trojúhelníku ABC výšky v_a, v_b a nad nimi čtverce. I jest:

$$v_a = b \sin (180 - \gamma) = b \sin \gamma, \quad v_b = a \sin \gamma.$$



Obr. 1.

Podle věty (1) je tedy součet čtverců nad výškami roven čtverci o straně $x = c . \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$.

Tuto úsečku vyjádříme jinak, abychom ji sestrojili. Ježto $v_c = a \sin \beta$, $v_c = b \sin \alpha$, jest (2)

$$x = c . \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} = c . \sqrt{\left(\frac{v_c}{b}\right)^2 + \left(\frac{v_c}{a}\right)^2} = \frac{c . v_c}{ab} . \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sestrojíme nyní úsečku x z úseček c, v_c, a, b tak, že nejdříve sestrojíme přeponu trojúhelníka pravoúhlého o stranách a, b, $c_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, potom bude $x = \frac{c . v_c}{ab} . c_1$, položíme-li pak $\frac{c . v_c}{a} = p$, jest $x = \frac{p . c_1}{b}$. Větu (1) lze tedy vysloviti takto:

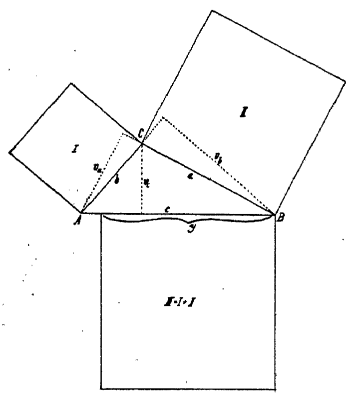
„Součet čtverců nad dvěma výškami v_a, v_b trojúhelníka rovná se čtverci o straně $x = \frac{c \, . \, v_c \, . \, \sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$." (Obr. 1.)]

To jest jen obecnější formulace věty Pythagorovy, ve kterou přejde ihned, je-li trojúhelník pravoúhlý. Z rovnic (2) také však vyplývá

$$v_a^2 + v_b^2 = c^2 \left[\frac{v_c^2}{a^2} + \frac{v_c^2}{b^2} \right],$$

čili

$$v_a^2 + v_b^2 = v_c^2 \, . \, c^2 \, . \, \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2},$$



Obr. 2.

a odtud

$$a^2 + b^2 = \frac{v_a^2 + v_b^2}{v_c^2 \, c^2} \, . \, a^2 b^2. \tag{3}$$

„Součet čtverců nad dvěma stranami trojúhelníka obecného rovná se čtverci o straně $y = \frac{ab}{v_c \, . \, c} \, . \, \sqrt{v_a^2 + v_b^2}$."

Tuto úsečku y lze také snadno sestrojiti. Nejdříve sestrojíme $v = \sqrt{v_a^2 + v_b^2}$, a položíme-li pak $\frac{ab}{v_c} = q$, jest $y = \frac{q \, . \, v}{c}$.

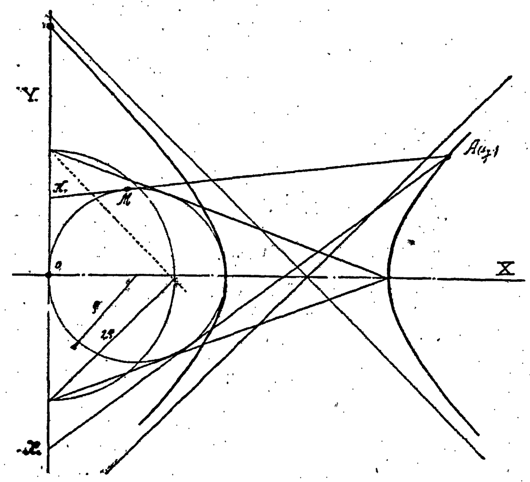
Také tato věta jest jen obecnější případ věty Pythagorovy. Jest-li totiž trojúhelník pravoúhlý jest $v_a^2 + v_b^2 = a^2 + b^2$, v rovnici (3) bude $v_c^2 c^2 = a^2 b^2$, $v_c c = ab$, což jsou jen dva výrazy pro dvojnásobek obsahu téhož trojúhelníka. (Obr. 2.)

2. příspěvek podává inž. *J. Fajtl.*

Zkoumejme řešení trojúhelníka, dány-li jsou: strana a výška jí příslušná v_a a poloměr kružnice vepsané ϱ.

I. Zvolme kružnici poloměru ϱ a tečnu k této; v tečně nechť leží strana a, ptejme se, jaké je geom. místo bodů, v nichž protínají se tečny vedené ke kružnici z vrcholů úsečky a.

Jeden takový bod budiž A, jeho souřadnice označme x, y (obr. 3). Obsah $\triangle\, K_1AK_2$ lze vyjádřiti ze vzorce $\triangle = \varrho s$, kdež s



Obr. 3.

značí poloviční součet stran. Označíme-li $MA = t$, pak $s = a + t$, takže

$$\triangle\, K_1AK_2 = \varrho(t + a),$$

avšak též

$$\triangle\, K_1AK_2 = x\frac{a}{2}.$$

Tedy

$$\frac{ax}{2} = \varrho(t + a) \text{ neb } \frac{ax}{2\varrho} - a = t. \tag{1}$$

Délku tečny lze též vyjádřiti z rovnice

$$t^2 = y^2 + x^2 - 2\varrho x. \tag{2}$$

Jestliže eliminujeme z rovnic (1) a (2) hodnotu t, obdržíme

$$x^2 + y^2 - 2\varrho x = \frac{a^2x^2}{4\varrho^2} - \frac{2a^2x}{2\varrho} + a^2,$$

z níž po úpravě

$$x^2 \frac{a^2 - 4\varrho^2}{4a^2\varrho^2} - x \frac{a^2 - 2\varrho^2}{a^2\varrho} - \frac{y^2}{a^2} + 1 = 0,$$

což jest rovnice hyperboly, jak patrno z rozboru.

Hyperbolu tu lze snadno sestrojiti tím, že určíme vrcholy a asymptoty. (Provedeno v obr. 3.)

Je-li tudíž dáno a, v_a, ϱ, lze z prvků a, ϱ sestrojiti hyperbolu, pak v průsečíku přímky rovnoběžné s a ve vzdálenosti v_a obdržíme vrchol A hledaného trojúhelníka. Je samozřejmé, že křivku netřeba kresliti.

II. Připomeňme si větu plynoucí z věty Dandelinovy: „Zůstává-li výška zdroje světelného nad rovinou vrženého stínu koule stálou, zůstává stálou též vedlejší poloosa stínu vrženého.“ (Důkaz na př. v Příloze M. a F., roč XIX., čl. prof. Doležala.)

Velikost vedlejší osy zjistíme, úsečku a zvolíme za hlavní osu kuželosečky a v ohnisku této bude se kružnice poloměru ϱ dotýkati přímky a, čímž trojúhelník stanoven.

α) Označme $OK_1 = y_1$, $OK_2 = y_2$ | Podle obr. 3.

Hlavní osa jest a.
Vedlejší osa jest b.

$$\text{Součin } OK_1 \,.\, OK_2 = y_1 y_2 = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right) \times \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Tedy

$$y_1 + y_2 = a,$$

$$y_1 y_2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$y_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Lze tedy najíti úseky $y_{1,2}$ z uvedeného výrazu, při čemž délka vedlejší poloosy jest určena rovnicí: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{v_a\varrho^2}{v_a - 2\varrho}$, jež vyplývá ze speciální polohy, kdy stínem koule jest kružnice.

β) Lze též počítati délku $t = AM$ a pomocí této provésti konstrukci. Je: $t = \frac{a(v_a - 2\varrho)}{\varrho}$. (Vyplývá ze vzorců vyvozených v uvedeném článku prof. Doležala.)