Kubická involuce na prostorové kvintice rodu 2.

Napsal *Milan Mikan.*

Prostorová kvintika rodu 2 leží, jak známo, na kvadratické ploše **H** tak, že površky soustavy jedné jsou bisekantami, površky druhé soustavy trisekantami. Budiž dána kvintika k_2^5 a libovolná přímka p. V každé rovině (p) leží 10 bisekant kvintiky, každým bodem přímky p procházejí 4. Proto p je čtyřnásobnou přímkou na ploše bisekant, protínajících p. Tato plocha $\mathbf{P}^{14}$ je stupně čtrnáctého, k_2^5 její křivkou čtyřnásobnou.

Je-li p též bisekantou, odečtou se dva kužele čtvrtého stupně, tudíž zbývá plocha $\mathbf{P}^6$, šestého stupně. Poněvadž na této ploše je p trojnásobnou přímkou, k_2^5 dvojnásobnou kvintikou, je rod plochy $\mathbf{P}^6$

$$\tfrac{1}{2} . 5 . 4 - 5 - \tfrac{1}{2} . 3 . 2 = 2.$$

jako rod k_2^5. Řadu bodovou na k_2^5 lze jedno-jednoznačně sdružit s površkami plochy $\mathbf{P}^6$: V každé rovině (p) leží, kromě trojnásobné přímky p, 3 površky plochy $\mathbf{P}^6$. Ve svazku těchto rovin o ose p tvoří tyto površky ∞^1 trojúhelníků $\varDelta$, jejichž vrcholy leží na k_2^5. Tyto vrcholy tvoří na k_2^5 kubickou involuci první třídy I_3^1. S vrcholem trojúhelníka $\varDelta$ je jedno-jednoznačně sdružena protější strana, jakožto površka *involuční plochy* $\mathbf{P}^6$.

Koincidence involuce I_3^1 značí, že jedna strana trojúhelníka $\varDelta$ stává se tečnou k_2^5; k_2^5 je rangu 12, tudíž 12 tečen protíná p, z nichž vždy 2 a 2 soumezně ve dvou průsečících (p, k_2^5). Zbývá jich 8.

Involuce I_3^1 má 8 koincidencí.

Je-li bisekanta p zároveň površkou plochy **H**, čili hlavní bisekantou,[1]) připadají v $\varDelta$ všechny 3 vrcholy na jedinou přímku — trisekantu, plocha $\mathbf{P}^6$ degeneruje v kvadriku **H** (trojnásob čítanou), involuce I_3^1 je involucí na trisekantách a také tato involuce má 8 koincidencí.

V involuci I_3^1 není obsažena ani jedna družina kvadratické involuce I_2^1, vyťaté hlavními bisekantami b,[2]) poněvadž p nemůže **H** protíti, kromě na k_2^5, v dalším bodě a tudíž neztotožňuje se ze stran jednotlivých trojúhelníků $\varDelta$ ani jedna s některou b. Průsečíky

---

[1]) H. E. Timerding: »Ueber eine Raumcurve fünfter Ordnung.« Journ. f. Math. 123 (1901). 284.

$(k_2^5 p)$ buďtež ${}^1B$, ${}^2B$; bodu ${}^1B$ v I_3^1 přísluší další dva průsečíky k_2^5 s rovinou $\alpha \equiv (pt)$, je-li t tečna kvintiky v bodě ${}^1B$.

Z libovolného bodu M v prostoru promítá se k_2^5 kuželem pátého stupně. Tento kužel protíná průmětnu π v kvintice K_2^5, na ni promítá se I_3^1 též do kubické involuce, jež indukuje v libovolném svazku paprskovém (v rovině π) involuční příbuznost (10, 10). Příslušných 20 koincidencí značí 8 koincidencí involuce I_3^1 a 6 dvojnásob čítaných tečen příslušné direkční křivky D^6. Ony tečny jsou dvojnásobnými koincidencemi příbuznosti (10, 10), poněvadž v každé z těchto koincidencí splynuly vždy *dva* paprsky se svými odpovídajícími v příbuznosti (10, 10).[3]) Křivka šesté třídy D^6 je obrysem plochy P^6 při promítání z bodu M a má trojnásobnou tečnu v průseku π s rovinou (Mp). Další trojnou tečnu nemůže míti, poněvadž průsekem její promítající roviny s p by procházely 3 bisekanty kvintiky k_2^5 a tato kvintika by měla v oné rovině 6 bodů. Poněvadž rod křivky D^6 je 2, má tato 5 dvojných tečen.

Torsus R_2^5 dvojných tečných rovin plochy P^6 jest páté třídy, rodu 2.

Neboť v trojúhelnících $\varDelta$ je vždy vrcholu A, A', A'' přidružena protější strana resp. a, a', a''; každým bodem M přímky p procházejí — kromě p — 3 další bisekanty k_2^5, a_1, a_1', a_1'', z nichž vždy dvěma procházejí roviny α_1, α_1', α_1'', z nichž na př. α_1 je protější k a_1 v takto vzniklém trojhranu T.

Každé rovině α_1 torsu R^5_2 přísluší tímto způsobem jediná protější přímka a_1 plochy P^6 a naopak, čímž dokázán rod 2 torsu R_2^5. Zároveň je zřejmo, že površky plochy P^6 jsou biplanárami torsu R_2^5 a také p je biplanárou, jíž procházející příslušné roviny tečné torsu R_2^5 jsou určeny tečnami k_2^5;[4]) plocha P^6 je sama k sobě duální. Budiž $a \equiv a_1$; $\varDelta$ je duální k T, pro $a \equiv a_1$ jsou a'_1, a''_1 duální resp. k a', a'', A, A', A'' duální k α_1, α'_1, α''.

Trojice rovin α_1, α'_1, α''_1 tvořící kubickou involuci $({}^1I_3^1)$ na R_2^5, duální k I_3^1 a má tudíž také tato involuce $({}^1I_3^1)$ 8 koincidencí. Roviny $(a_1 p)$, $(a'_1 p)$, $(a''_1 p)$ protínají k^5_2 každá po ještě jednom (pátém) bodě, protějším to bodě k přímkám a_1, a'_1, a''_1; označme ty body resp. A_1, A'_1, A''_1. Také tyto trojice bodové jsou družinami kubické involuce ${}^1I_3^1$, ovšem rozdílné od I_3^1. Koincidence rovinové involuce $({}^1I_3^1)$ stanoví koincidence bodové involuce ${}^1I_3^1$; je jich tudíž také 8.

Z toho, že tato involuce má 8 koincidencí, vyplývá naopak,[5]) že její involuční plocha Q^6 je 6-tého stupně. V rovině β_1 nechť leží

[2]) Timerding »Ueber eine Raumkurve atd.«. — R. Sturm: Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie III. str. 272. — B. Bydžovský: »Užití principu promítání v teorii geom. příbuzností«, Časopis pro pěstování math. a fys. (1922) roč. LII., čís. 1., str. 17. — Caporali, Rom. Acc. Lincei Mem. (3) 2, 749 (1878), Memorie di Geom., Napoli 1888, p. 54.

[3]) R. Sturm: Die Lehre von den geom. Verwandtschaften, I., str. 278.

[4]) V bodech $(k_2^5 . p)$.

[5]) Promítnutím k_2^5 a involuce ${}^1I_3^1$ z libovolného bodu M na rovinu.

trojice A_1, A'_1, A''_1 kubické involuce ${}^1I_3^1$ na k_2^5; β_1 protíná k_2^5 ještě v bodech ${}^1B_1{}^2B_1$ a spojnice $\overline{{}^1B_1{}^2B_1}$ leží, jak patrno, též na Q^6. β_2 buďiž rovina další trojice A_2, A'_2, A''_2 oné involuce a v ní další body ${}^1B_2$, ${}^2B_2$ kvintiky k_2^5, jichž spojnice $\overline{{}^1B_2{}^2B_2}$ leží též na Q^6. $(\beta_1 . \beta_2) \equiv q$. Ale q protíná Q^6 jednak v 6ti bodech na stranách trojúhelníků A_1, A_1', A''_1 a A_2, A'_2, A''_2 a dále $\overline{{}^1B_1{}^2B_1}$, $\overline{{}^1B_2{}^2B_2}$ po jednom bodě, tudíž i q leží na ploše Q^6. Každá další rovina $\beta_3, \beta_4, \ldots$ prochází také přímkou q, poněvadž by jinak rovina β_1 obsahovala ∞^1 mnoho přímek plochy Q^6. Je zřejmo, že $q \equiv {}^1B_1{}^2B_1$, ${}^1B_2 \equiv {}^1B_2$, ${}^2B_2 \equiv {}^2B_1$ (poněvadž jinak by v β_1 ležela další přímka Q^6 jakožto její površka a k_2^5 by v β_1 měla 7 bodů, vzhledem k tomu, že površky jsou bisekantami k_2^5). Je proto Q^6 plochou bisekant křivky k_2^5, protínajících bisekantu q, tak jako involuční plocha P^6.

Involucím I_3^1, ${}^1I_3^1$ na k_2^5 jsou duální dvě involuce rovinové (I_3^1), $({}^1I_3^1)$ na R_2^5 ale tak, že $({}^1I_3^1)$ je duální k I_3^1 a (I_3^1) k ${}^1I_3^1$.

Budiž a protější přímka bodu A v příslušném trojúhelníku $\varDelta$, α_1 protější rovina přímky a v příslušném trojhranu T. V rovině α_1 leží površky a'_1, a''_1 plochy P^6. α_1 protíná k_2^5 ještě v pátém bodě ${}^1A$ (kromě bodů na bisekantách a'_1, a''_1) a tento bod přísluší k A jednoznačně. Naopak, každým bodem ${}^1A$ procházejí 2 biplanáry torsu R_2^5, jež jsou zároveň bisekantami k_2^5 a každou z nich 2 tečné roviny plochy R_2^5. Pátá tečná rovina α_1 protíná p v bodě N, jímž procházejí 2 biplanáry (bisekanty k_2^5) a'_1, a''_1. Této rovině přísluší jediná protější přímka a v trojhranu T a této jediný protější bod A v trojúhelníku $\varDelta$. Tím zřízena příbuznost (1, 1) bodů A, ${}^1A$ na k_2^5. Bodem N procházejí 4 bisekanty: a, p, a'_1, a''_1 a body A, ${}^1A$ jsou páté průsečíky k_2^5 s rovinami resp. $\alpha \equiv (ap)$, $\alpha_1 \equiv (a'_1 a''_1)$ a proto $A\,{}^1A$ jest hlavní bisekantou.[6])

Příbuznost bodů A, ${}^1A$ na k_2^5 je kvadratická involuce I_2^1, vytatá hlavními bisekantami.

Každé přímce $a \equiv \alpha_1$ přísluší dvojice a', a'' a dále a'_1, a''_1 ve dvou navzájem duálních involucích površek na P^6. Poněvadž obě duální involuce $({}^1I_3^1)$, I_3^1 mají 8 koincidencí, mají 8 koincidencí i příslušné, navzájem duální, kubické involuce površek P^6, jakožto protějších přímek (v útvarech T, $\varDelta$).

Ale také roviny $\alpha_1 \equiv (a'_1 a''_1)$, $\alpha'_1 \equiv (\alpha_1 a'_1)$, $\alpha''_1 \equiv (\alpha_1 a'_1)$ protínají k_2^5 ještě po jednom (pátém) bodě, resp. ${}^1A$, ${}^1A'$, ${}^1A''$. I tyto trojice bodové tvoří kubickou involuci ${}^2I_3^1$ o 8 koincidencích. Trojice involucí ${}^1I_3^1$ a ${}^2I_3^1$ jsou tak přidruženy, že body odpovídajících družin, na př. ${}^1A$, A_1, leží po dvou na hlavních bisekantách.

Ke každé bisekantě p kvintiky k_2^5, jakožto řídící přímce plochy P^6 přísluší tímto způsobem vždy jiná skupina kubických involucí I_3^1, ${}^1I_3^1$, ${}^2I_3^1$, (I_3^1), $({}^1I_3^1)$, atd.

[6]) Caporali, Rom. Acc. Lincei Mem. (3), 2, 749, 1878, Memorie di Geom., Napoli 1888.

Jednou trojicí bodů $AA'A''$ jakožto družinou involuce I_3^1 je určena jediná *řídící bisekanta* čili *osa* p a tudíž jedna a jen jedna involuce I_3^1; *2 z těchto involucí nemají společné trojice. Je tudíž těchto involucí (na dané k_2^5) ∞^2.*

Buďtež p a p_1 [7]) dvě osy involucí resp. I_3^1, $I_{3,1}^1$. Poněvadž P^2 určená bisekantou p protíná p_1 v šesti bodech, z nichž 2 dvojnásobné leží na k_2^5, a tudíž 2 z nich mimo k_2^5, existují dvě bisekanty a kvintiky k_2^5 protínající současně p i p_1. Na každé z těchto bisekant leží po dvou bodech, obsažených vždy v jedné trojici involuce I_3^1 a současně v jedné trojici involuce $I_{3,1}^1$.

Dvě dané kubické involuce I_3^1 na k_2^5 obsahují po dvou párech (družinách) bodových, z nichž každý je obsažen současně v jisté trojici jedné i v trojici druhé involuce.

Buďiž v rovině α 5 průsečíků $(\alpha k_2^5) \equiv ABCDE$; $p \equiv \overline{DE}$ jakožto osa určuje v α družinu ABC involuce I_3^1, $p' \equiv \overline{DC}$ družinu ABE involuce $I_3^{1\prime}$, $p'' \equiv \overline{CE}$ družinu ABD involuce $I_3^{1\prime\prime}$. Otáčí-li se α kolem $\overline{AB}$, dostáváme ∞^1 trojúhelníků EDC, jejichž strany p, p', p'' jsou pro každou polohu roviny α osami vždy tří involucí $I_3^1 \ldots$, v jejichž trojicích je též obsažena dvojice AB.

Dvojice bodů AB na k_2^5 je obsažena v trojicích ∞^1 involucí kubických; jejich osy p, p', p'' vytínají na k_2^5 involuci $I_3^1(AB)$, jejíž osou je bisekanta $\overline{AB}$ a vytvořují proto plochu šestého stupně.

Dvě dvojice bodů A, B; F, G na k_2^5 jsou obsaženy dvakrát v trojicích téže involuce kubické a to jednak v trojicích jisté involuce I_3^1 a současně v trojicích jiné involuce $I_3^{1\prime}$.

Označíme-li $AB \equiv m$, $FG \equiv m'$, jsou osy r, r' involucí I_3^1, $I_3^{1\prime}$ oněmi dvěma bisekantami k_2^5, z nichž každá protíná současně m i m'. V tomto vztahu ovšem možno r, r' zaměniti s m, m'. Každým dvěma daným kubickým involucím o osách r, r' přísluší tímto způsobem dvojice kubických involucí o osách m, m'.

*

L'involution cubique sur la quintique gauche de genre deux.

(Extrait de l'article précédent.)

Les bisécantes d'une quintique gauche de genre deux, coupant une bisécante fixe p, engendrent une surface gauche du 6ème ordre et découpent, sur la quintique, une involution cubique de la première classe, possédant huit coïncidences. La quintique considérée est courbe double de cette surface, la bisécante directrice p en est une droite triple. Cette surface est corrélative à elle-même; ses géné-

[7]) Obecně mimoběžné.

ratrices sont, en même temps, des biplanaires de la développable des plans tangents doubles, de la cinquième classe, de genre deux. Toute bisécante p de la quintique considérée détermine une seule involution cubique; donc, il y a, sur une quintique donnée, une double infinité de ces involutions. De même, un triple de points donné détermine une seule de ces involutions. Par conséquent, deux de ces involutions n'ont pas de triple commun, mais il y a deux couples de points, contenus, en même temps, dans des triples des deux involutions.