

Jaroslav Jarušek

Poznámka k rozvoji funkce $\arcsin x$

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 2, D7--D8

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121759>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1935

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Proto tato vzpomínka k jeho šedesátce chce mu říci dík za jeho dosavadní činnost, za jeho nezištnou a obětavou snahu a práci vykonanou pro naši fyziku a přáti mu hojně zdaru a svěžesti k další jeho práci.

Poznámka k rozvoji funkce arc sin x .

Dr. Jaroslav Jarušek, Kralupy n. Vlt.

Na sjezdu matematiků zemí slovanských v Praze (25. září 1934) odvodil K. Carda nerovnost $3 + \frac{1}{7} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$. Užíval při tom Taylorovy řady pro arc sin x pro $x = \frac{1}{2}$ a nahrazoval tuto řadu řadou geometrickou se členy jednak většími, jednak menšími.

Provedu podobným způsobem obecnější úvahu. V rozvoji

$$\text{arc sin } x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

jest obecný člen

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Poměr sousedních členů je

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} x^2.$$

Zlomek při x^2 je menší než 1 a pro $n = \infty$ má limitu 1. Jest tedy

$$u_{n+1} < u_n x^2, \quad u_{n+2} < u_n x^4, \quad \dots$$

$$\text{arc sin } x < u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n (1 + x^2 + x^4 + \dots)$$

čili

$$\text{arc sin } x < u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + \frac{u_n}{1-x^2}. \quad (2)$$

Zlomek

$$\alpha = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6}$$

s rostoucím n roste. Jest totiž jeho derivace

$$\frac{d\alpha}{dn} = \frac{(8n+4)(4n^2+10n+6) - (8n+10)(4n^2+4n+1)}{(4n^2+10n+6)^2} =$$

$$= \frac{2(2n+1)(6n+7)}{(2n+2)^2(2n+3)^2}$$

kladná pro každé kladné n . Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \alpha u_n x^2, \\ u_{n+2} &> \alpha u_{n+1} x^2 \quad \text{čili} \quad u_{n+2} > \alpha^2 u_n x^4, \\ u_{n+3} &> \alpha u_{n+2} x^2 > \alpha^3 u_n x^6, \\ &\dots \end{aligned}$$

a

$$\arcsin x > u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n (1 + \alpha x^2 + \alpha^2 x^4 + \dots)$$

čili

$$\arcsin x > u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + \frac{u_n}{1 - \alpha x^2}. \quad (3)$$

Spojením vztahů (2) a (3) dostaneme

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1 - \Theta x^2}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\alpha < \Theta < 1, \quad \alpha = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}.$$

Tento výsledek platí pro $|x| < 1$.

Na př. pro $n = 1$ je

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 \cdot \frac{1}{1 - \Theta x^2}, \quad \frac{9}{20} < \Theta < 1.$$

Odtud pro $x = \frac{1}{2}$ dostaneme $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4 - \Theta}$ čili

$$\pi = 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 - \Theta} \text{ a tedy } \pi < 3\frac{1}{6}, \quad \pi > 3\frac{1}{12}.$$

Pro $n = 3$ a $x = \frac{1}{2}$ je $\frac{1}{6}\pi < \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{40} \cdot \frac{1}{32} + \frac{5}{84 \cdot 128}$
 čili $\pi < 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{5}{14 \cdot 128}$. Tím spíše pak je $\pi < 3 + \frac{1}{8} +$
 $+ \frac{9}{630} + \frac{5}{14 \cdot 100}$ čili $\pi < 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{70} + \frac{1}{280}$ neb $\pi < 3\frac{1}{7}$.