Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Čupr
Zobecnění jistého Hurwitzova problému

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 2, 81--86

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121779

Zobecnění jistého Hurwitzova problému.

Karel Čupr.

1. Rovnice

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1}$$

o koeficientech obecně komplexních mějž jednoduché kořeny, z nichž žádný nechť neleží na přímce $y = x \operatorname{tg} \psi$, t. j. žádný není tvaru $a . e^{i\psi}$ nebo $a . e^{i(\pi+\psi)}$, $a > 0$. Označme N^ψ počet kořenů ležících vlevo a P^ψ počet kořenů ležících vpravo od této přímky. Budiž c libovolná komplexní konstanta a položme

$$c e^{ni(\frac{1}{2}\pi-\psi)} f(x) = \varrho e^{i\pi\varphi}, \tag{2}$$

kdež $\varrho = |cf(x)|$; $\pi\varphi$ jest tedy argument komplexní veličiny stojící v (2) na levé straně. Tažme se, jak se argument ten změní, když x mění se po přímce $y = x \operatorname{tg} \psi$ z $x = \infty$ do $x = -\infty$. Za tím účelem uvažujme, jak se změní argument jednotlivých činitelův

$$e^{i(\frac{1}{2}\pi-\psi)} (x - x_k),$$

jež pro body na této přímce nabývají tvaru

$$e^{i(\frac{1}{2}\pi-\psi)} (re^{i\psi} - r_k e^{i\alpha_k}) = r_k \sin(\alpha_k - \psi) + i(r - r_k \cos(\alpha_k - \psi)).$$

Argument této komplexní veličiny jest

$$\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{r - r_k \cos(\alpha_k - \psi)}{r_k \sin(\alpha_k - \psi)} \right);$$

pro $r \to +\infty$ jest jeho hodnota $\frac{1}{2}\pi \operatorname{sgn} \sin(\alpha_k - \psi)$, pro $r \to -\infty$ jest jeho hodnota $-\frac{1}{2}\pi \operatorname{sgn} \sin(\alpha_k - \psi)$, takže celková změna tohoto argumentu jednotlivého činitele jest $\pi \operatorname{sgn} \sin(\alpha_k - \psi)$, jest tedy $+\pi$, když $0 < \alpha_k - \psi < \pi$, čili když

$$\psi < \alpha_k < \pi + \psi,$$

t. j. když kořen leží po levé straně přímky a obdobně jest celková změna argumentu jednotlivého činitele $-\pi$, když kořen leží po pravé straně přímky.

Úhrnná změna argumentu φ jest tedy dána rozdílem $N^{\psi}-P^{\psi}$; značme tento rozdíl D^{ψ}. S ohledem na rovnici $N^{\psi}+P^{\psi}=n$ máme

$$N^{\psi}=\frac{n+D^{\psi}}{2},$$

$$P^{\psi}=\frac{n-D^{\psi}}{2};$$

odtud patrno, že pro všechna ψ jest D^{ψ} téže parity jako n.

Pro jednoduchost transformujme levou stranu rovnice (2) tak, aby záporný směr přímky $y=x\operatorname{tg}\psi$ splynul s kladným směrem osy x; potom jest tedy uvažovati změnu argumentu funkce

$$ce^{\frac{1}{2}n\pi i}\,e^{-ni\psi}f\left(e^{(\pi+\psi)i}x\right),$$

kdež x jest reálná proměnná, ve smyslu stoupajícího x. Volme $c=$ $=e^{-\frac{1}{2}n\pi i}$ a oddělme část reálnou od imaginární; jest pak

$$e^{-n\pi i}e^{-\psi ni}f(e^{(\pi+\psi)i}x)=a_0x^n-a_1x^{n-1}e^{-i\psi}+a_2x^{n-2}e^{-2i\psi}-\ldots+$$
$$+(-1)^n a_n e^{-ni\psi}=f_1(x,\psi)+if_2(x,\psi),$$

$$f_1(x,\psi)=\tfrac{1}{2}\{(a_0+\bar{a}_0)x^n-(a_1e^{-i\psi}+\bar{a}_1e^{i\psi})x^{n-1}+$$
$$+(a_2e^{-2i\psi}+\bar{a}_2e^{2i\psi})+\ldots+(-1)^n(a_ne^{-ni\psi}+\bar{a}_ne^{ni\psi})\},$$

$$f_2(x,\psi)=\frac{1}{2i}.\{(a_0-\bar{a}_0)x^n-(a_1e^{-i\psi}-\bar{a}_1e^{i\psi})x^{n-1}+$$
$$+(a_2e^{-2i\psi}-\bar{a}_2e^{2i\psi})+\ldots+(-1)^n(a_nc^{-ni\psi}-\bar{a}_ne^{ni\psi})\},$$

kdež $\bar{a}_k$ jest komplexně sdruženo s a_k.

Jest tudíž

$$\varphi=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc}\operatorname{tg}R(x,\psi),$$

$$R(x,\psi)= \tag{3}$$
$$=-i\frac{(a_0-\bar{a}_0)x^n-(a_1e^{-i\psi}-\bar{a}_1e^{i\psi})x^{n-1}+\ldots+(-1)^n(a_ne^{-ni\psi}-\bar{a}_ne^{ni\psi})}{(a_0+\bar{a}_0)x^n-(a_1e^{-i\psi}+\bar{a}_1e^{i\psi})x^{n-1}+\ldots+(-1)^n(a_ne^{-ni\psi}+\bar{a}_ne^{ni\psi})}.$$

Odtud jest patrno, že Δ^{ψ} jest totožno s Cauchyho indexem racionální lomené funkce $R(x,\psi)$.

Hurwitz, jenž se zabýval případem $\psi=\frac{1}{2}\pi$, t. j. počtem kořenů v pravé a levé polorovině a to pro rovnice o reálných koeficientech (jiné řešení tohoto případu pochází od prof. K Petra, Časopis L, pag. 23 a 93) udal (Math. Annalen XLVI) obecnou metodu, jak převésti stanovení indexu racionální funkce

$$R(z)=\frac{B_0z^n+B_1z^{n-1}+\ldots+B_n}{A_0z^n+A_1z^{n-1}+\ldots+A_n}$$

na určení signatury Δ kvadratické formy — proměnných $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ —

$$F_n = \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,\Theta^2(z)dz,$$

kdež

$$\Theta(z) = y_0 + y_1 z + \ldots + y_{n-1} z^{n-1}$$

a integrál jest vzat po čáře obíhající všechny póly funkce $R(z)$ Za tím účelem rozvine $R(z)$ podle klesajících mocnin

$$R(z) = c + \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots$$

a sestrojí determinanty

$$D_m = \begin{vmatrix} c_0 & \ldots & c_{m-1} \\ \vdots & & \\ c_{m-1} & \ldots & c_{2m-2} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Jsou-li polynomy v čitateli a jmenovateli nesoudělny, jest $D_m \neq 0$ pro $m = 1, 2, \ldots, n$, kdežto $D_{n+1} = D_{n+2} = \ldots = 0$. Pak Δ jest dáno rozdílem počtu kladných a záporných čísel v řadě

$$D_1, \frac{D_2}{D_1}, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}}. \tag{5}$$

Determinanty (4) lze vyjádřiti pomocí koeficientů původní rac. funkce a to způsobem dvojím: buďto metodou Hurwitzovou (l. c. 281/282), při níž však dojdeme k determinantům stupně dvojnásobného a při níž jest D_n dáno resultantou polynomů v čitateli a jmenovateli podle eliminační metody Sylvestrovy, nebo metodou, kterou ve spec. případě (Rozpravy VI. č. 8 pag. 6) vyložil prof. Petr a kterou později (Rozpravy XV. č. 2 pag. 18) zobecnil: při této transformaci zůstává stupeň determinantu zachován, elementy jeho jsou však komplikovanější.

Podle první metody jest

$$D_m = \frac{1}{A_0^{2m}} \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_{2m-1} \\ B_0 & B_1 & \ldots & B_{2m-1} \\ 0 & A_0 & \ldots & A_{2m-2} \\ 0 & B_0 & \ldots & B_{2m-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_m \\ 0 & 0 & \ldots & B_m \end{vmatrix}$$

a v našem případě po úpravě

$$D_m^{\psi} = (a_0 + \bar{a}_0)^{-2m}\,\Delta,$$

kde Δ je definováno determinantem:

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_0 + a_0 & \bar{a}_1 e^{i\psi} + a_1 e^{-i\psi} & \dots & \bar{a}_{2m-1} e^{(2m-1)i\psi} + a_{2m-1} e^{-(2m-1)i\psi} \\ \frac{1}{i}(\bar{a}_0 - a_0) & \frac{1}{i}(\bar{a}_1 e^{i\psi} - a_1 e^{-i\psi}) & \dots & \frac{1}{i}(\bar{a}_{2m-1} e^{(2m-1)i\psi} - a_{2m-1} e^{-(2m-1)i\psi}) \\ 0 & \bar{a}_0 + a_0 & \dots & \bar{a}_{2m-2} e^{(2m-2)i\psi} + a_{2m-2} e^{-(2m-2)i\psi} \\ 0 & \frac{1}{i}(\bar{a}_0 - a_0) & \dots & \frac{1}{i}(\bar{a}_{2m-2} e^{(2m-2)i\psi} - a_{2m-2} e^{-(2m-2)i\psi}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_m e^{mi\psi} + a_m e^{-mi\psi} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{i}(\bar{a}_m e^{mi\psi} - a_m e^{-mi\psi}) \end{vmatrix} \qquad (6)$$

odkudž po malé úpravě

$$D_m^{\psi} = \frac{(-2i)^m}{(\bar{a}_0 + a_0)^{2m}} \begin{vmatrix} a_0, & a_1 e^{-i\psi}, & \dots & a_{2m-1} e^{-(2m-1)i\psi} \\ \bar{a}_0, & \bar{a}_1 e^{i\psi}, & \dots & \bar{a}_{2m-1} e^{(2m-1)i\psi} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{2m-2} e^{-(2m-2)i\psi} \\ 0 & \bar{a}_0 & \dots & \bar{a}_{2m-2} e^{(2m-2)i\psi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_m e^{-mi\psi} \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_m e^{mi\psi} \end{vmatrix}. \qquad (6^*)$$

Když $\psi = \frac{1}{2}\pi$, udává signatura řady

$$D_1^{\frac{1}{2}\pi}, \frac{D_2^{\frac{1}{2}\pi}}{D_1^{\frac{1}{2}\pi}}, \dots \frac{D_n^{\frac{1}{2}}}{D_{n-1}^{\frac{1}{2}\pi}}$$

rozdíl počtu kořenů v levé a pravé polorovině — kterýmžto problémem v případě reálných koeficientů se zabýval právě Hurwitz; když lim $\psi = 0$, udává signatura řady

$$D^0_1, \frac{D_2^0}{D_1^0}, \dots, \frac{D_n^0}{D^0_{n-1}}, \text{ kdež}$$

$$D_m^0 = \frac{(-2i)^m}{(a_0 + \bar{a}_0)^m} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{2m-1} \\ \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_{2m-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{2m-2} \\ 0 & \bar{a}_0 & \dots & \bar{a}_{2m-2} \\ \vdots & & & \\ 0 & & \dots & a_m \\ 0 & & \dots & \bar{a}_m \end{vmatrix},$$

počet kořenů v horní polorovině a reálných záporných, zmenšený o počet kořenů v dolní polorovině a reálných kladných.

2. Důležitým předpokladem dosavadních úvah bylo, že polynomy

$$f_1(x,\psi) \text{ a } f_2(x,\psi)$$

(reálná a imaginární část $e^{-n\pi i} \cdot e^{-n\psi i} f(e^{(\pi+\psi)i}x)$) jsou nesoudělné, takže kvadratická forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_2(z,\psi)}{f_1(z,\psi)}(y_0 + y_1 z + \ldots + y_{n-1} z^{n-1})^2 dz \tag{7}$$

jest hodnosti n. (Hurwitz l. c. pag. 282.)

Mají-li polynomy

$$f_1(x,\psi),\ f_2(x,\psi)$$

společnou míru, jest tato součinem buď jen reálných nebo jen komplexních anebo reálných a komplexních kořenových činitelů. Reálné kořeny této společné míry odpovídají — jak z úvahy nasnadě jsoucí vyplývá — svým počtem kořenům rovnice $f(x) = 0$ nalézajícím se na přímce $y = x \operatorname{tg} \psi$, kořeny komplexní této společné míry odpovídají svým počtem kořenům rovnice $f(x) = 0$ ležícím souměrně podle téže přímky.

Kvadratická forma (7) jest v tomto případě hodnosti $n - l_\psi$, kdež l_ψ jest stupeň společné míry polynomů

$$f_1(x_1\psi) \quad \text{a} \quad f_2(x_1\psi).$$

Speciálně pro $\psi = 0$ máme:

„Je-li l_0 stupeň společné míry polynomů

$$f_1(x,0) \equiv (a_0 + \bar{a}_0)x^n + (a_1 + \bar{a}_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n + \bar{a}_n)$$
$$f_2(x,0) \equiv (a_0 - \bar{a}_0)x^n + (a_1 - \bar{a}_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n - \bar{a}_n),$$

jest hodnost kvadratické formy (7) $n - l_0$; l_0 značí počet kořenů reálných + počet kořenů komplexně sdružených rovnice $f(x) = 0$. Jest tudíž počet kořenů reálných nejvýše roven l_0, počet kořenů komplexních nejméně roven $n - l_0$." — O některých důsledcích pro rovnice mající jen reálné koeficienty pojednáno bude ve zvláštní stati.

*

Généralisation d'un problème de Hurwitz.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur résout, par une méthode donnée par Hurwitz dans les Math. Ann. LXVI, un problème plus général: il détermine le nombre de racines d'une équation à coefficients complexes se trouvant du côté droit et du côté gauche de la droite $y = x \operatorname{tg} \varphi$, en supposant que cette droite ne contient aucune racine de cette équation. En particulier, l'auteur donne, pour $\varphi = 0$, le nombre de racines situées dans le demiplan supérieur, augmenté du nombre des racines réelles négatives.