Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Antonín Libický

Rovnice Lagrangeovy v teorii relativnosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 2, 142--152,153--154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121768

Rovnice Lagrangeovy v teorii relativnosti.

Ant. Libický.

V předmluvě ke své »Mechanice tuhých těles« prof. dr. Boh. Hostinský vyslovuje mínění, že »podrobné studium Lagrangeovy metody přispělo by podstatně k tomu, aby správně byly oceněny rozličné úvahy, které bývají připojovány k principu relativity«.

Vzhledem k tomuto pokynu budiž v následujícím učiněn pokus, zdali by se hlavní věty a rovnice teorie relativnosti nedaly odvoditi ze zákonů platné nauky klasické. Za tou příčinou nahradíme matematické výrazy pro některé fysikální veličiny, které v dosavadní teorii vyjádřeny jsou kvadratickými formami, redukovanými na součty dvojmocí, tvary obecnějšími, obsahujícími též podvojné součiny souřadnic. K našim vývodům stačí, zobecníme-li takto známý výraz pro kinetickou energii a zavedeme-li obecnější tensor energie.

Spolu použijeme rovnic Lagrangeových, jež k řešení mnohých problémů fysikálních jsou tak výhodné. Obecný tvar jejich (druhého druhu) jest, jak známo,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial q_i} = Q_i, \tag{1a}$$

kde značí q souřadnice Lagrangeovy, t dobu (obecněji jednu ze souřadnic q_μ) q'_i příslušnou derivaci, F kvadratickou funkci těchto souřadnic a jejích prvních derivací (nikoli vyšších) a Q_i všeobecnou Lagrangeovu složku daných sil, příslušnou k souřadnici q_i.[1]) Počet těchto rovnic jest roven počtu souřadnic q_i.

a) Za funkci F v rovnici (1*a*) položíme nejprve všeobecnější výraz pro kinetickou energii. V nauce klasické jest tato energie dána hodnotou $E = \frac{1}{2} \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$, aneb, jsou-li hmoty všech částic stejny, $E = \frac{1}{2}\, m \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$. Za kvadratickou funkci v tomto výrazu klademe obecnější funkci (definitní, kladnou):

$$E = \frac{m}{2} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\, q'_\alpha\, q'_\beta.^{*)} \tag{2}$$

[1]) Pro zevrubnější poučení viz »Mechaniku tuhých těles« od B. Hostinského, odd. XIV, str. 197—203.

*) Z technických příčin píšeme q' a q'' místo obvyklejšího $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}$ a $\ddot{q} = \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$.

O veličinách $g_{\alpha\beta}$, vyskytujících se v tomto vzorci, předpokládáme, že $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Rovnice Lagrangeovy (1*a*) nabývají pak tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i. \tag{1b}$$

Jest pak vypočítati hodnoty derivací $\frac{\partial E}{\partial q'_i}$ a $\frac{\partial E}{\partial q_i}$; pro první z nich obdržíme (položíme-li nejprve $i = 1$):

$$\frac{\partial E}{\partial q'_1} = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial q'_1}(g_{11} q'^2_1 + 2 g_{12} q'_1 q'_2 + 2 g_{13} q'_1 q'_3 + \ldots + + g_{22} q'^2_2 + 2 g_{23} q'_2 q'_3 + \ldots)$$

anebo

$$\frac{\partial E}{\partial q'_1} = m(g_{11} q'_1 + g_{12} q'_2 + g_{13} q'_3 + \ldots) = m \sum_\beta g_{1\beta} q'_\beta,$$

a obecně

$$\frac{\partial E}{\partial q'_i} = m \sum_\beta g_{i\beta} q'_\beta. \tag{3a}$$

Diferencujeme-li tuto rovnici podle t, dostaneme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q'_i} = m \sum_\beta \left(g_{i\beta} q''_\beta + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial t} q'_\beta\right),$$

kde $q''_\beta = \frac{\partial^2 q_\beta}{\partial t^2}$.

Podobně vypočítáme

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = \frac{m}{2} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} q'_\alpha q'_\beta + g_{\alpha\beta} \frac{\partial (q'_\alpha q'_\beta)}{\partial q_i}\right);$$

ježto

$$\frac{\partial q'_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_i}\right) = 0 \tag{m}$$

(protože $\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_i} =$ konst.[2])), zbývá

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = \frac{m}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} q'_\alpha q'_\beta. \tag{3b}$$

Substitucí hodnot (3*a*) a (3*b*) do rovnic Langrangeových (1*b*) vychází

$$m\left(\sum_\beta g_{i\beta} q''_\beta + \sum_\beta \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial t} q'_\beta - \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} q'_\alpha q'_\beta\right) = Q_i$$

[2]) *Eddington:* »The Mathematical Theory of Relativity«, něm. překlad, str. 68, vzorec (22, 3).

čili, zavedeme-li do druhého sčítance na levé straně za ∂t hodnotu $\frac{\partial q_\alpha}{q'_\alpha}$, plynoucí z rovnice $q'_\alpha = \frac{\partial q_\alpha}{\partial t}$,

$$m\left(\sum_\beta g_{i\beta} q''_\beta + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial q_\alpha} q'_\alpha q'_\beta - \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} q'_\alpha q'_\beta\right) = Q_i.\text{[3]} \quad (4)$$

Rovnici tu lze pokládati za jednu ze základních rovnic teorie relativnosti; z ní lze odvoditi jiné dvě rovnice téhož významu.

Vyměňme nejprve v prvním a ve druhém členu na levé straně sumační indexy α a β (ježto oběma dáváme tytéž hodnoty); i bude součet jejich roven

$$\sum_\alpha g_{i\alpha} q''_\alpha + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q_\beta} q'_\alpha q'_\beta$$

aneb, ježto

$$q''_\alpha = \frac{\partial q'_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial q'_\alpha}{\partial q_\beta} q'_\beta,$$

$$\sum_{\alpha\beta}\left(g_{i\alpha} \frac{\partial q'_\alpha}{\partial q_\beta} q'_\beta + \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q_\beta} q'_\alpha q'_\beta\right) = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial (g_{i\alpha} q'_\alpha)}{\partial q_\beta} q'_\beta.$$

Pročež rovnici (4) lze psáti též ve tvaru

$$m \sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial (g_{i\alpha} q'_\alpha)}{\partial q_\beta} q'_\beta - \tfrac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} q'_\alpha q'_\beta\right) = Q_i. \quad (5)$$

Po druhé spojíme druhý a třetí člen na levé straně rovnice (4); pro rozdíl jejich obdržíme

$$m \sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial q_\alpha} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i}\right) q'_\alpha q'_\beta = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i}\right) q'_\alpha q'_\beta$$

aneb, vyměníme-li v prvním sčítanci indexy α a β (při čemž $q'_\alpha q'_\beta$ se nezmění), rovno

$$\frac{m}{2} \sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q_\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i}\right) q'_\alpha q'_\beta.$$

Trojčlen $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q_\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i}\right)$ jest Christoffelův trojindexový symbol prvního druhu, který se označuje $\begin{bmatrix}\alpha\,\beta\\ i\end{bmatrix}$; bude tedy nový tvar rovnice (4)

$$m\left(\sum_\beta g_{i\beta} q''_\beta + \sum_{\alpha\beta} \begin{bmatrix}\alpha\,\beta\\ i\end{bmatrix} q'_\alpha q'_\beta\right) = Q_i.$$

---

[3]) Viz *Laue*, »Die Relativitätstheorie«, II. sv., str. 67 (s jiným odůvodněním).

Rovnici tu přetvoříme ještě takto: Násobíme obě strany její veličinami $g^{\sigma i} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\sigma i}}$ (kde g značí determinant $|g^{\sigma i}|$ a $\frac{\partial g}{\partial g_{\sigma i}}$ subdeterminant příslušný k prvku $g_{\sigma i}$ tohoto determinantu), načež zavedeme Christoffelův trojindexový symbol druhého druhu $\left\{ \begin{matrix} \alpha\,\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} = \sum_i g^{\sigma i} \left[\begin{matrix} \alpha\,\beta \\ i \end{matrix} \right]$; tím nabudeme (zaměníme-li v prvním členu za β index σ):

$$m\left(\sum_\sigma g_{i\sigma} g^{i\sigma} q''_\sigma + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} q'_\alpha q'_\beta\right) = \sum_i Q_i q^{\sigma i}.$$

Podle známé věty o determinantech jest však $\sum_\sigma g_{i\sigma} g^{i\sigma}$ rovno 1, tudíž

$$m\left(q''_\sigma + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} q'_\alpha q'_\beta\right) = \sum_i Q_i q^{\sigma i}$$

aneb vzhledem k známému vzorci tensorového počtu $\sum_i Q_i q^{\sigma i} = Q'^\sigma$,

$$m\left(q''_\sigma + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} q'_\alpha q'_\beta\right) = Q'^\sigma.\text{[4]} \tag{6}$$

V dynamice klasické jest každé $\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\}$ rovno nule; pročež rovnice (6) přechází ve známý vztah $P = ma$, značí-li a urychlení. V teorii relativnosti jsou podle (6) složky tohoto urychlení (kontravariantního) dány vzorcem

$$a^\sigma = q''_\sigma + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} q'_\alpha q'_\beta. \tag{7a}$$

Tedy k urychlení starší mechaniky q''_σ přistupuje ještě člen $\sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} q'_\alpha q'_\beta$, závislý na složkách rychlosti, o jehož významu se nelze tuto šířiti.[5])

b) S rovnicí (2) souvisí základní rovnice pro diferenciál ds teorie relativnosti. V klasické nauce jest kinetická energie stanovena vzorcem

$$E = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right) \tag{n}$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{ds}{dt}\right)^2;$$

---

[4]) Viz *Laue*, l. c., str. 68, vzor. 55. Obě rovnice (5) a (6) nalézají se (v poněkud jiné formě) ve spise »La Gravifique einsteinienne« od *Th. de Dondera* na str. 48, vz. 169, a na str. 49, vz. 170. Veličina Q^σ nazývá se tam »la force extérieure appliquée« a Q'^σ »la force totale généralisée«. Viz též *Marcolongo*, »Meccanica razionale«, něm. zpracování, II. díl, str. 102.

[5]) Vedle kontravariantního urychlení známe ještě urychlení kovariantní $a_\sigma = q''_\sigma - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\sigma} q'_\alpha q'_\beta$, jež souvisí s rovnicí (5).

tudíž v nové teorii obdržíme, srovnáme-li s (2),

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\, q'_\alpha\, q'_\beta, \tag{8a}$$

z čehož

$$ds^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta, \tag{8b}$$

což jest známý vzorec pro prvek lineární.

c) Někdy jest výhodno, zaměniti v odvozených rovnicích dobu t novou proměnnou s, značící délku oblouku světové čáry.

Pro tuto přeměnu použijeme rovnice (8*a*), z níž plyne

$$q'_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{dq_\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = s'\frac{dq_\alpha}{ds}, \text{ jestliže } s' = \frac{ds}{dt},$$

jakož i

$$q''_\alpha = \frac{d^2q_\alpha}{dt^2} = \frac{d^2q_\alpha}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = s'^2\frac{d^2q_\alpha}{ds}.\text{[6]}$$

Omezíme se na přeměnu rovnice (7*a*) pro urychlení. Z ní na základě těchto transformačních rovnic obdržíme

$$\frac{1}{s'^2}a^\sigma = \frac{d^2q_\sigma}{ds^2} + \sum_{\alpha\beta}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{matrix}\right\}\frac{dq_\alpha}{ds}\frac{dq_\beta}{ds}. \tag{7b}$$

Je-li toto urychlení rovno nule, bude

$$\frac{d^2q_\sigma}{ds^2} + \sum_{\alpha\beta}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{matrix}\right\}\frac{dq_\alpha}{ds}\frac{dq_\beta}{ds} = 0, \tag{9}$$

což jest rovnice čáry geodetické v Lagrangeových souřadnicích. Obyčejně se vyvozuje z podmínky, že $\int ds$[7]) má hodnotu extremální; aby tomu bylo vyhověno, musí býti splněny rovnice Lagrangeovy.

d) Důležitým tensorem v teorii relativnosti jest tensor energie. V mechanice klasické můžeme pokládati za složky jeho (pro jednu částici, jejíž spec. hmota jest *m*) podle rovnice (*n*) výrazy $\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$; v teorii relativnosti zobecníme je tak,

---

[6]) Příslušné rovnice (5) a (6) (s proměnnou s) obdržíme také z rovnic Lagrangeových (1*a*), vložíme-li v nich za F funkci s' a za q_μ dobu t, tedy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial s'}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial s'}{\partial q_i} = 0.$$

Viz *Donder* »La Gravifique einsteinienne«, § 34.

[7]) *A. Libický* »Pohyb hmotného bodu dle všeobecné theorie relativnosti«. Časopis mat. a fys., ročn. XLIX, str. 134.

že klademe za ně hodnoty (ve tvaru kontravariantním)

$$T^{\alpha\beta} = m \frac{dq_\alpha}{dt} \frac{dq_\beta}{dt} \text{[8]} \tag{10a}$$

a ve tvaru smíšeném

$$T^\beta_\alpha = m \sum_\iota g_{\alpha\iota} \frac{dq_\alpha}{dt} \frac{dq_\beta}{dt}. \tag{10b}$$

Podle těchto hodnot upravíme rovnici (5); ježto

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial (g_{i\alpha} q'_\alpha q'_\beta)}{\partial q_\beta} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial (g_{i\alpha} q'_\alpha)}{\partial q_\beta} q_\beta$$

(neboť druhý člen $g_{i\alpha} q'_\alpha \frac{\partial q'_\beta}{\partial q_\beta}$ se podle (m) rovná nule), můžeme rovnici (5) psáti, vložíme-li tuto hodnotu za první člen její, ve tvaru

$$m \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial (g_{i\alpha} q'_\alpha q'_\beta)}{\partial q_\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} q'_\alpha q'_\beta \right) = Q_i$$

aneb, zavedouce hodnoty (10a) a (10b),

$$\sum_\beta \frac{\partial T^\beta_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} T^{\alpha\beta} = Q_i. \tag{11a}$$

Za tensory $T^{\alpha\beta}$ a T^β_α lze zavésti tensory hustoty $\mathbf{T}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}$ a $\mathbf{T}^\beta_\alpha = \sqrt{-g}\, T^\beta_\alpha$, značí-li g výše uvedený determinant $|g_{\alpha\beta}|$. Násobíme-li a dělíme-li levou stranu rovnice (11a) tímto $\sqrt{-g}$, vychází

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sum_\beta \frac{\partial \mathbf{T}^\beta_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} \mathbf{T}^{\alpha\beta} \right) = Q_i. \tag{11b}$$

Není-li žádných sil vnějších, bude

$$\sum_\beta \frac{\partial \mathbf{T}^\beta_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} \mathbf{T}^{\alpha\beta} = 0 \tag{11c}$$

aneb

$$\sum_\beta \frac{\partial T^\beta_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_i} T^{\alpha\beta} = 0. \tag{11d}$$

---

[8]) Pro tensor energie jest obvyklý výraz $T^{\alpha\beta} = m_0 \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}$, v němž m_0 značí spec. hmotu pro pozorovatele, pohybujícího se s částicí hmotnou; je-li m hmota pro pozorovatele nalézajícího se v klidu, souvisí tato hmota s m_0 rovnicí $m_0 = m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ (viz *Eddington* »The Mathematical Theory of Relativity«, něm. překlad, str. 168, vz. 53, 2). Podržíme-li tuto souvislost, bude

$$T^{\alpha\beta} = m \frac{dx_\alpha}{dt} \frac{dx_\beta}{dt}.$$

Způsobem obdobným tomu, kterým jsme obdrželi z rovnice (5) rovnici (6), nalezneme z (11*b*)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sum_{\beta}\frac{\partial \mathbf{T}_{\alpha}^{\beta}}{\partial q_{\beta}}-\sum_{\beta\gamma}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{Bmatrix}\mathbf{T}_{\alpha}^{\beta}\right)=Q_{i}. \qquad (11e)$$

e) Další vyšetřování týká se teorie gravitační; pro ně užijeme též rovnic Lagrangeových (1*a*), v nichž položíme za F Hamiltonovu funkci $\mathbf{H}=H\sqrt{-g}$. Spolu pokládejme veličiny $\mathbf{g}^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}$. za jakési souřadnice; pak mají $\mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}=\frac{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}{\partial q_{\mu}}$ význam rychlosti. Budou tudíž rovnice Lagrangeovy míti tvar:

$$\frac{d}{dq_{\mu}}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}\right)-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}=Q_{i}. \qquad (1c)$$

Z Einsteinovy teorie podržíme tensor $R_{\alpha\beta}$, zvaný tensorem křivosti,[9]) jehož hodnota jest

$$R_{\alpha\beta}=\sum_{\mu}\left(-\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix}}{\partial q_{\mu}}+\frac{\partial\begin{Bmatrix}\beta\mu\\ \mu\end{Bmatrix}}{\partial q_{\alpha}}\right)-\sum_{\mu\nu}\left(\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha\nu\\ \mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\mu\\ \nu\end{Bmatrix}\right). \qquad (12a)$$

Ve druhém členu převeďme diferenciaci podle q_{α} na diferenciaci podle q_{μ} $\left(\text{vzhledem ke vzorci } \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}}=\delta_{\alpha}^{\mu}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}\right)\left(\text{kde } \delta_{\alpha}^{\mu}=\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix},\right.$ jestliže $\left.\begin{matrix}\mu=\alpha\\ \mu\gtrless\alpha\end{matrix}\right)$; pak bude

$$R_{\alpha\beta}=\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}\left(-\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix}+\delta_{\alpha}^{\mu}\begin{Bmatrix}\beta\mu\\ \mu\end{Bmatrix}\right)-\sum_{\mu\nu}\left(\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha\nu\\ \mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\mu\\ \nu\end{Bmatrix}\right). \qquad (12b)$$

Použijeme nyní věty, jejíž správnost vysvítá z důsledků, jež z ní plynou, totiž: levá strana rovnice (1*c*) rovná se tensoru $R_{\alpha\beta}$; jest tudíž platna rovnice

$$\sum_{\mu}\left(\frac{d}{dq_{\mu}}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}\right)-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}=R_{\alpha\beta}.\,^{10)} \qquad (13a)$$

Větu tu můžeme míti za základní rovnici teorie gravitační.

---

[9]) Tensor ten vzniká, jak známo, kontrakcí z obecnějšího tensoru $R_{\alpha\beta\nu}^{\gamma}$; k jinému významu jeho zatím nepřihlížíme.

[10]) Přímý důkaz této rovnice (na základě jiných předpokladů) jest v *Eddingtonově* výše uvedeném spise, na str. 192, vz. (58, 6), nebo v *Laue:* »Die Relativitätstheorie«, II. díl, str. 170, vz. (148).

Vložíme-li za $R_{\alpha\beta}$ hodnotu (12b), obdržíme (s malou přeměnou)

$$\sum_{\mu}\left[\frac{d}{dq_{\mu}}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}_{\mu}}-\frac{d}{dq_{\mu}}\left(-\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \mu\end{matrix}\right\}+\delta^{\mu}_{\alpha}\left\{\begin{matrix}\beta\mu\\ \mu\end{matrix}\right\}\right)\right]=$$
$$=\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}-\sum_{\mu\nu}\left(\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \nu\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\alpha\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\beta\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\right).$$

Jestliže volíme pro každou stranu této rovnice hodnotu rovnou nule, dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}_{\mu}}=\left(-\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \mu\end{matrix}\right\}+\delta^{\mu}_{\alpha}\sum_{\mu}\left\{\begin{matrix}\beta\mu\\ \mu\end{matrix}\right\}\right) \qquad (13b)$$

a

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}=\sum_{\mu\nu}\left(\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \nu\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\alpha\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\beta\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\right). \qquad (13c)$$

Vypočítáme-li hodnoty výrazů $\sum_{\alpha\beta\mu}\mathbf{g}^{\alpha\beta}_{\mu}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}_{\mu}}$ a $\sum_{\alpha\beta}\mathbf{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}$, z nichž první se rovná $2\mathbf{H}$ a druhý $-\mathbf{H}$,[11]) zjednáme si vzorec

$$\mathbf{H}=\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\mathbf{g}^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\left(\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \nu\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\alpha\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\beta\mu\\ \mu\end{matrix}\right\}\right). \qquad (14a)$$

Rovná-li se $\sqrt{-g}$ jednotce, bude $\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial q_{\nu}}=0$, a

$$\mathbf{H}=\sum_{\alpha\beta\mu\nu}g^{\alpha\beta}\left\{\begin{matrix}\alpha\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\beta\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}.^{12)} \qquad (14b)$$

f) V teorii gravitačního pole má zvláštní význam jiná veličina $\mathbf{t}^{\nu}_{\mu}$, zvaná pseudotensorem energie gravitační. Hodnotu jeho lze odvoditi z rovnice Hamiltonovy $-h=L-\sum_{r}g'_{r}\frac{\partial L}{\partial g'_{r}}$[13]), kde h značí součet kinetické a potenciální energie a L příslušný potenciál. Jde-li jen o energii potenciální, lze klásti za $-h$ výraz $2\varkappa\,\mathbf{t}^{\nu}_{\mu}$ ($\varkappa$ jest velmi malá konstanta); mimo to zavedeme $q'=\mathbf{g}^{\alpha\beta}_{\nu}$ a $L=\mathbf{H}$. Tím nabýváme vzorce

$$2\varkappa\,\mathbf{t}^{\nu}_{\mu}=\delta^{\nu}_{\mu}\,\mathbf{H}-\sum_{\alpha\beta}\left(\mathbf{g}^{\alpha\beta}_{\nu}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}_{\mu}}\right)^{14)} \qquad (15a)$$

---

[11]) Podrobný výpočet nalézá se u *Eddingtona*, l. c., str. 193, vz. (58, 71) a (58, 72).

[12]) *Einstein*, »Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie«, str. 35, vz. (29a) a str. 44, druhý vz. (47a).

[13]) *Hostinský*, »Mechanika tuhých těles«, str. 203, odst. 124, *c*).

[14]) V jmenovateli derivace ve druhém členu na pravé straně jest $\mathbf{g}^{\alpha\beta}_{\mu}$ místo $\mathbf{g}^{\alpha\beta}_{\nu}$; okolnost tato vyjádřena jest tensorem δ^{μ}_{ν}, připojeným na pravé straně ku **H.** Toto připojení jest odůvodněno též jiným vyvozením rovnice (15a), které podává *Einstein* (»Die Grundlage der allg. Reltativitätstheorie«, str. 45, vz. 49) a po něm *Laue, Eddington* a j.

g) Diferenciací rovnice (15*a*) obdržíme

$$2\varkappa\sum_{\mu}\frac{\partial \mathbf{t}_{\mu}^{\nu}}{\partial q_{\mu}}=\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_{\nu}}-\sum_{\alpha\beta\mu}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}\left(\mathbf{g}_{\nu}^{\alpha\beta}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}\right), \tag{15b}$$

kde v prvním členu na pravé straně jest derivace podle q_{ν} místo podle q_{μ} za příčinou činitele δ_{μ}^{ν}.

Ježto **H** jest funkcí veličin $\mathbf{g}^{\alpha\beta}$ a $\mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}$, můžeme psáti

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_{\nu}}=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}{\partial q_{\nu}}+\sum_{\alpha\beta\mu}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}{\partial q_{\nu}}.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do rovnice (15*b*) a diferencujeme-li součin v druhém členu na pravé straně, vychází

$$2\varkappa\sum_{\mu}\frac{\partial \mathbf{t}_{\mu}^{\nu}}{\partial q_{\mu}}=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}{\partial q_{\nu}}+$$

$$\sum_{\alpha\beta\mu}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}{\partial q_{\nu}}-\frac{\partial \mathbf{g}_{\nu}^{\alpha\beta}}{\partial q_{\mu}}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}-\mathbf{g}_{\nu}^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}\right);$$

druhý a třetí sčítanec na pravé straně se ruší, ježto

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{\nu}^{\alpha\beta}}{\partial q_{\mu}}=\frac{\partial^{2} \mathbf{g}^{\alpha\beta}}{\partial q_{\nu}\,\partial q_{\mu}}=\frac{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}{\partial q_{\nu}}$$

a zbývá

$$2\varkappa\sum_{\mu}\frac{\partial \mathbf{t}_{\mu}^{\nu}}{\partial q_{\mu}}=\sum_{\alpha\beta}\mathbf{g}_{\nu}^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}-\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}\right).$$

Dosadíme-li za $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}$ a $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{g}_{\mu}^{\alpha\beta}}$ hodnoty z (13*b*) a (13*c*), obdržíme

$$2\varkappa\sum_{\mu}\frac{\partial \mathbf{t}_{\mu}^{\nu}}{\partial q_{\mu}}=\sum_{\alpha\beta}\mathbf{g}_{\nu}^{\alpha\beta}\left[\sum_{\mu\nu}\left(\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha\nu\\ \mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\mu\\ \nu\end{Bmatrix}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}\left(-\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix}+\delta_{\alpha}^{\mu}\begin{Bmatrix}\beta\mu\\ \mu\end{Bmatrix}\right)\right].$$

Výraz v závorce na pravé straně jest podle (12*b*) roven $-R_{\alpha\beta}$, pročež

$$2\varkappa\sum_{\mu}\frac{\partial \mathbf{t}_{\mu}^{\nu}}{\partial q_{\mu}}=-\sum_{\alpha\beta}\mathbf{g}_{\nu}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta},$$

aneb vyměníce na levé straně za μ a ν indexy α a β

$$2\varkappa\sum_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{t}_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}}=-\sum_{\alpha\beta}\mathbf{g}_{\nu}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}.$$

Jest známo, že podle principu o zachování energie platí $\sum_\alpha \frac{\partial (\mathbf{T}_\alpha^\beta + \mathbf{t}_\alpha^\beta)}{\partial q_\alpha} = 0$, kde součet $\mathbf{T}_\alpha^\beta + \mathbf{t}_\alpha^\beta$ představuje úplnou energii hmoty a gravitace; tudíž

$$\sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha^\beta}{\partial q_\alpha} = -\sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{T}_\alpha^\beta}{\partial q_\alpha}.$$

Substitucí do poslední rovnice nabudeme

$$2\varkappa \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{T}_\alpha^\beta}{\partial q_\alpha} = \sum_{\alpha\beta} \mathbf{g}_\nu^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

Použijeme nyní rovnice (11*c*); z ní plyne (s malou změnou indexů)

$$\sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{T}_\alpha^\beta}{\partial q_\alpha} = {}^1/_2 \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\nu} \mathbf{T}^{\alpha\beta},$$

pročež

$$\varkappa \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\nu} \mathbf{T}^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} \mathbf{g}_\nu^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

aneb, ježto

$$\mathbf{T}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}\sqrt{-g} \quad \text{a} \quad \mathbf{g}_\nu^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{g}^{\alpha\beta}}{\partial q_\nu} = \frac{\partial (g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})}{\partial q_\nu},$$

$$\varkappa \sqrt{-g} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\nu} T^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial (g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})}{\partial q_\nu} R^{\alpha\beta}. \qquad (\theta)$$

Vypočítáme hodnotu výrazu na pravé straně této rovnice; nejprve bude

$$\frac{\partial (g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})}{\partial q_\nu} = \sqrt{-g}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial q_\nu} + g^{\alpha\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial q_\nu}$$

čili, podle známého vzorce [15])

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial q_\nu} = {}^1/_2 \sqrt{-g} \sum_{\sigma\tau} g^{\sigma\tau} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial q_\nu},$$

po substituci

$$\frac{\partial (g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})}{\partial q_\nu} = \sqrt{-g}\left(\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial q_\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \sum_{\sigma\tau} g^{\sigma\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial q_\nu}\right).$$

Násobíme-li obě strany $R_{\alpha\beta}$, dostaneme

$$\sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \frac{\partial (g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})}{\partial q_\nu} = \sqrt{-g}\left(\sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial q_\nu} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\sigma\tau} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial q_\nu}\right).$$

15) *Einstein*, »Die Grundlage der allg. Relativitätstheorie«, str. 34, vz. 29.

V prvním členu na pravé straně jest

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial q_\nu} = -\sum_{\sigma\tau} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial q_\nu};\text{[16]}$$

ve druhém členu jest součet $\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$ roven skaláru (*Laueovu*) R.[17]) Těmito substitucemi vychází

$$\sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \frac{\partial (g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})}{\partial q_\nu} = \sqrt{-g}\left(-\sum_{\alpha\beta} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta} R_{\alpha\beta} + {}^1/_2 \sum_{\sigma\tau} R g^{\sigma\tau}\right)\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial q_\nu}.$$

Ježto $\sum_{\alpha\beta} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta} R_{\alpha\beta} = R^{\sigma\tau}$,[18]) bude

$$\sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \frac{\partial (g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})}{\partial q_\nu} = -\sqrt{-g}\sum_{\sigma\tau}(R^{\sigma\tau} - {}^1/_2 R g^{\sigma\tau}) \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial q_\nu} =$$

$$= -\sqrt{-g}\sum_{\alpha\beta}(R^{\alpha\beta} - {}^1/_2 R g^{\alpha\beta}) \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\nu},$$

píšeme-li na pravé straně místo σ a τ písmena α a β.[19]) Rovnice (o) nabývá pak tvaru

$$\varkappa\sqrt{-g}\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\nu} T^{\alpha\beta} = -\sqrt{-g}\sum_{\alpha\beta}(R^{\alpha\beta} - {}^1/_2 R g^{\alpha\beta}) \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\nu};$$

dělíme-li obě strany $\sqrt{-g}$ a uvážíme-li, že tato rovnice platí pro každé $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\nu}$, shledáme, že z ní plyne

$$\varkappa\, T^{\alpha\beta} = -(R^{\alpha\beta} - {}^1/_2 R g^{\alpha\beta})$$

aneb, nahradíme-li v celé rovnici β písmenem γ,

$$\varkappa\, T^{\alpha\gamma} = -(R^{\alpha\gamma} - {}^1/_2 R g^{\alpha\gamma}).$$

Násobíme-li obě strany $g_{\gamma\beta}$ a sečteme-li podle α, obdržíme vzhledem ke vzorcům

$$\sum_\alpha g_{\beta\gamma} T^{\alpha\gamma} = T^\beta_\alpha,\quad \sum_\alpha g_{\beta\gamma} R^{\alpha\gamma} = R^\beta_\alpha \quad\text{a}\quad \sum_\gamma g_{\beta\gamma} g^{\alpha\gamma} = \delta^\beta_\alpha,\text{[20]}$$

vztah

$$\varkappa\, T^\beta_\alpha = -(P^\beta_\alpha - {}^1/_2\, \delta^\beta_\alpha R), \tag{16}$$

což jest známá Einsteinova rovnice gravitačního pole; jiných tvarů ve kterých se též vyskytuje, není třeba tuto uváděti.

---

[16]) *Einstein*, l. c., str. 35, druhý vz. 31.
[17]) *Laue* »Die Relativitätstheorie«, II. díl, str. 98, vz. 81.
[18]) *Einstein*, l. c., str. 28.
[19]) Podle *Eddingtona* (»The Mathematical Theory of Relativity«, něm. překlad, str. 68), lze každé písmeno, jež se vyskytuje jako index dvakrát v jednom výraze, nahraditi jiným písmenem, není-li ho již v něm použito.
[20]) Viz na př. *Becquerel* »Le principe de Relativité«, str. 194, vz. (41, 44) a str. 157, vz. (14, 13).

h) Konečně budiž podotknuto, že v nauce o elektromagnetismu rovnice Lagrangeovy (1*b*) znějí

$$h\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)=Q_i^*,\tag{17}$$

kde funkce $L=\Sigma\,\Phi_\beta q'_\beta$, značí-li Φ_β zobecněný potenciál elektromagnetický, h hustotu elektrickou a Q_i^* generalisovanou sílu elektromagnetickou. Z rovnice té lze odvoditi hlavní rovnice elektromagnetismu.[21])

Souhrn. V předcházejícím vyvozeny byly zobecněním teorie klasické některé důležité věty a rovnice relativnosti, jakou jsou: Základní rovnice (4), (5) a (6), výraz pro urychlení (7), vzorec pro ds^2 (8*b*), rovnice čáry geodetické (9), teorem otensoru energie $\mathbf{T}_\alpha^\beta$ (11*e*), hodnota funkce Hamiltonovy (14) a základní rovnice pole gravitačního (16).

K vývodům o těchto problémech použito bylo rovnic Lagrangeových, což stačilo ve většině případů k dovození jich; jen k vyvození teorie pole gravitačního bylo třeba zavésti kontrahovaný tensor Riemannův $R_{\alpha\beta}$ a rovnici (13*a*). Není tím ovšem vyčerpána celá teorie relativnosti; mohla by na př. býti pronesena pochybnost o tom, zdali by se měly podržeti představy prostoru a času, jak jim učí teorie relativnosti, či měly by se ponechati dosavadní představy o těchto pojmech, pro malé prostory beztoho postačující. Ale hypotesa o tom, že velikosti hmot těles jsou závislé na rychlostech jejích, která jest experimentálně dotvrzena, musela by zůstati v platnosti.[22]) Nebylo úkolem tohoto článku, řešiti tyto otázky. Bylo-li v něm ukázáno, že teorii relativnosti lze do jisté míry pokládati za generalisovanou teorii klasickou, bylo vyhověno požadavku, přispěti k tomu, aby nabyla širšího významu a správnějšího ocenění.

*

Les équations de Lagrange dans la théorie de la Rélativité.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur poursuit le but de faire voir que la théorie de la rélativité a des rapports avec la théorie classique généralisée. Pour atteindre ce but il démontre qu'on peut résoudre les principaux pro-

[21]) Zevrubněji o tom pojednává *Donder* v kap. V (str. 58—77) spisu »La Gravifique einsteinienne«.

[22]) Viz v. *Gleich* »Zur Fragen der relativischen Keplerbewegung«, Zeitschrift f. Physik, 35. svazek, str. 7.

blèmes de la rélativité au moyen des équations de Lagrange de l'ancienne théorie par une généralisation de la fonction quadratique exprimant l'énérgie cinétique. On en peut déduire aussi la théorie de la gravitation, si l'on introduit le tenseur contracté de Riemann-Christoffel. Par-là, la théorie d'Einstein s'attache, en partie, à la théorie de Newton et acquiert, en même temps, une valeur plus ample et une appréciation plus juste.