Bohuslav Hostinský

O řešení zobecněné Chapmanovy funkční rovnice

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. 1, 8--14

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121728`

O řešení zobecněné Chapmanovy funkční rovnice.

Bohuslav Hostinský, Brno.

(Došlo 27. září 1938.)

Věnováno k jubileu pana prof. dr. Karla Petra.

1. Integrální rovnice Fredholmova typu a druhého druhu

$$\varphi(x) + \int_a^b F(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \tag{1}$$

kde $F(x, y)$ značí danou spojitou funkci proměnných x a y, $f(x)$ danou spojitou funkci proměnné x a $\varphi(x)$ funkci neznámou ($a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$), má obecně (pokud nenastává t. zv. singulární případ) jediné řešení vyjádřené známými Fredholmovými vzorci (viz na př. E. Goursat: Cours d'Analyse mathém., t. III.). Jsou však i jiné způsoby, kterými se dá vyjádřiti řešení integrální rovnice (1). Jeden z nich zakládá se na tomto postupu (viz vzorce uvedené v odst. 2): Rovnice (1) definuje lineární funkční transformaci, která dané funkci $\varphi(x)$ přiřaďuje funkci $f(x)$. Rozložíme-li tuto transformaci v sled infinitesimálních transformací (t. j. takových, kterými se hodnota funkce mění o nekonečně malou veličinu), a sestrojíme-li ke každé z nich transformaci inversní, dá se úloha řešiti; stačí složiti všechny tyto inversní transformace v obráceném pořadí, abychom dostali tak transformaci, která je k původní transformaci inversní a která přiřaďuje dané funkci $f(x)$ jinou funkci $\varphi(x)$.

2. Budiž u proměnný parametr, který se mění v mezích s a t, $s < u < t$, a budiž $K(x, y, u)$ spojitá funkce proměnných x, y a u. Rozdělme interval (s, t) na n stejných dílů o délce h, takže dělícím bodům odpovídají hodnoty $s + h, s + 2h, \ldots, s + (n - 1)\, h$; $h = (t - s)/n$. m-tému dělícímu bodu $s + mh$ nechť odpovídá funkční transformace S_m daná formulí

$$g(x) = f(x) + h \int^b K(x, y, s + mh)\, f(y)\, dy, \tag{2}$$

která přiřaďuje dané funkci $f(x)$ funkci $g(x)$. Je-li m nekonečně veliké a tedy h nekonečně malé, je transformace (2) infinitesimální (rozdíl $g(x) - f(x)$ je nekonečně malý). Složme nyní transformace S_m tak, že nejprve provedeme S_n, pak S_{n-1}, na to $S_{n-2} \ldots$, na konec S_1. Složená transformace $S_1 S_2 \ldots S_{n-1} S_n$ blíží se určité limitní transformaci T, roste-li n do nekonečna. T je vyjádřena formulí*)

$$\varphi(x) = f(x) +$$

$$+ \int_a^b \Bigg[\int_s^t K(x, y, u)\, du + \sum_{n=2}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \int_s^t \int_s^{u_n} \int_s^{u_{n-1}} \cdots \int_s^{u_2} K(x, z_1, u_1) \,.$$

$$K(z_1, z_2, u_2) \ldots K(z_{n-1}, y, u_n)\, du_1 du_2 \ldots du_n\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n-1} \Bigg] f(y)\, dy. \tag{3}$$

Transformace S_m^{-1} inversní k transformaci S_m dané vzorcem (2) je vyjádřena vzorcem

$$f(x) = g(x) - h \int_a^b K(x, y, s + mh)\, g(y)\, dy. \tag{4}$$

Složme nyní transformace S_m^{-1} tak, že provedeme napřed S_1^{-1}, pak $S_2^{-1} \ldots$ a na konec S_n^{-1}. Složená transformace $S_n^{-1} S_{n-1}^{-1} \ldots S_2^{-1} S_1^{-1}$ blíží se určité limitní transformaci T^{-1}, roste-li n do nekonečna. Transformace T^{-1}, inversní k T, přiřaďuje dané funkci $\varphi(x)$ funkci $f(x)$ a je vyjádřena vzorcem

$$f(x) = \varphi(x) +$$

$$+ \int_a^b \Bigg[-\int_s^t K(x, y, u)\, du + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \int_s^t \int_s^{u_n} \int_s^{u_{n-1}} \cdots \int_s^{u_2} K(x, z_1, u_n) \,.$$

$$K(z_1, z_2, u_{n-1}) \ldots K(z_{n-1}, y, u_1)\, du_1\, du_2 \ldots du_n\, dz_1\, dz_2 \ldots \tag{5}$$

$$dz_{n-1} \Bigg] f(y)\, dy.$$

Označme symbolem $\psi(x, y, s, t)$ výraz, který se vyskytuje v hranaté závorce formule (3); pak se dá ukázati (zaměníme ve vzorci (3) s s t, pak zaměníme u každého jednoduchého integrálu podle $u_1, u_2, \ldots, u_n$ integrační meze a na konec napíšeme $u_1, u_2, \ldots, u_n$ místo resp. $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1$), že výraz v hranaté závorce (5) rovná se $\psi(x, y, t, s)$. Místo (3) a (5) můžeme tedy psáti

*) Viz B. Hostinský: Sur une équation fonctionnelle de la Théorie des probabilités (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 156 (1932), str. 14; podrobný výklad je v knize Volterra-Hostinský: Opérations infinitésimales linéaires (Paris, 1938; Chap. XVII).

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \psi(x, y, s, t)\, f(y)\, dy \tag{3'}$$

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^b \psi(x, y, t, s)\, \varphi(y)\, dy. \tag{5'}$$

(5′) jest integrální rovnice tvaru (1); je-li jádro $F(x, y)$ rovnice (1) tvaru $\psi(x, y, t, s)$, řeší se tedy rovnice (5′) vzorcem (3′) a řešení je jednoznačné. Při tom platí

$$\psi(x, y, s, t) + \psi(x, y, t, s) + \int_a^b \psi(x, z, s, t)\, \psi(z, y, t, s)\, dz = 0. \tag{6}$$

Funkce ψ je vyjádřena řadou

$$\psi(x, y, s, t) = \int_s^t K(x, y, u)\, du +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \int_s^t \int_s^{u_n} \int_s^{u_{n-1}} \dots \int_s^{u_2} K(x, z_1, u_1)\, K(z_1, z_2, u_2) \dots K(z_{n-1}, y, u_n)\,. \tag{7}$$

$$du_1\, du_2 \dots du_n\, dz_1\, dz_2 \dots dz_{n-1};$$

$$\psi(x, y, s, s) = 0.$$

Důkazy rovnic (6) a (8) jsou uvedeny v citované knize.

3. Rovnice (6) je speciální případ obecnější rovnice

$$\psi(x, y, s, t) = \tag{8}$$

$$= \psi(x, y, s, u) + \psi(x, y, u, t) + \int_a^b \psi(x, z, s, u) \,.\, \psi(z, y, u, t)\, dz$$

platné pro libovolné tři hodnoty s, u, t.*) Každá funkce ψ tvaru (7), kde $K(x, y, u)$ je libovolná spojitá funkce, vyhovuje rovnici (8). Výsledky úvah odst. 2 a 3 shrneme větou: Je-li $\psi(x, y, s, t)$ funkce vyjádřená řadou (7), kde $K(x, y, u)$ je libovolná spojitá funkce, platí rovnice (6) a (8), a funkční transformace (3′) jest inversní k (5′). Jinými slovy: řada (7) dává řešení funkční rovnice (8).

4. Upravíme nyní předchozí vzorce užívajíce nového označení. Původní integrační interval (a, b) označíme znakem R a jeho část (α, β) znakem Y; platí $a < \alpha < \beta < b$.

Budeme psáti, je-li $f(y)$ spojitá funkce, $\int_R f(y)\, dy$ místo

*) Dřívější omezení $s < u < t$ není nutné.

$\int\limits_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$; $\int\limits_Y f(y)\,\mathrm{d}y$ místo $\int\limits_\alpha^\beta f(y)\,\mathrm{d}y$. Poslední integrál je funkcí intervalu Y a položíme

$$\int\limits_Y f(y)\,\mathrm{d}y = P(Y). \tag{9}$$

$P(Y)$ jest additivní funkce (funkcionál) intervalu Y. To znamená: jsou-li Y_1 a Y_2 dva intervaly bez společného bodu (nebo s jediným společným bodem), jest

$$P(Y_1 + Y_2) = P(Y_1) + P(Y_2);$$

$P(Y_1 + Y_2)$ značí zde integrál funkce $f(y)$ vztažený k intervalu $Y_1 + Y_2$ složenému z obou intervalů Y_1 a Y_2.

Rozdělme interval Y na n dílčích intervalů $\mathrm{d}Y_1, \mathrm{d}Y_2, \ldots, \mathrm{d}Y_n$, takže $Y = \mathrm{d}Y_1 + \mathrm{d}Y_2 + \ldots + \mathrm{d}Y_n$. Roste-li n do nekonečna a konverguje-li současně délka každého z těchto n intervalů k nule, je podle obvyklé (Riemannovy) definice

$$P(Y) = \int\limits_Y f(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\,.\,\mathrm{d}Y_i;$$

y_i značí bod intervalu $\mathrm{d}Y_i$. Místo této rovnice může se také psáti

$$P(Y) = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{d}Y_i) \text{ nebo } P(Y) = \int\limits_Y P(\mathrm{d}Y). \tag{10}$$

V dalších vzorcích budeme užívati tohoto označení (zavedeného v práci pana B. Pospíšila, která bude citována): x je bod ležící v intervalu $\mathrm{d}X$, y bod v $\mathrm{d}Y$, α_i bod v $\mathrm{d}X_i$, z_i bod v $\mathrm{d}Z_i$ atd.; $E(x, Y) = 1$, leží-li bod x v intervalu Y; $E(x, Y) = 0$, je-li bod x vně Y. Je-li $f(y)$ spojitá funkce a x bod v intervalu R, platí

$$\int\limits_R E(x, \mathrm{d}Y)\,.\,f(y) = f(x)$$

a rovnice (1) dá se nahraditi rovnicí

$$\int\limits_R F_1(x, \mathrm{d}Y)\,\varphi(y) = f(x), \tag{11}$$

při čemž $F_1(x, Y) = \int\limits_Y F(x, y)\,\mathrm{d}y + E(x, Y)$. Položme dále

$$\Phi(x, Y, s, t) = \int\limits_Y \psi(x, y, s, t)\,\mathrm{d}y + E(x, Y),$$

kde ψ značí řadu (7), a budiž

$$A(x, Y, u) = \int_Y K(x, y, u)\, dy;$$

$K(x, y, u)$ je spojitá funkce tří proměnných, $A(x, Y, u)$ je funkce dvou proměnných x, u a intervalu Y. Užívajíce nového označení nahradíme formuli (7) novým vzorcem:

$$\Phi(x, Y, s, t) = E(x, Y) + \int_s^t A(x, Y, u)\, du +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} \int_R \int_R \ldots \int_R \int_s^t \int_s^{u_n} \ldots \int_s^{u_2} A(x, dZ_1, u_1)\, A(z_1, dZ_2, u_2) \ldots \tag{12}$$

$$\ldots A(z_{n-1}, Y, u_n)\, du_1\, du_2 \ldots du_n.$$

Rovnice (5′) přechází v

$$\int_R \Phi(x, dY, t, s)\, \varphi(y) = f(x) \tag{13}$$

a rovnice (3′) v

$$\varphi(x) = \int_R \Phi(x, dY, s, t)\, f(y). \tag{14}$$

Eliminujme funkci $\varphi(x)$ z rovnic (13) a (14); vychází

$$\int_R \left[\int_R \Phi(x, dZ, t, s)\, \Phi(z, dY, s, t)\right] f(y) = f(x).$$

Poněvadž funkce $f(x)$ je libovolná spojitá funkce, je tento vztah možný jedině v tom případě, že

$$\int_R \Phi(x, dZ, t, s)\, \Phi(z, Y, s, t) = E(x, Y). \tag{15}$$

Rovnice (15) odpovídá rovnici (6).

5. Abychom konečně odvodili rovnici obdobnou rovnici (8), integrujme (8) po obou stranách podle y (integrační obor Y), připočtěme pak na obou stranách $E(x, Y)$ a zaveďme funkci Φ podle definice z odst. 4. Vychází

$$\Phi(x, Y, s, t) = \Phi(x, Y, s, u) + \Phi(x, Y, u, t) - E(x, Y) +$$

$$+\int_R [\Phi(x, dZ, s, u) - E(x, dZ)]\, [\Phi(z, Y, u, t) - E(z, Y)].$$

Poněvadž pak podle definice symbolu $E(x, Y)$ (odst. 4) platí

$$\int_R E(z, Y)\, E(x, \mathrm{d}Z) = E(x, Y),$$

$$\int_R \Phi(x, \mathrm{d}Z, s, u)\, E(z, Y) = \Phi(x, Y, s, u),$$

$$\int_R \Phi(z, Y, u, t)\, E(x, \mathrm{d}Z) = \Phi(x, Y, u, t),$$

redukuje se předešlá rovnice na

$$\Phi(x, Y, s, t) = \int_R \Phi(x, \mathrm{d}Z, s, u)\, \Phi(z, Y, u, t). \tag{16}$$

Následující věta, obdobná větě uvedené na konci odst. 3, shrnuje předešlé formule: Je-li $\Phi(x, Y, s, t)$ funkce vyjádřená řadou (12), platí rovnice (15) a (16), a integrální rovnice (13) — kde $\varphi(x)$ značí neznámou funkci — má řešení dané vzorcem (14); funkční transformace (14) jest inversní k transformaci (13). Považujeme-li Φ za neznámou funkci, má funkční rovnice (16) řešení dané vzorcem (12), kde A je libovolná funkce (additivní vzhledem k Y).

6. Věta vyslovená v předešlém odstavci liší se, za předpokladů učiněných v odst. 4, jen označením od věty vyslovené na konci odst. 3. Avšak vzorcům, v nichž se užívá označení zavedeného v odst. 4, dá se přisouditi obecnější význam, než je ten, který mají vzorce odst. 2 a 3.

A. Kolmogorov*) uvádí rovnici (16), kterou nazveme zobecněnou rovnicí Chapmanovou, za předpokladů velmi obecných. Zobecnění je v trojím směru: předně na místo bodu určeného úsečkou x v daném intervalu nastupuje bod v prostoru R o libovolném počtu rozměrů; za druhé na místo dílčích intervalů Y nastupují bodová množství v R a místo funkcí intervalů Y funkce těchto bodových množství; za třetí integrály vztažené k těmto množstvím jsou podle Kolmogorova definovány způsobem, jenž se v podstatě zakládá na definicích integrálu, které podali Stieltjes a Lebesgue.

R. 1936 uveřejnil B. Pospíšil práci,**) ve které se zabývá řešením zobecněné Chapmanovy rovnice (16) a ukazuje, že za určitých podmínek, v práci podrobně vytčených, má ta rovnice jediné řešení vyjádřené řadou (12). Tato řada vyhovuje ovšem rovnici (15), neboť rovnici (15) obdržíme kladouce $s = t$ v rovnici (16); platí také vztahy (13) a (14). Budiž $A(x, Y, u)$ funkce vyho-

---

*) A. Kolmogoroff: Die analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Math. Annalen, Bd. **104**, 1931, p. 415—458).

) B. Pospíšil: Sur un problème de M. M. S. Bernstein et A. Kolmogoroff (Časopis pro pěstování m. a f., r. **65, 1936, p. 64—76).

vující předpokladům vytčeným v Pospíšilově práci, a $\Phi(x, Y, s, t)$ funkce parametrů s, t, bodu x a bodového množství Y v prostoru R definovaná vzorcem (12), a $f(x)$ funkce bodu x ohraničená a integrace schopná. Pak integrální rovnice (13), kde $\varphi(x)$ je neznámá funkce, má řešení dané vzorcem (14).

Podrobný důkaz této věty, která doplňuje úvahy obsažené v Pospíšilově práci, dal by se provésti na jejich základě.

*

Sur la solution de l'équation généralisée de Chapman.

(Résumé.)

L'équation géneralisée de Chapman (16) a été considérée en 1931 par A. Kolmogoroff. B. Pospíšil dans un travail de 1936 en a donné une solution sous la forme (12). En étudiant le rapport de cette formule avec les formules que l'on obtient en intégrant des transformations fonctionnelles linéaires (voir les travaux cités de Hostinský et de Volterra) on trouve que l'équation intégrale (13) où $\Phi(x, Y, s, t)$ est la somme de la série (12) (fonction d'un point x dans un espace abstrait R, d'un ensemble de points Y dans E et de deux paramètres s, t) et $f(x)$ une fonction donnée, admet la solution $\varphi(x)$ exprimée par la formule (14).