O vztahu dvou rovin, jimiž se nekonečně malé části podobně zobrazují (o vztahu isogonálném).

(Sděluje Dr. *Ed. Weyr.*)

1. Vyšetření nutné a postačující podmínky řečeného zobrazování pomocí úvah geometrických.

Buďtež x, y pravoúhelné koordinaty libovolného bodu roviny první, ξ, η souřadnice příslušného bodu roviny druhé, při čemž arci jednomu bodu x, y několik bodů ξ, η příslušeti může. Vzájemná souvislost hodnot x, y, ξ, η budiž dána dvěma rovnicemi

$$f(x, y, \xi, \eta) = 0, \qquad \varphi(x, y, \xi, \eta) = 0.$$

Differencováním obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Řešíme-li tyto rovnice vzhledem ku differenciálům $d\xi$ a $d\eta$ co neznámým, snadno plyne rovnice tvaru

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A dx + B dy}{C dx + D dy}$$

aneb

$$D \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{dy}{dx} + C \frac{d\eta}{d\xi} - B \frac{dy}{dx} - A = 0.$$

Bodu $x + dx$, $y + dy$ přísluší bod $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$. Položíme-li $\frac{dy}{dx} = tg\, a$, $\frac{d\eta}{d\xi} = tg\, \alpha$, budou a a α úhly, které uzavírají s osami x a ξ ony směry, v nichž jsme od původních bodů x, y a ξ, η k bodům sousedním přešli.

Máme tudíž

$$D\, tg\, a \,.\, tg\, \alpha + C\, tg\, \alpha - B\, tg\, a - A = 0.$$

Veškeré z bodu x, y vycházející směry tvoří svazek paprskový a podobně směry přímek vycházejících z bodu ξ, η.

Směry, jichž parametry (určující hodnoty) $tg\, a$ a $tg\, \alpha$ vyhovují poslední rovnici, budou směry příslušnými v daných rovinách. Přihlížejíce k této rovnici, shledáváme, že *jsou-li dvě roviny na vzájem jakkoli zobrazeny, tu tvoří příslušné směry dva promítavé svazky paprskové.*

Ano dle rovnic (1) můžeme všeobecněji říci, že tvoří dvě nekonečně malé sobě příslušné části obou rovin vždy obrazce kollineárné.

Je patrno, že ve zvláštních bodech to vše platnosti pozbýti může, jako na př. v bodech, v nichž parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ mizí.

V takovýchto bodech nejsou svazky příslušných směrů více kollineárné, nýbrž souvisí vztahem, ač algebraickým, tož přece složitějším. Následující úvahy však toho nevyžadují, abychom tyto zvláštní případy zde vyšetřili.

Za jaké podmínky bude se rovnati úhel uzavřený dvěma libovolnými směry vycházejícími z x, y úhlu, jež uzavírají směry příslušné v rovině druhé? Tento požadavek vyžaduje, aby v úvahu vzaté promítavé svazky byly shodnými, což se stane, přísluší-li paprskům O, P, spojujícím vrchol x, y s nekonečně vzdálenými body kruhovými roviny první ony dva paprsky Ω Π, jež procházejí bodem ξ, η a body kruhovými [1]) roviny druhé. Neb jsou-li v tomto případě L, M a Λ, N dva delší páry příslušných paprsků, bude dvojpoměr

$$(OPLM) = \frac{1}{(OPML)} = (\Omega\Pi\Lambda N) = \frac{1}{(\Omega\Pi N\Lambda)}$$

a tudíž i $\sphericalangle (LM) = \sphericalangle (\Lambda N)$, neb jest známo, že [2])

$$(OPLM) + (OPML) = 2 \cos 2\, (\widehat{LM})$$

$$(\Omega\Pi\Lambda N) + (\Omega\Pi N\Lambda) = 2 \cos 2\, (\widehat{\Lambda N})$$

[1]) Imaginárními body kruhovými v nekonečnu aneb stručněji „body kruhovými" roviny x, y rozumíme assymptotické body kruhu to jest body $x = \infty$, $y = \infty$, $\frac{x}{y} = +\sqrt{-1}$, které vyhovují rovnici

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Viz čl.: „Z novější geometrie" v 3. zprávě jednoty č. mathem. str. 14.

[2]) Viz *Chasles*: Géométrie Supérieure pag. 125.

Mají-li si tudíž příslušeti body dvou rovin spůsobem takovým, by korrespondující obrazce sobě byly v nekonečně malých částech podobny, jest třeba a postačí, by každému přímočárému elementu roviny první, jenž směřuje k bodu O neb P, příslušel v rovině druhé element směřující k bodu Ω neb Π. Jinými slovy: „přímkám roviny první procházejícím kruhovými body v nekonečnu musí příslušeti v rovině druhé též přímky procházející body kruhovými. Tedy přímkám $x \pm iy = Const.$ mají příslušeti přímky $\xi \pm i\eta = Const$; je-li tudíž $x \pm iy$ hodnotou stálou, má též $\xi \pm iy$ stálou býti, t. j. $\xi + iy$ musí býti funkcí $(x + iy)$ a $\xi - iy$ funkcí $(x - iy)$ aneb naopak $\xi + i\eta = f(x - iy)$ a $\xi - i\eta = f_1(x + iy)$.

Uvážíme-li, že se nám zde pouze o vztahy reálné jedná, t. j. o takové, dle nichž bodům reálným roviny jedné přidruženy jsou opět reálné body v rovině druhé, můžeme hodnoty x, y, ξ, η opět za reálné považovati a v tomto případu plyne z rovnice

$$\xi + i\eta = \text{funk. } (x + iy)$$

ihned $\xi - i\eta =$ konjugované funk. $(x - iy)$ a taktéž plyne z rovnice

$$\xi + i\eta = \text{funkce } (x - iy)$$

ihned $$\xi - i\eta = \text{konj. funk. } (x + iy).$$

Těmito úvahami jsme se konečně dodělali pouze geometrickou cestou tohoto známého všeobecného řešení vytknuté úlohy: „Aby obraz byl v nekonečně malých částech originálu podoben, jest nutné a postačí, by byly reálné funkce ξ, η, proměněných x, y takového spůsobu, aby buď $\xi + i\eta$ aneb $\xi - i\eta$ = funkci $(x + iy)$." Tato podmínka jest — jak známo — totožna s podmínkou, aby *Jacobi*-ho determinant obou funkcí $\xi \pm i\eta$ a $x + iy$ vymizel t. j., by

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} \pm i\dfrac{\partial\eta}{\partial x}, & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \pm i\dfrac{\partial\eta}{\partial y} \\ 1, & i \end{vmatrix} = 0.$$

Oddělíce veličiny reálné od imaginárních, obdržíme, vezmeme-li v prvním řádku znamení $+$ podmínečné rovnice

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = -\frac{\partial\eta}{\partial x}, \tag{2}$$

kdežto nám znamení — dá:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3}$$

Řešení druhé, karakterisované rovnicemi (3) se neliší podstatně od řešení prvního, jež vyjadřují rovnice (2). Neboť vztahujeme-li body ξ, η a x, y dvou rovin tak, by

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ a } \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

tu položme $\xi' = \xi$ a $\eta' = -\eta$; i jest pak patrno, že obrazce v rovině ξ' η' jsou shodné s příslušnými obrazci v rovině ξ, η a že se mají k oněm právě tak, jak rub k lici. Jest pak ale

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x} = \frac{\partial \eta'}{\partial y} \text{ a } \frac{\partial \xi'}{\partial y} = -\frac{\partial \eta'}{\partial x},$$

což se shoduje s řešením (2). Bylo by tudíž zbytečno, bychom v dalších úvahách přihlíželi k rovnicím (3), a přidržíme se tudíž vždy řešení prvního, které podávají rovnice (2), aneb jež jest vyjádřeno rovnicí,

$$\xi + i\eta = f(x + iy).$$

Věda, že těm, jež se raději počtem nežli pouhou geometrickou úvahou uspokojí, analytická verifikace nabytého výsledku zbytečnou nebude, chci ji stručně podati. Označíme-li parciální derivace $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ atd. stručně ξ_1, ξ_2 atd. bude

$$d\xi = \xi_1\, dx + \xi_2\, dy$$
$$d\eta = \eta_1\, dx + \eta_2\, dy.$$

Položíce tedy jako z počátku

$$\frac{dy}{dx} = tg\, a \quad \text{a} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = tg\, \alpha, \text{ shledáme}$$

$$tg\, \alpha = \frac{\eta_1 + \eta_2\, tg\, a}{\xi_1 + \xi_2\, tg\, a}. \tag{4}$$

Jest pak $a = arc\, tg\, (tg\, a)$ a tudíž

$$da = \frac{d\, tg\, a}{1 + tg^2 a} \text{ aneb } d\, tg\, a = (1 + tg^2 a) . da,$$

obdobně $d\, tg\, \alpha = (1 + tg^2\alpha)\, d\alpha$. Differencujeme-li rovnici (4), plyne, přihlížíme-li k právě vyvinutým formulím,

$$(1 + tg^2\alpha)\, d\alpha = \frac{\xi_1\, \eta_2 - \eta_1\, \xi_2}{(\xi_1 + \xi_2 tg\, a)^2} (1 + tg^2 a)\, da.$$

Vložíme-li za $tg\,\alpha$ hodnoty z (4) plynoucí, obdržíme

$$d\alpha = \frac{(\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2)(1 + tg^2 a)}{(\eta_1 + \eta_2\, tg\alpha)^2 + (\xi_1 + \xi_2\, tg\, a)^2} \,.\, da.$$

Předpokládáme-li, že $\xi_1 = \eta_2$ a $\xi_2 = -\eta_1$ t. j., že funkce ξ a η vyhovují rovnicím (2), shledáme snadno, že čítatel a jmenovatel napsaného zlomku sobě rovny jsou a tím, že $d\alpha = da$, nechť si má a jakoukoli hodnotu.

Rovnice tato praví, že příslušné směry α mezi sebou tytéž úhly uzavírají, jako směry a, což jsme dokázati chtěli.

Zvlášť zajímavý případ infinitesimálně podobných rovin jest onen, jenž vyjadřuje rovnice

$$a(\xi + i\eta)(x + iy) + b(\xi + i\eta) + c(x + iy) + d = 0,$$

když a, b, c, d konstanty značí. Kdybychom reálnou a imaginární část této rovnice zvlášť položili = o, obdrželi bychom snadno ξ a η co explicitné funkce hodnot x, y. *Möbius*, který tento vztah blíže proskoumal, nazval jej vztahem kruhovým (Kreisverwandtschaft) obou rovin. Koho by zajímalo, srovnej jeho: „Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geom. Darstellung." Abh. d. königl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1855.

2. Vyšetření nutné a postačující podmínky infinitesimálně podobného zobrazování dvou libovolných ploch pomocí geometrických úvah.

Řečená podmínka poprvé podána byla *Gauss*-em v pojednání „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird" (Preisfrage der königl. Societät der Wissensch. in Copenhagen für 1822). Ač chci na tomto místě hlavně jednati o zobrazování rovin, myslím, že nebude zcela od místa, vyvinu-li hlavní výsledek v onom pojednání obsažený cestou pouze geometrickou.

Jest známo, že geometrické místo imaginárních bodů kruhových všech rovin jest křivka imaginární stupně druhého, nalézající se v nekonečnu, kterouž mimo to všecky plochy kulové procházejí; za tou příčinou se tato křivka obyčejně nazývá imaginárním kruhem v nekonečnu*) (le cercle imaginaire à l'infini).

*) Viz pojednání: „Určování nekonečně vzdálených prvků prostorových útvarů geometrických." II. roč. 3 sešit časopisu tohoto str. 117.

Pravoúhelné koordinaty bodů této křivky jsou ony nekonečně velké hodnoty x, y, z, jež vyhovují rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Spojivá přímka dvou bodů xyz a $x'y'z'$ protíná imaginární kruh v nekonečnu, je-li

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = 0.$$

Z toho patrno, že differenciální rovnice křivek prostorových, jichž tečny neustále protínají imag. kruh v nekonečnu, zní

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Tyto křivky budeme zváti křivkami cyklickými (viz *Cremona*); *Loguerre* je nazývá isotropickými (Nouv. Annales de Math. 1870).

Každým bodem prochází nekonečné množství křivek cyklických, jichž tečny onen kužel vyplňují, který má vrchol v daném bodu a jenž prochází imag. kruhem v nekonečnu.

Z toho patrno, že na dané ploše existují dvě soustavy křivek cyklických t. j, každým bodem procházejí dvě. Dle článku předešlého jest pak patrno, že nutná a postačující podmínka infinitesimálně podobného zobrazení dvou ploch jest ta, by křivkám cyklickým plochy jedné příslušely křivky cyklické plochy druhé. Nyní lze snadno nalézti analytický tvar této podmínky.

Zavedeme-li dvě neodvisle proměnné t, u, jimiž stanovíme polohu libovolného bodu na ploše, budou x, y, z funkce t, u, čímž plyne

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = e\, dt^2 + 2f\, dt\, du + g\, du^2,$$

kdež e, f a g reálné funkce (t, u) značí.

Rozložíme-li tuto homogenní funkci druhého stupně vzhledem k dt a du do lineárních faktorů, obdržíme rovnici tvaru

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [H\, dt + (J + i\, K\, du)]\, [H\, dt + (J - i\, K\, du)],$$

kdež H, J, K opět reálné funkce proměnných t, u značí. Jsou tudíž

$$H\, dt + (J \pm i\, K)\, du = 0$$

differenciální rovnice obou soustav křivek cyklických.

Je-li integrál první differenciální rovnice uveden na tvar

$$p + iq = Const.$$

kdež jsou p a q reálné funkce t, u, bude integrál druhé diff. rovnice $p - iq = Const.$

Rovnice $p \pm iq = Const.$ představují obě soustavy křivek cyklických dané plochy.

Jsou-li pak $P \pm iQ = Const.$ rovnice čar cyklických druhé dané plochy (kdež P a Q reálné funkce dvou nových neodvisle proměnných T, U značí), tu bude vztah obou ploch daný dvěma rovnicemi

$$T = f(t, u), \quad U = \varphi(t, u)$$

tenkráte infinitesimálně podobný, budou-li čarám $p \pm iq = Const.$ přislušeti čáry $P \pm iQ = Const.$ Přihlídneme-li opět k tomu, že se nám zde jedná o vztahy reální t. j., že předpokládáme T a U za reální, jsou-li jimi t, u a tudíž i totéž o P, Q, p, q, plyne podmínka

$$P + iQ = \text{funkci } (p + iq)$$

aneb

$$P - iQ = \text{funkci } (p + iq).$$

Řešení daného úkolu pozůstává tedy v tom, by se nalezly čáry cyklické obou daných ploch. Čáry tyto můžeme bezprostředně pro rovinu i pro plochu kulovou vytknouti. Čáry cyklické v rovině XY jsou totiž, jak již známo

$$X \pm iY = Const.$$

Co se koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dotýká, jest známo, že prochází nekonečně vzdáleným imaginárním kruhem a že tudíž její (imaginární) povrchové přímky již jsou čarami cyklickými; protíná tudíž každá tečná rovina plochu kulovou ve dvou čarách cyklických. Rovina

$$\frac{x + iy}{a + z} = \text{Const.}$$

jest rovinou takovou, neb má od středu koule vzdálenost a; rovnice,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
$$\frac{x + iy}{a + z} = \text{Const.}$$

stanoví tedy všechny čáry cyklické kulové plochy.

Jsou-li tudíž X a Y takové funkce koordinat x, y, z, by čarám cyklickým roviny příslušely čáry cyklické plochy kulové, to jest, by

$$X \pm iY = \text{funk.} \left(\frac{x + iy}{a + z}\right),$$

tu bude koule v rovině infinitesimálně podobně zobrazena, *) výsledek pro konstrukci geografických kart zajímavý.

3. Vraťme se opět k jednoduššímu případu infinitesimálně podobného zobrazování dvou rovin x, y a ξ, η. Budiž nám dána v rovině první soustava jistých křivek

$$f_1(x, y) = c_1$$

kdež c_1 proměnný parametr značí, a vytkněme si za úkol, zobraziti obě roviny spůsobem inf. podobným tak, by křivkám dané soustavy příslušely přímky $\xi = \text{Const.}$ rovnoběžné s osou η. Předpokládáme-li, že se tomuto požadavku vyhověti může, jest ihned patrno, že budou orthogonálním trajektoriím křivek $f_1 = c_1$ příslušeti orthogonální trajektorie čar $\xi = \text{Const}$, t. j. přímky $\eta = \text{const}$.

Buďtež $f_2(x, y) = c_2$ rovnice oněch orthogonálních trajektorií t. j. předpokládejme, že křivky

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= c_1 \\ f_2(x, y) &= c_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

vždy kolmo se protínají. Plyne pro křivku první

$$dy : dx = -\frac{\partial f_1}{\partial x} : \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

a pro křivku druhou

$$dy : dx = -\frac{\partial f_2}{\partial x} : \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

a poněvadž se součin obou poměrů $\frac{dy}{dx}$ má $= -1$, obdržíme rovnici

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

Rovnice tato jest identická t. j. platí pro libovolné hodnoty x a y.

Podmínka, by křivkám $f_1 = c_1$ a $f_2 = c_2$ příslušely přímky $\xi = \text{Const.}$ a $\eta = \text{Const.}$, patrně vyžaduje, by ξ záviselo pouze na $f_1(x, y)$ a η pouze na $f_2(x, y)$ t. j. tedy by

$$\xi = \varphi_1(c_1), \quad \eta = \varphi_2(c_2) \qquad (3)$$

---

*) Viz *Gaussovo* pojednání pag. 18, co se formy této rovnice týká. Řešení samé pochází od *Lagrange*, viz: „Sur la construction des cartes géographiques“ Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1779.

kdež φ_1 a φ_2 ještě neurčité funkce značí; hodnoty c_1 a c_2 zde můžeme právě tak jako x, y za koordinaty bodů dané roviny považovati, neb lze x i y vyjádřiti pomocí c_1 a c_2. Aby pak bylo zobrazení stanovené rovnicemi (3) infinitesimálně podobné, jest nutno a postačí (dle čl. 1), by

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = - \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{4}$$

Jest pak dle rovnic (3):

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{dc_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{d\xi}{dc_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\eta}{dc_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\eta}{dc_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial y}$$

Podmínečné rovnice (4) tudíž znějí

$$\frac{d\xi}{dc_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x} - \frac{d\eta}{dc_2} \frac{\partial c_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d\xi}{dc_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{d\eta}{dc_2} \frac{\partial c_2}{\partial x} = 0.$$

Dle rovnice (2) jest však determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial x}, & -\frac{\partial c_2}{\partial y} \\ \frac{\partial c_1}{\partial y}, & \frac{\partial c_2}{\partial x} \end{vmatrix} = 0,$$

čímž patrno, že ony dvě podmínečné rovnice se vlastně na jednu redukují. Vezmouce tedy příkladně první, máme jedinou podmínku

$$\frac{d\xi}{dc_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x} - \frac{d\eta}{dc_2} \frac{\partial c_2}{\partial y} = 0.$$

Podmínka tato má opět identicky vyplněna býti t. j. pro každé hodnoty x, y. Vyjadřme si pomocí rovnic (1) hodnoty x, y co funkce $(c_1 \; c_2)$ a budiž pak

$$\frac{\partial c_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = A(c_1 \; c_2)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = B(c_1 \; c_2).$$

Zní pak poslední rovnice

$$A . \frac{d\xi}{dc_1} = B . \frac{d\eta}{dc_2}$$

to jest

$$\frac{d\eta}{dc_2} : \frac{d\xi}{dc_1} = A:B.$$

Uvážíme-li, že jsme ξ předpokládali co pouhou funkci c_1 a η co pouhou funkci c_2, jest patrno, že $\frac{d\eta}{dc_2} : \frac{d\xi}{dc_1}$ bude míti tvar $\psi_1(c_1) . \psi_2(c_2)$ t. j. by úkol řešitelným byl, musíme předpokládat, že

$$\frac{A(c_1 c_2)}{B(c_1 c_2)} = \psi_1(c_1) . \psi_2(c_2).$$

Pak plyne

$$\frac{d\eta}{dc_2} = \psi_1(c_1)\, \psi_2(c_2) . \frac{d\xi}{dc_1} .$$

Uvážíme-li dále, že $\frac{d\eta}{dc_2}$ má záviset pouze na c_2, musíme nutně položiti

$$\psi_1(c_1) . \frac{d\xi}{dc_1} = \alpha$$

kdež α jakoukoli konstantu značí.

Plyne pak

$$\frac{d\eta}{dc_2} = \alpha\, \psi_2(c_2)$$

čímž konečně obdržíme ξ a η vyjadřeny pomocí c_1 a c_2 totiž

$$\xi = \alpha \int \frac{dc_1}{\psi_1(c_1)} + \text{Const.}$$

$$\eta = \alpha \int \psi_2(c_2)\, dc_2 + \text{Const.}$$

kdež integrační stálé arci zcela libovolny jsou.

Jsou-li tudíž

$$f_1(x, y) = c_1 \text{ a } f_2(x, y) = c_2$$

dvě soustavy orthogonálních křivek, tu jest nutná a postačující podmínka, by existoval vztah isogonálný takový, aby jim příslušely dvě soustavy rovnoběžných na vzájem kolmých přímek, by vyjádřivše částečné derivace $\frac{\partial c_1}{\partial x}$ a $\frac{\partial c_1}{\partial y}$ pomocí c_1 a c_2 podíl

$$\frac{A(c_1 c_2)}{B(c_1 c_2)} = \psi_1(c_1)\, \psi_2(c_2),$$

při čemž ψ_1 a ψ_2 jakékoli funkce býti mohou. Objasněme theorii příkladem.

Příklad. Mějmež soustavu koncentrických, podobných a podobně položených ellips

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\beta^2\lambda^2}=1,$$

kdež λ proměnný parametr značí a $\beta<1$, a vytkněmež si za úkol, bychom rozhodli, zdali jim jistým isogonálným vztahem může příslušeti soustava rovnoběžných přímek $\xi=$ Const. Za tou příčinou stanovme ortogonálné trajektorie řečené soustavy ellips. Zavedeme-li polární souřadnice ω, ϱ pomocí formulí

$$\varrho \sin\omega=y\,,\ \varrho\cos\omega=x$$

zní hořejší rovnice

$$\varrho^2\left[\frac{\cos^2\omega}{\lambda^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2\lambda^2}\right]=1.$$

Značí-li Θ úhel, jejž uzavírá tečna ellipsy s průvodičem, jest jak známo

$$tg\,\Theta=\frac{d\varrho}{\varrho\,d\omega}\,;$$

a je-li Θ' obdobný úhel pro orthogonální trajektorii, bude

$$tg\,\Theta'=-\frac{1}{tg\,\Theta}=-\varrho\frac{d\omega}{d\varrho}\,.$$

Differencováním rovnice ellipsy plyne

$$\varrho\,d\varrho\left[\frac{\cos^2\omega}{\lambda^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2\lambda^2}\right]+\varrho^2\left[\frac{1}{\beta^2\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right]\sin\omega\cos\omega\,d\omega=0$$

aneb přihlížíme-li k rovnici ellipsy:

$$\frac{d\varrho}{\varrho}+\varrho^2\sin\omega\cos\omega\frac{1-\beta^2}{\beta^2\lambda^2}d\omega=0$$

čímž

$$\frac{d\varrho}{\varrho\,d\omega}=tg\,\Theta=-\frac{1-\beta^2}{\beta^2\lambda^2}\,.\,\varrho^2\sin\omega\cos\omega\,.$$

Vyjadříme-li konečně i proměnný parametr λ pomocí ϱ a ω, bude

$$\frac{1}{\beta^2\lambda^2}=\frac{1}{\varrho^2(\beta^2\cos^2\omega+\sin^2\omega)}$$

a tedy

$$\frac{d\varrho}{\varrho\,d\omega}=-(1-\beta^2)\frac{\sin\omega\cos\omega}{\beta^2\cos^2\omega+\sin^2\omega)}\,.$$

Zní tudíž differenciální rovnice orthogonálních trajektorií

$$\frac{d\varrho}{\varrho\,d\omega}=\frac{\beta^2\cos^2\omega+\sin^2\omega}{(1-\beta^2)\sin\omega\cos\omega}$$

Integrál této rovnice jest patrně

$$\log.\text{nat.}\ \varrho = \frac{1}{1-\beta^2}\int \frac{\beta^2 \cos^2\omega + \sin^2\omega}{\sin\omega\cos\omega}\,d\omega + \text{Const}.$$

aneb

$$\varrho = \text{Const.}\left[\frac{(\sin\omega)^{\beta^2}}{\cos\omega}\right]^{\frac{1}{1-\beta^2}}$$

čili

$$\varrho^{2(1-\beta^2)}\left[\frac{\cos\omega}{(\sin\omega)^{\beta^2}}\right]^2 = \text{Const.}$$

Zavedeme-li opět pravoúhelné souřadnice, přejde tato rovnice na

$$(x^2+y^2)^{1-\beta^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)^{\beta^2} = \text{Const.}$$

to jest

$$\frac{x}{y^{\beta^2}} = \text{Const.}$$

Položíme-li nyní $\beta^2 = \alpha$ a označíme-li proměnný parametr λ^2 písmenou c_2, representují rovnice

$$f_1(x,y) = \frac{x}{y^\alpha} = c_1$$

$$f_2(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{\alpha} = c_2$$

dvě soustavy orthogonálních křivek. *)

Jest nyní

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{y^\alpha} \text{ a } \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{2y}{\alpha}$$

a tudíž podíl těchto dvou hodnot označený v předešlém

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{2y^{\alpha+1}}.$$

Z rovnic trajektorií plyne eliminací x:

$$\alpha c_1^2 y^{2\alpha} + y^2 = \alpha c_2,$$

---

*) Orthogonální trajektorie dané soustavy podobných ellips, totiž křivky $\frac{x}{y^\alpha} = c_1$ jsou paraboly, je-li $\alpha = \beta^2 = \frac{1}{2}$ t. j., je-li poměr velké osy ellipsy k malé $= \frac{1}{\beta} = \sqrt{2}$.

čímž patrno, že všeobecně nelze uvésti y na tvar

$$\psi_1(c_1) \cdot \psi_2(c_2)$$

a tudíž, že i $\frac{A}{B}$ tento tvar míti nemůže. Tím jsme shledali, že neexistuje nižádný isogonálný vztah, jenž by vytknuté již podmínce vyhověl.

Jen v speciálním případu $\alpha = 1$ jest

$$y^2(c_1{}^2 + 1) = c_2 \text{ t. j. } y^2 = \frac{c_2}{c_1{}^2 + 1}$$

a tedy

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{2y^2} = \frac{c_1{}^2 + 1}{2c_2} = \psi_1(c_1) \cdot \psi_2(c_2),$$

vezmeme-li

$$\psi_1(c_1) = c_1{}^2 + 1, \quad \psi_2(c_2) = \frac{1}{2c_2}.$$

V případě tomto znějí rovnice orthogonálních trajektorií

$$f_1(x, y) = \frac{x}{y} = c_1$$

$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 = c_2$$

a representují soustavu přímek procházejících počátkem souřadnic a soustavu koncentrických kruhů. Plyne pak dle vyvinutých formulí

$$\xi = \alpha \int \frac{dc_1}{c_1{}^2 + 1} + \text{Const.} = \alpha \text{ arc. } tg\, c_1 + \text{Const.}$$

$$\eta = \alpha \int \frac{dc_2}{2c_2} + \text{Const.} = \frac{\alpha}{2} \text{ log. nat. } c_1 + \text{Const.}$$

aneb

$$\xi = \alpha \text{ arc } tg \frac{x}{y} + \text{Const.}$$

$$\eta = \frac{\alpha}{2} \text{ log. nat. } (x^2 + y^2) + \text{Const.}$$

kdež α značí libovolnou stálou.

Těmito dvěma rovnicemi jest tudíž stanoven isogonálný vztah dvou rovin $\xi\eta$, xy. Konstanty integrační a stálá α mají patrně vliv pouze na polohu a měřítko zobrazení, nemohou však v podstatě zobrazení samého ničeho měniti.

4. Mějmež dány dvě soustavy orthogonálných křivek rovnicemi tvaru všeobecnějšího

$$f_1(x, y, c_1) = 0$$
$$f_2(x, y, c_2) = 0$$

a hledejme podmínku, za kterou lze zobraziti rovinu $x\,y$ spůsobem isogonálným, v rovině $\xi\,\eta$ tak, by oněm křivkám příslušely soustavy rovnoběžných přímek

$$\xi = \text{Const.},\ \eta = \text{Const},\ \text{t. j. by}\ \xi = \varphi_1(c_1)\ \text{a}\ \eta = \varphi_2(c_2).$$

Orthogonalita obou soustav daných křivek jest opět vyjadřena rovnicí identickou

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0.$$

Isogonálnost vztahu pak vyjadřují zase podmínečné dvě rovnice

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y},\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Jest však právě jako v předešlém článku

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{dc_1}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial x},\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{d\xi}{dc_1}\frac{\partial c_1}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\eta}{dc_2}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial x},\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\eta}{dc_2}\frac{\partial c_2}{\partial y},$$

a tudíž obě podmínečné rovnice:

$$\frac{d\xi}{dc_1}\frac{\partial c_1}{\partial x} - \frac{d\eta}{dc_2}\frac{\partial c_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d\xi}{dc_1}\frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{d\eta}{dc_2}\frac{\partial c_2}{\partial x} = 0.$$

Eliminujeme-li z těchto rovnic totální derivace, plyne podmínka, jež orthogonalitou obou soustav křivek již vyplněna jest. Postačí tudíž jen jednu z podmínečných rovnic bráti v úvahu na př. první. Tato rovnice

$$\frac{d\xi}{dc_1}\frac{\partial c_1}{\partial x} = \frac{d\eta}{dc_2}\frac{\partial c_2}{\partial y}$$

přejde na tvar

$$\frac{d\xi}{dc_1}\left\{-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial c_1}}\right\} = \frac{d\eta}{dc_2}\left\{-\frac{\frac{\partial f_2}{\partial y}}{\frac{\partial f_2}{\partial c_2}}\right\},$$

zavedeme-li za částečné derivace jich hodnoty z rovnic $f_1 = 0$ $f_2 = 0$ plynoucí. Plyne tedy

$$\frac{d\eta}{dc_2} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} \cdot \frac{\frac{\partial f_2}{\partial c_2}}{\frac{\partial f_1}{\partial c_1}} \cdot \frac{d\xi}{dc_2}$$

aneb stručněji

$$\frac{d\eta}{dc_2} = M \frac{d\xi}{dc_1},$$

označivše písmenou M výraz

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} \; \frac{\frac{\partial f_2}{\partial c_2}}{\frac{\partial f_1}{\partial c_1}} = M (c_1 \, c_2)$$

vyjádřený co funkce c_1 a c_2. Má-li býti problém řešitelný, musí ze známých příčin M míti tvar

$$M = \psi_1 (c_1) \, \psi_2 (c_2).$$

Položivše pak

$$\frac{d\xi}{dc_1} = \frac{\alpha}{\psi_1(c_1)},$$

plyne

$$\frac{d\eta}{dc_2} = \alpha \, \psi_2 (c_2)$$

a tudíž konečně řešení

$$\xi = \alpha \int \frac{dc_1}{\psi_1 (c_1)} + \text{Const.}$$

$$\eta = \alpha \int \psi_2 (c_2) \, dc_2 + \text{Const.},$$

vše jako v čl. předešlém.

Příklad. Mějme soustavy konfokálných ellips a hyperbol

$$\frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_1 - e} - 1 = 0 \quad (c_1 > e)$$

$$\frac{x^2}{c_2} + \frac{y^2}{c_2 - e} - 1 = 0 \quad (c_2 < e),$$

kteréž jak známo tvoří dvě soustavy orthogonálných trajektorií, což by se mimochodem též pomocí předcházejících formul velmi snadno verifikovati mohlo.

Odstranivše jmenovatele, položme tedy

$$f_1 (x \, y \, c_1) = (c_1 - e) \, x^2 + c_1 \, y^2 - c_1 \, (c_1 - e) = 0$$
$$f_2 (x \, y \, c_2) = (c_2 - e) \, x^2 + c_2 \, y^2 - c_2 \, (c_2 - e) = 0 \quad (1)$$

načež obdržíme differencováním

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2(c_1 - e)x\,; \quad \frac{\partial f_1}{\partial c_1} = x^2 + y^2 - 2c_1 + e\,;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2c_2 y \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial c_2} = x^2 + y^2 - 2c_2 + e.$$

Jest tedy

$$M = \frac{(c_1 - e)x}{c_2 y} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2c_2 + e}{x^2 + y^2 - 2c_1 + e}$$

Nutno nyní, abychom vyjádřili toto M pomocí c_1 a c_2. Odečteme-li rovnici (1), plyne

$$(c_1 - c_2)(x^2 + y^2) = c_1(c_1 - e) - c_2(c_2 - e)$$

čímž obdržíme $x^2 + y^2$ a po snadné redukci též

$$x^2 + y^2 - 2c_2 + e = c_1 - c_2.$$

Obdobně

$$x^2 + y^2 - 2c_1 + e = -(c_1 - c_2),$$

tedy

$$M = -\frac{c_1 - e}{c_2}\,\frac{x}{y}.$$

Řešíme-li rovnice (1) vzhledem k x^2 a y^2, obdržíme snadně

$$\frac{x^2}{y^2} = -\frac{c_1 c_2}{(c_1 - e)(c_2 - e)}$$

a konečně

$$M = \pm\sqrt{-\frac{c_1(c_1 - e)}{c_2(c_2 - e)}}.$$

Má tudíž M skutečně tvar $\psi_1(c_1) \,.\, \psi_2(c_2)$ a sice dlužno položiti (vzhledem ku $c_2 < e$)

$$\psi_1(c_1) = \sqrt{c_1(e_1 - e)}\,, \quad \psi_2(c_2) = \frac{1}{\sqrt{c_2(e - c_2)}}.$$

Plyne pak hledaný isogonálný vztah formulemi

$$\xi = \alpha \int \frac{dc_1}{\sqrt{c_1(c_1 - e)}} + \text{const.}$$

$$\eta = \alpha \int \frac{dc_2}{\sqrt{c_2(c - c_2)}} + \text{const.}$$

kdež integrály známými vzorci stanoviti lze. *)

---

*) Viz *Lamé* „Leçons sur les coordonnées curvilignes". Lecon XI^ième, §. CVIII., s čímž se naše formule *podstatně* úplně shodují.

Příklad. Jest známo, že kruhy procházející body $y=0$, $x=\pm m$ kolmo protínají soustavu kruhů, jež procházejí ideálnými body $x=0$, $y=\pm m\sqrt{-1}$.

Tudíž nám představují rovnice

$$f_1(x,y)=x^2+y^2-2c_1 y-m^2=0$$
$$f_2(x,y)=x^2+y^2-2c_2 x+m^2=0$$

dvě soustavy orthogonálných trajektorií.

Zkusme, zdali tyto kruhy lze zobraziti isogonálně přímkami $\xi=\text{Const.}$, $\eta=\text{Const.}$ Jest

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial f_2}{\partial y}=2y;\ \frac{\partial f_2}{\partial c_2}=-2x;\ \frac{\partial f_1}{\partial c_1}=-2y,$$

a tedy

$$M=\frac{x^2}{y^2},$$

kterouž hodnotu co funkci c_1 a c_2 vyjádřiti musíme. Plyne:

$$f_1-f_2=(c_2\lambda-c_1)y-m^2=0,$$

položivše $\frac{x}{y}=\lambda$; tedy $y=\frac{m^2}{c_2\lambda-c_1}$, což vloženo do rovnice f_1 dá po krátké redukci

$$\lambda^2=M=\frac{c_1^2+m^2}{c_2^2-m^2}.$$

Veličina M jest tedy v skutku tvaru $\psi_1(c_1)\psi_2(c_2)$ a sice nutno položiti,

$$\psi_1(c_1)=c_1^2+m^2;\ \psi_2(c_2)=\frac{1}{c_2^2-m^2}.$$

Jest tedy konečně

$$\xi=\alpha\int\frac{dc_1}{c_1^2+m^2}+\text{Const.}$$
$$\eta=\alpha\int\frac{dc_2}{c_2^2-m^2}+\text{Const.}$$

Tyto integrály lze snadno vyčísliti, načež za c_1 a c_2 zavésti dlužno *) jich hodnoty co funkce x, y z $f_1=0$, $f_2=0$ plynoucí.

5. V předešlých dvou článcích jsme nalezli podmínku, za kterou danou soustavu křivek vztahem isogonálným přímkami rovnoběžnými $\xi=\text{Const.}$ zobraziti lze; vyžadovalo však toto rozhodnutí, abychom znali orthogonálné trajektorie daných křivek. Rychleji a přímo můžeme věc rozhodnouti spůsobem následujícím.

*) Srovnej citované dílo Leçon XII[ième].

Budiž dána soustava křivek rovnicí

$$f_1(x, y) = c_1$$

aneb differenciální rovnicí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy = 0.$$

Je-li pak

$$f_2(x, y) = c_2$$

rovnice orthogonálných trajektorií, bude pro tyto křivky

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy = 0$$

a z orthogonality samé plyne, že musí

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} : \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} : -\frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

Můžeme tedy položiti

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = P \frac{\partial f_1}{\partial y}\,;\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = -P \frac{\partial f_1}{\partial x},$$

kdež P jistou funkci x, y značí. Jest ale

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} dx - \frac{\partial f_1}{\partial x} dy = 0$$

differenciálná rovnice orthogonálných trajektorií a tudíž patrně P integračním faktorem této rovnice.

Podmínka, by mohly křivky první soustavy isogonálně příslušeti přímkám $\xi =$ Const., bylo však dle čl. 3.

$$\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}} = \psi_1(c_1)\,\psi_2(c_2),$$

aneb vloživše za $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ a $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ jich hodnoty:

$$-\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}}{P\dfrac{\partial f_1}{\partial x}} = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}}{P\dfrac{\partial f_1}{\partial y}} = \psi_1(c_1)\,\psi_2(c_2)$$

to jest

$$-\frac{1}{P} = \psi_1\,\psi_2$$

aneb co do formy

$$P = \psi_1(c_1)\,.\,\psi_2(c_2).$$

Jest však $c_2 = f_2\,(x, y)$ integrálem differenciální rovnice

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dy = 0,$$

jejíž integračním faktorem jest P, z čehož patrno, že $\dfrac{P}{\psi_2(c_2)} = Q$ bude opět integračním faktorem této rovnice.

Nutno tudíž, aby existoval integrační faktor Q differenciální rovnice

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dy = 0$$

tvaru

$$Q = \psi\,(c_1) = \psi\,[f_1\,(x, y)\,]\,.$$

Jest tedy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Q\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = 0$$

neb

$$Q\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

to jest

$$\psi\,(f_1)\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right) + \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2\right]\frac{d\,\psi\,(f_1)}{df_1} = 0 \quad (1)$$

čímž

$$\frac{d\,\psi\,(f_1)}{df_1} : \psi\,(f_1) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Levá strana této rovnice jest pouhou funkcí veličiny f_1, platí tedy totéž o straně pravé t. j. hledaná podmínka zní

$$-\frac{\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2} = F\,(f_1),$$

kdež F libovolnou funkcí býti může. Jest pak

$$\frac{d\,\psi\,(f_1)}{\psi\,(f_1)} = F\,(f_1)\,.\,df_1$$

a tedy

$$\psi\,(f_1) = e^{\int F\,(f_1)\,df_1} + \text{Const.}$$

Tato hodnota jest pak integračním faktorem differenciální rovnice hledaných orthog. trajektorií; stanovení těchto trajektorií závisí tedy nyní na pouhých kvadraturách.

Položíme-li $\int \psi(f_1)\, df_1 + \text{Const.} = \Phi(f_1)$, snadno shledáme, že

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \psi(f_1) \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right] + \frac{d\psi(f_1)}{df_1} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2\right]$$

a že tedy dle rovnice (1)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Křivky $\Phi = \text{Const.}$, jež této podmínce výhovují, zovou se však *isothermickými*; jelikož rovnice $\Phi\ (f_1) = \text{Const.}$ lze nahraditi touto $f_1\ (x, y) = \text{Const.}$, jest patrna věta následující:

„Má-li býti možno, aby daným křivkám $f_1\ (x, y) = c_1$ isogonálně přislušely přímky rovnoběžné $\xi = \text{Const.}$, jest nutno a postačí, by ony křivky tvořily soustavu isothermických čar neb, což totéž jest, by

$$-\frac{\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2} = F(f_1)$$

kdež F jakoukoli funkci značí. *)

Orthogonálné trajektorie soustavy isothermické lze vždy určiti pouhými kvadraturami, neb jest

$$e^{\int F(f_1)\, df_1 + \text{Const.}}$$

integračním faktorem differenciálné rovnice

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx - \frac{\partial f_1}{\partial x}\, dy = 0$$

těchto trajektorií.“

---

*) Pro náš účel by bylo zbytečno, bychom tuto podmínku známým způsobem explicitně vyvinovali; má-li totiž jistý výraz $\Phi\ (x, y)$ býti pouhou funkcí $f_1\ (x, y)$, jest nutno a stačí, by *Jacobiho* determinant obou funkcí Φ a f_1 se rovnal identicky nulle. Podmínka tato by byla v našem případu patrně částečná differenciální rovnice třetího stupně, již by funkce $f_1\ (x, y)$ vyhověti měla.

Příklad. Mějme soustavu křivek *Cassiniho*, jichž ohniska jsou body $y = 0$, $x = \pm m$. Označíme-li tyto dva body A, B a libovolný bod křivky C, jest jak známo součin průvodičů

$$\overline{AC}\;\overline{AB} = \text{Const.}$$

a tudíž i

$$\overline{AC}^2\,\overline{AB}^2 = \text{Const.}$$

$$f_1(x, y) = (x^2 + y^2 + m^2)^2 - 4m^2x^2 = c_1,$$

kdež c_1 právě čtverec onoho stálého součinu značí. Křivky tyto tvoří soustavu čar isothermických, neboť jest

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2 - m^2)\ ;\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 4(3x^2 + y^2 - m^2)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2 + m^2)\ ;\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 4(x^2 + 3y^2 + m^2)$$

a tedy

$$-\frac{\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2} = -\frac{x^2 + y^2}{x^2(x^2 + y^2 - m^2)^2 + y^2(x^2 + y^2 + m^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + m^2) - 4m^2x^2} = -\frac{1}{f_1(x, y)} = F(f_1).$$

Differenciální rovnice orthogonálních trajektorií křivek *Cassini-ho* zní

$$y(x^2 + y^2 + m^2)\,dx - x(x^2 + y^2 - m^2)\,dy = 0.$$

Výraz

$$e^{\int F.\,df_1 + \text{Const.}} = e^{-\int \frac{df_1}{f_1} + \text{Const}}$$

aneb $\frac{1}{f_1}$ jest integračním faktorem této rovnice t. j. hodnota

$$\frac{y(x^2 + y^2 + m^2)}{(x^2 + y^2 + m)^2 - 4m^2x^2}\,dx - \frac{x(x^2 + y^2 - m^2)}{(x^2 + y^2 + m^2)^2 - 4m^2x^2}\,dy$$

jest úplným differenciálem. Pouhými kvadraturami plyne nyní rovnice hledaných trajektorií. Dle tvaru úplného differenciálu jest patrno, že tyto kvadratury — ač obtížné — přece vždy se provésti mohou. Konečný výsledek zní pak

$$\frac{xy}{x^2 - y^2 - m^2} = c_2,$$

kdež c_2 integrační stálou značí.

Rovnice tato repraesentuje patrně kuželosečky procházející body $y=0$, $x=\pm m$ t. j. ohnisky daných křivek; mimo to plynou směry asymptot z kvadratické rovnice

$$c_2(x^2-y^2)-xy=0$$

aneb

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{1}{c^2}\frac{x}{y}-1=0.$$

Tvoří-li asymptoty s osou Y úhly α a β, jest $\frac{x}{y}$ buď $= tg\,\alpha$ neb $= tg\,\beta$ a tím patrně plyne

$$tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta=-1$$

t. j. ony kuželosečky jsou stejnoramené hyperboly *)

6. Zakončím tyto úvahy řešením všeobecnějšího problému, jež se týká vztahu isogonálného dvou rovin.

Buďtež nám dány v rovině $x\,y$ dvě soustavy orthogonálných křivek

$$f_1(x,y)=c_1,\quad f_2(x,y)=c_2 \tag{1}$$

v rovině $\xi\,\eta$ pak jiné dvě soustavy též kolmých křivek

$$\varphi_1(\xi,\eta)=\gamma_1,\quad \varphi_2(\xi,\eta)=\gamma_2 \tag{2}$$

a vyšetřme podmínku, za kterou mohou křivky tyto isogonálně příslušeti křivkám oným.

Z podmínky orthogonality plynou ihned tyto dvě rovnice

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}=0\\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Souřadnice ξ, η mají býti takové funkce x, y, by γ_1 byla funkcí c_1 a hodnota γ_2 závisela pouze na c_2; mimo to ale se arci též vyžaduje isogonálnost t. j. podmínky

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Poslední dvě rovnice representují v našem případu vlastně jedinou, t. j. druhou rovnici lze opět pomocí rovnic (3) vyvoditi z první, což zde pro stručnost prováděti nebudeme.

---

*) Srovnej citované dílo Leçon XIIIième. *Von der Mühll* určil ve svém pojednání „Ueber die Abbildung von Ebenen auf Ebenen" Crelle t. 69 všecky soustavy kuželoseček, jež lze isogonálně zobraziti přímkami $\xi=$ Const. t. j. všecky isothermické soustavy čar druhého stupně.

Jest ale

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial\gamma_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial\gamma_2}\frac{\partial\gamma_2}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial\gamma_1}\frac{d\gamma}{dc_1}\frac{\partial c_1}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial\gamma_2}\frac{d\gamma_2}{dc_2}\frac{\partial c_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_2}\frac{\partial\gamma_2}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_1}\frac{d\gamma_1}{dc_1}\frac{\partial c_1}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_2}\frac{d\gamma_2}{dc_2}\frac{\partial c_2}{\partial y}$$

Z rovnic

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}d\eta=d\gamma_1$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}d\eta=d\gamma_2$$

plynou pak differenciály $d\xi$ a $d\eta$ co funkce differenciálů $d\gamma_1$ a $d\gamma_2$, jejichžto koefficienty jsou partiálnými derivacemi souřadnic ξ, η podle γ_1 γ_2.

Položivše

$$\Delta=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta},$$

obdržíme tímto spůsobem

$$\frac{\partial\xi}{\partial\gamma_1}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}:\Delta;\quad\frac{\partial\xi}{\partial\gamma_2}=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}:\Delta;$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_1}=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}:\Delta;\quad\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_2}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}:\Delta.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do výrazů pro $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ a $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ přemění se podmínečná rovnice

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

na tvar

$$\frac{d\gamma_1}{dc_1}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]=\frac{d\gamma_2}{dc_2}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right];$$

aneb, položíme-li

$$\frac{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\frac{\partial f_1}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\frac{\partial f_2}{\partial y}}=M:$$

$$\frac{d\gamma_2}{dc_2}=M\frac{d\gamma_1}{dc_1}.$$

Vyjadřme nyní M pomocí hodnot c_1 c_2 γ_1 γ_2 t. j. vymitme $x, y. \xi\,\eta$.

Bude pak

$$\frac{d\gamma_2}{dc_2} = M(c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2) \frac{d\gamma_1}{dc_1}.$$

Avšak γ_2 záviseti má pouze na c_2, tedy platí totéž o $\frac{d\gamma_2}{dc_2}$, musí býti tudíž součin $M\frac{d\gamma_1}{dc_1}$ pouhou funkcí c_2, *což jen tenkráte možno, je-li*

$$M(c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2) = \psi_1 (c_1 \gamma_1) \psi_2 (c_2 \gamma_2),$$

kdež ψ_1 ψ_2 libovolné funkce značí.

Napotom nutno položiti

$$\psi_1 (c_1 \gamma_1) \frac{d\gamma_1}{dc_1} = \alpha. \tag{4}$$

kdež je α libovolnou stálou, z čehož pak plyne

$$\frac{d\gamma_2}{dc_2} = \alpha \psi_2 (c_2 \gamma_2). \tag{5}$$

Z differenciálních rovnic (4), a (5) plynou integrováním γ_1 a γ_2 co funkce c_1 a resp. c_2, čímž úkol řešen.

O rovinných racionálních křivkách třetího stupně.

(Podává Dr. *Emil Weyr.*)

Mezi veškerými algebraickými křivkami nejjednodušeji lze pojednávati křivky *racionální.* Racionální křivkou nazýváme takovou křivku algebraickou, jejíž body lze jednoznačně (eindeutig) určovati pomocí jediného proměnného parametru způsobem algebraickým. Zavedeme-li tudíž souřadnice rovnoběžné, musí se tyto pro každý bod racionální křivky jeviti co algebraické funkce jisté jednoznačně proměné u, kterou pak *parametrem* nazýváme.

Tak na př. lze vyjádřiti souřadnice x, y bodu přímky, rovnicemi

$$x = a + \alpha u$$
$$y = b + \beta u$$