Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Juraj Hronec

Fuchsove relácie pre lineárne differenciálne systémy a počet ich členov

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 3, 209--250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121644

Fuchsove relácie pre lineárne differenciálne systémy a počet ich členov.

Napísal Dr. *Juraj Hronec*.

Fuchsove relácie pre lin. differenciálne rovnice n-ho radu odvodil bol Lazarus Fuchs[1]) z vety Abel—Jakobihovej o prečarovaní argumenta a parametra. Tieto relácie sú analogonjai tých relácií, ktoré Weirstrass dostal pre periody hyperelliptických integrálov prvého a druhého druhu a určia istý súvis medzi integrálami týchto rovníc a medzi fundamentálnymi substituciami differenciálnych rovníc n-ho radu. L. Schlesinger[2]) spojil tieto relácie s vetou Abel-Jakobihovou, Schlesingerom rozšírenou a Hirsch[3]) zase, applikujúc tento Schlesingerov spoj na Eulerove transformovanie, dal týmto Fuchsovým reláciam pre differenciálne rovnice n-ho radu všeobecnej formy.

V tejto práce pojednávanie sú Fuchsove relácie všeobecnej formy pre differenciálne systémy. Differenciálnymi systémami k vôli krátkosti označujeme systémy lin. differenciálnych rovníc. Fuchsove relácie pre differenciálne systémy podávajú súvis, jestvujúci medzi integrálnymi mátrixami differenciálnych systémov a medzi fundamentálnymi substituciami, patriacimi k singulárnym bodom differenciálnych systémov.

Prvu prácu o reláciach Fuchsových, vzťahujúcich sa na differenciálne systémy publikoval som v Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. XXVII. Bd. 1913. Leipzig. Zaoberávajúc sa od vtedy znovu týmito reláciami usiloval som sa určit počet ich členov a skúmal som i ich praktické applikovanie. Tuna podávam starú prácu, prepracovanú v jednotlivých čiastkách, ale pritom publikujem, ako novú čiastku, vypočítanie počet členov relácií Fuchsových, patriacich k prvej, k druhej a k tretej skupine a podávam i všeobecný súhrn týchto všetkých relácií.

---

[1]) Crelle Journal Bd. 76. (1874), Werke I. (1904) S. 415 ff.; Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1892, Werke III. (1901). S. 141 ff.

[2]) Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen. Bd. II. (1897), XII. Abschnitt.

[3]) Mathematische Annalen. Bd. 54. (1900), S. 202 ff.

Adjungované, lineárne differenciálne systémy.[4])

Jestli

$$\text{(a)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \, a_{\lambda k}$$

$$(k = 1, 2, 3 \ldots n)$$

je differenciálny, lineárny systém, vtedy tomuto adjungovaný lin. differenciálny system je:

$$\text{(b)} \qquad \frac{dz_k}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \, a_{k\lambda}.$$

$$(k = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Zaobevárajúc sa s Fuchsovými reláciami pre differenciálne systémi obmedzíme sa na ten prípad, kde differenciálne systémy sú absolutne kanonického týpu a preto klademe:

$$a_{\lambda k}(x) = \frac{g_{\lambda k}(x)}{\varphi(x)},$$

kde je: $\varphi(x) = (x-a_1)\,(x-a_2) \ldots . (x-a_\sigma)$, a $g_{\lambda k}(x)$ je funkcia racionálna celistvá, závislá len od premenny x najvyššie vo stupni $\sigma-1$. Keď to určime, vtedy differenciálne systemy (a) a (b) sú tohoto tvaru:

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x) \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda(x) g_{\lambda k}(x).$$

potažne

$$(b') \qquad \varphi(x) \frac{dz_k}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda(x) g_{k\lambda}(x).$$

Differenciálny systém (b') substituciou:

$$(1) \qquad z_k(x) = \varphi(x)\, \mu_k(x)$$

pretvorí sa na differenciálny systém:

$$\frac{d(\varphi(x)\,\mu_k(x))}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} \mu_\lambda(x)\, g_{k\lambda}(x).$$

Toto je adjungovaný differenciálny systém differenciálneho systému (A).

---

[4]) Z čiastky na základe ústného sdelenia p. profesorom Schlesingerom z Giessenu, z čiastky zase na základe knihy Schlesingera: „Vorlesungen über lin. Differentialgleichungen" (Leipzig, Teubner 1908), ktorú vždy pod titulom „Vorlesungen" budem citovať.

II.
Veta o čare parametrů a argumentu u lineárnych differenciálnych systémov.[5])

Identične je:

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\mu_k(x)\right]-\frac{d}{dz}\left[\varphi(z)\sum_{k=1}^{n}y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{x-z}\right]=$$

$$=\varphi'(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\mu_k(x)+\varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{y_k(z)}{(z-x)^2}\mu_k(x)+\frac{y_k(z)}{z-x}\cdot\frac{d\mu_k(x)}{dx}\right\}$$

$$-\varphi'(z)\sum_{k=1}^{n}y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{x-z}-\varphi(z)\sum_{k=1}^{n}\left\{y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{(x-z)^2}+\frac{dy_k(z)}{dz}\frac{\mu_k(x)}{x-z}\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{y_k(z)}{(z-x)^2}\mu_k(x)\varphi(x)-\varphi(z)y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{(x-z)^2}\right\}-\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{x-z}\mu_k(x)\varphi'(z)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\left\{\varphi'(x)\mu_k(x)+\varphi(x)\frac{d\mu_k(x)}{dx}\right\}-\sum_{k=1}^{n}\varphi(z)\frac{dy_k(z)}{dz}\frac{\mu_k(x)}{x-z},$$

poneváč dľa (B) je:

$$\varphi'(x)\mu_k(x)+\varphi(x)\frac{d\mu_k(x)}{dx}=-\sum_{\lambda=1}^{n}\mu_\lambda(x)\,g_{k\lambda}(x),$$

preto, keď my toto a k tomu ešte differenciálny systém (A) do ohľadu bereme, vtedy vyššia identita pretvorí sa na tvar:

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\mu_k(x)\right]-\frac{d}{dz}\left[\varphi(z)\sum_{n=1}^{n}y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{x-z}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{y_k(z)}{(z-x)^2}\mu_k(x)\varphi(x)-\varphi(z)y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{(z-x)^2}\right\}-\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{x-z}\mu_k(x)\varphi'(z)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}y_k(z)\,\mu_\lambda(x)\frac{g_{k\lambda}(x)}{x-z}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}y_k(z)\,\mu_\lambda(x)\frac{g_{k\lambda}(z)}{x-z};$$

---

[5]) Použitím mne danej poznámky p. profesora Schlesingera.

alebo po usporiadaní jednotlivých členov:

$$(c'.)\quad \frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\sum_{n=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\mu_k(x)\right]-\frac{d}{dz}\left[\varphi(z)\sum_{k=1}^{n}y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{x-z}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}y_k(z)\mu_k(x)\left\{\frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(z-x)^2}-\frac{\varphi'(z)}{x-z}\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}y_k(z)\,\mu_\lambda(x)\,\frac{g_{k\lambda}(x)-g_{k\lambda}(z)}{x-z}.$$

Klaďme tuna:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{g_{k\lambda}(x)-g_{k\lambda}(z)}{x-z}\ \ldots \text{ keď}: k \neq \lambda\\[2ex] \dfrac{g_{k\lambda}(x)-g_{k\lambda}(z)}{x-z}+\dfrac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(x-z)^2}-\dfrac{\varphi'(z)}{x-z}\ \ldots \text{keď}: k=\lambda\end{array}\right\}=U_{k\lambda}(x,z),$$

kde bezprostredne vidno, že $U_{k\lambda}(x,z)$ pri $k \neq \lambda$ je racionálna funkcia celistvá najviššie $\sigma-2$-ho stupňa, ale že $U_{k\lambda}(x-z)$ je takáto funkcia i pri $k=\lambda$, to vidíme, keď funkciu $\varphi(x)$ rozvinieme v okolí $x=z$ do radu dľa rozvoju Taylorovho a tak rozvinutú funkciu $\varphi(x)$ vložíme do funkcie $U_{k\lambda}(x,z)$, poneváč vtedy máme:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(z-x)^2}-\frac{\varphi'(z)}{x-z}=\frac{\varphi''(z)}{2!}+\frac{\varphi^{(3)}(z)}{3!}(x-z)+\ldots+\frac{\varphi^{(\sigma)}(z)}{\sigma!}(x-z)^{\sigma-2}.$$

Použijúc túto substituciu, rovnica (c') prejde do tvaru:

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{x-z}\mu_k(x)\right]-\frac{d}{dz}\left[\varphi(z)\sum_{k=1}^{n}y_k(z)\frac{\mu_k(z)}{x-z}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}y_k(z)\;\mu_\lambda(x)\;U_{k\lambda}(x,z).$$

Položme tuna na miesto y_k, y_{ik}; na miesto μ_k, $\mu_{jk}=Y_{kj}$ a konečne na miesto μ_λ, $\mu_{j\lambda}=Y_{\lambda j}$, vtedy máme:

$$(c)\qquad \sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}y_{ik}(z)\;U_{k\lambda}(x,z)\;Y_{\lambda j}(x)=$$

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{ik}(z)}{z-x}Y_{kj}(x)\right]-\frac{d}{dz}\left[\varphi(z)\sum_{k=1}^{n}y_{ik}(z)\frac{Y_{kj}(x)}{x-z}\right].$$

Keď $(y_{ik}(x))$ znamená integrálny mátrix differenciálného systému $(A.)$ a $(\mu_{ik}(x))$ zase integrálny mátrix adjungovaného differenciálneho systému $(B.)$, kde o tomto poslednom integrálnom mátrixu dľa Schlesingera: „Vorlesungen“ 3 prednášky a dľa substitúcie (1) stojí, že je:

$$(2) \qquad (\varphi(x)\, Y_{ik}(x) = (y_{ik}(x))^{-1},$$

vtedy (c) na základe náuky komponovania mátrixov prejde do differenciálnej rovnice mátrixnej:

$$(C) \qquad (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z)\, (Y_{ik}(x)) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)) - \frac{d}{dz}(\varphi(z)\, y_{ik}\, z)\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right).$$

III.

Korene determinujúcich fundamentálných rovníc, patriacich k singulárnym bodom koefficientov.

Jestli-že koefficienty $a_{ik}(x)$ differenciálneho systému:

$$(a) \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\, a_{\lambda k}$$

sú monogénne a holomorphné funkcie v jednoducho súvislom obore S, vtedy obecný integrálný mátrix tohoto differenciálneho systému tohoto vzoru je:

$$(3) \qquad (y_{ik}(x)) = (c_{ik})\, (\eta_{ik}(x)),$$

kde (c_{ik}) je konštantný mátrix, o ktorom stojí, že $/c_{ik}/ \neq 0$ je.

$(\eta_{ik}(x))$, ako partikulárny integrálny mátrix differenciálneho systému (a), v okolí singulárneho bodu $x = a_\nu$ však tohoto tvaru je:

$$(4) \qquad (\eta_{ik}(x)) = ((x - a_\nu)^{r_i}\, \varphi_{ik}(x)), \qquad (\nu = 1, 2 \ldots . \sigma)$$

kde $\varphi_{ik}(x)$ v okolí tohoto singulárneho bodu holomorphné funkcie sú, o ktorých ešte i to stojí, že

$$/\, \varphi_{ik}(a_\nu)\, / \neq 0;$$

a kde exponenty r_i sú koreňami determinujúcej fundamentálnej rovnice, patriacej k singulárnemu bodu $x = a_\nu$, ktorá v prípade differenciálnych systémov absolutne kanonického týpu, teda v prípade differenciálneho systému (A), takýto tvar má:

$$/\, A_{ik}^{(\nu)}(\nu) - \delta_{ik}\, r\, / = 0, \qquad (\nu = 1, 2 \ldots . \sigma)$$

kde zase $A_{ik}^{(\nu)}\, \nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots . \sigma)$ sú residuá, patriace k jednotlivým singulárnym bodom differenciálneho systému (A).

O týchto koreňoch r_i předpokladáme, že sú ony všetky rôzne, t. j. že niet medzi nima stejných. Predpokladáme ďalej, že reálna čiastka týchto koreňov hýbe sa medzi hodnotami 0 a — 1. Na základe tohoto predpokladu a na základe vety o koreňoch determinujúcich fundamentálnych rovníc, patriacich k differenciálnym systémom adjungovaným, reálna čiastka koreňov z determinujúcich fundamentálnych rovníc, patriacich k dilferenciálnemu systému (*B*.) leži zase len medzi hodnotami 0 a — 1.

IV.

Identity, vyplívajucie z vyššie urobeného predpokladu.

V odseku III. už máme, že:

$$\mu_{ik} = Y_{ki}$$
$$z_{ik} = \varphi Y_{ki}. \tag{5}$$

Klaďme ešte

$$(\eta_{ik}(x)^{-1} = (H_{ik}(x)\ \varphi(x)) \tag{6a}$$

a vtedy z tohoto dľa (4.) nasleduje:

$$(\zeta_{ik}(x)) = (\eta_{ik}(x))^{-1} = (H_{ik}(x)\ \varphi(x)) = ((x-a_\nu)^{-r_k}\ \Phi_{ik}(x)). \tag{6b}$$

Tento $(\zeta_{ik}(x))$ mátrix je integrálnym mátrixom adjungovaného differenciálneho systému (b'). Ztadiaľto zase vidno, že:

$$(H_{ik}(x)) = ((x-a_\nu)^{-r_k-1}\ \overline{\Phi}_{ik}(x)). \tag{7}$$

Poneváč reálna čiastka mocniteľov: $-r_k$ hýbe sa medzi 0 $a + 1$· vtedy reálna čiastka mocniteľov $-r_k-1$ ostane vždy medzi 0 $a-1$, Funkcie $\Phi_{ik}(x)$ a $\overline{\Phi}_{ik}(x)$ sú v okolí singulárneho bodu a_ν holomorphné.

Na základe predpokladu o koreňoch determinujúcich fundamentálnych rovníc a na základe (4) bezprostredne vidno, že je:

$$[(\varphi(z)\ \eta_{ik}(z))]_{z=a_\nu} = [((z-a_\nu)^{r_i+1}\ \overline{\varphi}_{ik}(z))]_{z=a_\nu} = (0), \tag{8a}$$

poneváč funkcie $\overline{\varphi}_{ik}(z)$ v okolí singulárneho bodu $z=a_\nu$ sú holomorphné funkcie; tak tiež zo (6b) nasleduje:

$$[(\varphi(x)\ H_{ik}(x))]_{x=a_\nu} = [((x-a_\nu)^{-\nu_k}\ \Phi_{ik}(x))]_{x=a_\nu} = (0). \tag{8b}$$

Vezmúc do ohľadu rovnicu (3), dostaneme z rovnice (2):

$$(\varphi(x)\ Y_{ik}(x)) = (c_{ik}\ \eta_{ik}(x))^{-1} = (\eta_{ik}(x))^{-1}\ (c_{ik})^{-1}, \tag{9a}$$

a z tohoto zase na základe (6a):

$$(\varphi(x)\ Y_{ik}(x)) = (\varphi(x)\ H_{ik}(x))\ (c_{ik})^{-1}, \tag{9b}$$

alebo

$$(Y_{ik}(x)) = (H_{ik}(x))\ (c_{ik})^{-1}. \tag{9}$$

Poneváč (c_{ik}) je konštantný mátrix, kde $/c_{ik}/ \neq 0$ je, preto z (9b) na základe (7) máme

$$[(\varphi(x)\; Y_{ik}(x))]_{x=a_\nu} = (0) \tag{10a}$$

a z rovnice (3) na základe (4) dostaneme zase

$$[(\varphi(z)\; y_{ik}(z))]_{z=a_\nu} = (0) \tag{10b}$$

V.

Prvá skupina Fuchsových relácií.

Integrujme rovnicu (C) v odseku II. tak, že v obore državy z integrujeme od singulárného bodu $a_\varkappa$ po singulárny bod a_λ a v obore državy x integrujeme od singulárného bodu a_μ po singulárny bod a_ν; integrujeme však pod tou podmienkou, že integráčne čiary nemajú společného bodu.

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\,(y_{ik}(z))\;(U_{ik}(x,z))\;(Y_{ik}(x)) =$$

$$= \left[\left(\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz\right)\left(\varphi(x)\,Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a_\mu}^{x=a_\nu} - \left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a_\mu}^{a_\nu} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=a_\varkappa}^{z=a_\lambda}.$$

Poneváč integráčne čiary nemajú společného bodu, preto integrále

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz, \quad \int_{a_\mu}^{a_\nu} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx \qquad (\mu,\ \nu,\ \varkappa,\ \lambda = 1, 2, 3 \ldots \sigma)$$

sú konečnej a určitej hodnoty. Majúc toto pred očami a vezmúc do ohľadu rovnice (10), dostaneme z vyššej rovnice, ako výsledok prvú skupinu Fuchsových relácií:

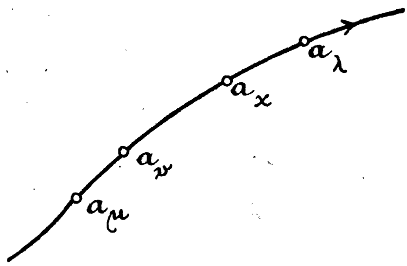
$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\;(y_{ik}(z))\;(U_{ik}(x,z))\;(Y_{ik}(x)) = (0)$$

kde $\mu,\ \nu,\ \varkappa,\ \lambda = 1, 2, 3 \ldots \sigma$, ale tak vzato, že $\mu \neq \nu \neq \varkappa \neq \lambda$

VI.

Veličina skupiny prvých relácií Fuchsových.

Aby sme to vypočítať mohli, že koľko relácií patrí, do prvej skupiny Fuchsových relácií, urobme jedon rez po krivke, tiahnucej cez všetky singulárne body. O tejto krivke predpokladáme, že nemá dvojného bodu, to jest, že sa nepretína, teda asi takto tiahne:



Obr. 1.

Po tomto však ustáľme sa na smere a na polohe integráčnych čiar a to tak, že pokiaľ je $\mu < \nu$ ($\mu, \nu = 1, 2 \ldots \sigma$), dovtedy integráčna čiara premenny $x - u$ stále na pravom brehu tohoto rezu pokračuje, ale ak náhle je $\mu > \nu$, vtedy integráčne čiary hneď prejdú na ľavy breh tohoto rezu. To isté stojí i na integráčne čiary v obore državy z, takže, keď je $\varkappa < \lambda$ ($\varkappa, \lambda = 1, 2 \ldots \sigma$), vtedy integrujeme na pravom brehu rezu, ale keď je zase $\varkappa > \lambda$, vtedy prejdeme na ľavý breh.

Chcejúc určiť veličinu prvých relácií Fuchsových, vypočítáme tieto v tom prípade, keď je $\mu \leq \nu \leq \varkappa \leq \lambda$. Tento prípad je len jedon speciálny prípad tej podmienky, ktorú sme v predošlom odseku vzťahom na integráčne čiary urobili, ale vypočítame veličinu prvých relácií Fuchsových i v tomto páde, lebo pri tejto špeciálnej podmienke sú dané prvé relácie Fuchsove v práce,[6]) písanej po prvé o Fuchsových reláciach. Jestli je

$$\mu < \nu < \varkappa < \lambda,$$

vtedy veličinu prvých relácií Fuchsových môžeme v $\sigma - 3$-och postupoch určiť. Keď integráčnu čiaru, vzťahujuciu sa na x, vezmeme medzi singulárnymi body a_1 a_2, vtedy počet integráčnych čiar, vzťahujúcich sa na premennu z je:

$$\binom{\sigma - 2}{2}$$

a tak týmto prvým krokom dostaneme, ako veličinu prvých relácií Fuchsových odhliadnuc od meny i a k:

$$\binom{2}{2}\binom{\sigma - 2}{2}.$$

Vezmime teraz a_1, a_2, a_3 singulárne body. Medzi týmito môžeme potiahnúť $\binom{3}{2}$ integráčnych čiar, vzťahujúcich sa na premennu x

[6]) Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XXVII.

a medzi ostatnými $\sigma - 3$ singulárnymi body môžeme zase

$$\binom{\sigma - 3}{2}$$

integráčnych čiar, vzťahujúcich sa na premennu z vyznačiť, tak že pri tomto druhom kroku dostaneme

$$\binom{3}{2}\binom{\sigma - 3}{2}$$

relácií, lenže medzi týmito nalezajú sa i relácie, určené už čiastočne prvým krokom, takže pri druhom kroku dostaneme len

$$\binom{3}{2}\binom{\sigma - 3}{2} - \binom{2}{2}\binom{\sigma - 3}{2} = 2\binom{\sigma - 3}{2}$$

nových relácií. Takýmto pokračovaním pri treťom kroku dostaneme

$$\binom{4}{2}\binom{\sigma - 4}{2} - \binom{3}{2}\binom{\sigma - 4}{2} = 3\binom{\sigma - 4}{2}$$

nových relácií. Pri $\sigma - 4$-tom postupe dostaneme

$$\binom{\sigma - 3}{2}\binom{3}{2} - \binom{\sigma - 4}{2}\binom{3}{2} = (\sigma - 4)\binom{3}{2}$$

nových relácií a konečne pri $\sigma - 3$-tom kroku máme

$$\binom{\sigma - 2}{2}\binom{2}{2} - \binom{\sigma - 3}{2}\binom{2}{2} = (\sigma - 3)\binom{2}{2}$$

nových relácií. V prípade

$$\mu < \nu < \varkappa < \lambda$$

pri stálych hodnotách i a k je teda všetkých prvých relácií Fuchsových

$$\sum_{r=2}^{\sigma-2}\binom{r}{2}(\sigma - r - 1);$$

ale práve toľko relácií máme i v prípade

$$\mu > \nu > \varkappa > \lambda,$$

takže pri podmienke $\mu \leq \nu \leq \varkappa \leq \lambda$ veličina všetkých prvých relácií Fuchsových je

$$2\,n^2\sum_{r=2}^{\sigma-2}\binom{r}{2}(\sigma - r - 1),$$

jestliže máme ohľad ešte i na to, že sú $i, k = 1, 2, 3 \ldots . n$.

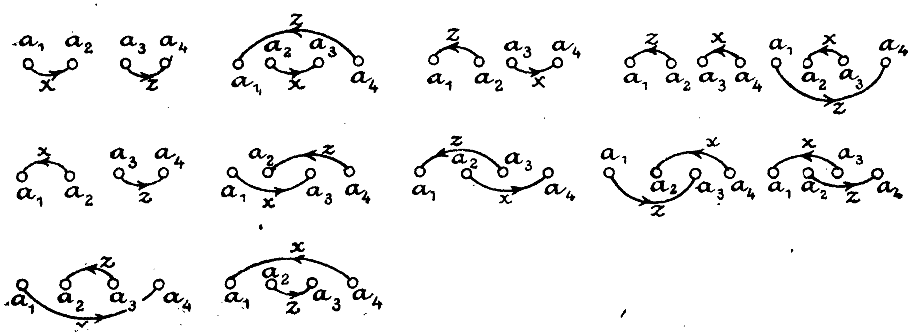
Po tomto vypočítajme úplnu veličinu prvých relácií Fuchsových t. j. pri tej podmienke, že integráčne čiary dvojnásobných integrálov nemajú společných bodov. Táto podmienka po ustálení smeru a polohy integráčnych čiar dá sa mathematicky takto označiť, že je:

$$\mu \neq \nu \neq \varkappa \neq \lambda.$$

Pri dvojnásobnom integrovaní znamená toto však to, že zo σ singulárnych bodov máme dve-dve singulárne body, ako hranice dvojnásobných integrálov, vychytiť a máme ich integráčnymi čiarami spojiť. Ale rad dvoch vychytených, vyznačených singulárnych bodov, to jest smer integráčnych čiar môžeme i zmeniť a tým dostaneme zase iné relácie. Zmenením miesta vychytených dvoch-dvoch singulárnych bodov variujeme kombinovanie dvojek, takže úplna veličina prvých relácií Fuchsových je:

$$n^2 \, V_\sigma{}^2 = n^2 \sigma \, (\sigma - 1).$$

Na pr. najjednoduchejší prípad je, keď $\sigma = 4$ je a vtedy integráčne čiary jednotlivých integrálov, vzťahujúcich se na x a na z musia byť takto vzaté:



Obr. 2.

V tomto prípade teda 12-rako môžeme rôzne vyznačiť integráčne čiary, vzťahujúcie sa na x a na z a preto pri $\sigma = 4$ máme spolu $n^2 . 12$ všetkých prvých relácií Fuchsových.

VII.

Druhá skupina Fuchsových relácií.

Integrujme rovnicu (C) odsek II tak, aby integráčne čiary dvojnásobných integrálov maly jedon jediný a to jedon singulárny bod, ako společnú hranicu. K vôli jednoduchosti pišme $a_\mu = a$, $a_\nu = c$, $a_\lambda = b$, kde $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3 \ldots \sigma$, vtedy:

(D) $$\int_a^c dx \int_c^b dz \, (y_{ik}(z)) \; (U_{ik}(x, z)) \; (Y_{ik}(x)) =$$

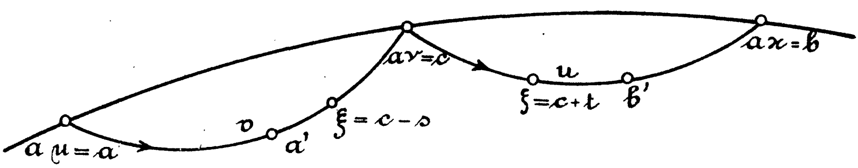
$$= \int_a^c dx \int_c^b dz \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)) -$$

$$- \int_a^c dx \int_c^b dz \frac{d}{dz}(\varphi(z))\, y_{ik}(z))\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right).$$

Chcejúc tieto integrále vypočitať, musíme ponajprv dvojnásobné integrále na jednoduché rozobrať.

1.
Rozklad prvého dvojnásobného integrálu na jednoduchý integrál v rovnici *(D)*.

K vôli krátkosti značme integráčnu čiaru $ac = v$ a integráčnu čiaru $cb = u$. Vyznačme potom na integráčnej čiare v jedon bod a', a na integráčnej čiare u jedon bod b'. Tak bod a', ako i bod b' sú rôzne od singulárnych bodov $a_1\ a_2 \ldots a_\sigma$, to jest nemôžu sa s týmito spojiť.



Obr. 3.

Vtedy je:

$$\int_a^c dx = \int_a^{a'} dx + \int_{a'}^c dx$$

$$\int_c^b dz = \int_c^{b'} dz + \int_{b'}^b dz$$

K vôli jednoduchosti klaďme ešte:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\ Y_{ik}(x)) = V,$$

takže vezmúc do ohľadu rozdvojenie jednoduchých integrálov, prvý dvojnásobný integrál takto môžeme písať:

$$\text{(d)}\quad \int_a^c dx \int_c^b dz\, V = \int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, V + \int_a^{a'} dx \int_{b'}^b dz V + \int_{a'}^c dx \int_c^{b'} dz V + \int_{a'}^c dx \int_{b'}^b dz\, V$$

Na pravej strane stojací prvý, druhý a štvrtý dvojpásobný integrál dá sa bezprostriedne vypočítať, poneváč u týchto integrálov integráčne čiary nemajú spoločných bodov, takže je:

$$\int_a^{a'} dx \int_c^b dz\, V = \left[\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a}^{x=a'}$$

$$\int_a^{a'} dx \int_{b'}^b dz\, V = \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a}^{x=a'}$$

$$\int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^b dz\, V = \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a'}^{x=c}$$

Majúc pred očami, že dľa (10a) stale je

$$[(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))]_{x=a_\nu} = (0) \qquad (\nu = 1, 2 \ldots \sigma)$$

a potom, že mátrix

$$\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)$$

vložiac do neho $x = a = a_\mu$ a konečne že mátrix,

$$\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)$$

vložiac do neho $x = a = a_\mu$, poťažne $x = c = a_\nu$, je konečnej hodnoty, dostaneme:

$$\left[\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a} = (0)$$

$$\left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a} = (0)$$

$$\left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=c} = (0)$$

a preto treba vypočítať len:

$$(g) \qquad \int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, V = \left[\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=a'}$$

$$\int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz\, V = \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=a'}$$

$$\int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz\, V \doteq \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a'}$$

Sčítajúc dve posledné rovnice, máme:

$$(\alpha) \qquad \int_a^{a'} dx \int_c^{b} dz\, V + \int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz\, V = (0)$$

Aby sme v rovnici (d) i tretí dvojnásobný integrál na pravej strane vypočítať mohli, vyznačme na integráčnej čiare v medzi bodmi a' a c jedon pohyblivý bod $\xi = c - s$ a to tak, že je $\lim\limits_{s=o}(c - s) = c$. Vyznačme potom na integračnej čiare u medzi bodom c a medzi bodem b' tiež jedon pohyblivý bod $\zeta = c + t$ tak, že je $\lim\limits_{t=o}(c + t) = c$, vtedy tento tretí dvojnásobný integrál takto môžeme vyjadriť:

$$(h) \quad \int_{a'}^{c} dx \int_c^{b'} dz\, V = \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \int_{a'}^{c-s} dx \int_{c+t}^{b'} dz\, \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)\left(\varphi(x)\; Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\; Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s} +$$

$$+ \left[\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a'}$$

Slúčením rovníc (g) a (h) dostaneme: (β)

$$\int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, V + \int_{a'}^{c} dx \int_c^{b'} dz\, V = \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}.$$

Sčítajme teraz zase rovnice (α) a (β) a vezmime do ohľadu (d), máme prvý dvojnásobný integrál v rovnici (D) vyjadreno jednoduchým integrálom: (11.)

$$\int_a^c dx \int_e^b dz \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)\left(\varphi(x) Y_{ik}(x)\right) = \lim_{\substack{s=o\\t=o}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\, dz\right)\left(\varphi(x) Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}.$$

2.

Rozklad druhého dvojnásobného integrálu na jednoduchý integrál v rovnici *(D)*.

Pokračovanie je stejné nežli prv.

Kladme
$$\frac{d}{dz}\left(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\right)\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right) = W,$$

a vtedy na základe už vyššie užívaného rozdvojenia jednoduchých integrálov druhý dvojnásobný integrál na pravej strane v rovnici (D) prejde do tvaru:

$$(f) \int_a^c dx \int_c^b dz\, W = \int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, W + \int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz\, W + \int_{a'}^{c} dx \int_c^{b'} dz\, W + \int_{a'}^{c} dz \int_{b'}^{b} dz\, W,$$

kde prvý, druhý a štvrtý dvojnásobný integrál dá sa takto vyjadriť:

$$\int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, W = \left[\left(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\right)\left(\int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\right)\right]_{z=c}^{z=b'}$$

$$\int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz\, W = \left[\left(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\right)\left(\int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\right)\right]_{z=b'}^{z=b}$$

$$\int_{a'}^{c} dz \int_{b'}^{b} dz\, W = \left[\left(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\right)\right]_{z=b'}^{z=b}$$

Poneváč dľa (10b) je
$$\left[\varphi(z)\, y_{ik}(z)\right]_{z=a_\nu} = (0) \quad (\nu = 1, 2 \ldots \sigma)$$

a poneváč mátrix
$$\left[\left(\int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\, dx\right)\right]_{z=c}^{z=b}$$

a mátrix
$$\left[\left(\int_{a'}^{c}\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{b'}^{z=b}$$
sú konečnej hodnoty, preto sú:
$$\left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a}^{a'}\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=c}=(0)$$
$$\left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a}^{a'}\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]^{z=b}=(0)$$
$$\left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c}\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]^{z=b}=(0)$$
takže ostane:
$$\int_{a}^{a'}dx\int_{c}^{b'}dz\,W=\left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a}^{a'}\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]^{z=b'}$$
$$\int_{a}^{a'}dx\int_{b'}^{b}dz\,W=\left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a}^{a'}\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=b'}$$
$$(g')\qquad \int_{a'}^{c}dx\int_{b'}^{b}dz\,W=\left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c}\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=b'}$$
Slučiac prvé dve rovnice, máme:
$$(\alpha')\qquad \int_{a}^{a'}dx\int_{c}^{b'}dz\,W+\int_{a}^{a'}dx\int_{b'}^{b}dz\,W=(0).$$
Aby sme i tretí dvojnásobný integrál v rovnici *(f)* jednoduchým integrálom vyjadriť mohli, použijme k tomu v predošlom odseku označené dve pohyblivé body ξ a ζ, takže je:
$$(h')\qquad \int_{a'}^{c}dx\int_{c}^{b'}dz\,W=\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\int_{a'}^{c-s}dx\int_{c+t}^{b'}dz\,\frac{d}{dz}\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right)=$$
$$\left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c}\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]^{z=b'}+\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s}\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right)\right]_{z=c+t}.$$

Sčítajme teraz rovnice (g') a (h'), tak máme:

$$(\beta')\ \int_{a'}^{c} dx \int_{c}^{b'} dz\, W + \int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz\, W = \lim_{\substack{s=o\\t=o}} \left[\left(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx\right)\right]_{z=c+t}.$$

Slučiac rovnice (α') a (β') a vezmúc do ohľadu rovnicu (f) zjaví sa nám druhý dvojnásobný integrál v rovnici (D), vyjadrený jednoduchým integrálom:

$$(12)\qquad \int_{a}^{c} dx \int_{c}^{b} dz\, \frac{d}{dz}\left(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\right)\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{s=o\\t=o}} \left[\left(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dz\right)\right]_{z=c+t}.$$

Vložme tvary (11) a (12) do rovnice (D):

$$\int_{a}^{c} dx \int_{c}^{b} dz \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= \lim_{\substack{s=o\\t=o}} \left\{\left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)\left(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s} - \right.$$

$$\left. - \left[\left(\varphi(z)\, y_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx\right)\right]_{z=c+t},\right.$$

a keď zase do tejto rovnice vložíme tvary z rovníc (3), poťažne (9), zodpovedajucie mátrixom ($y_{ik}(z)$) a ($Y_{ik}(x)$), vtedy dostaneme

$$(F)\qquad \int_{a}^{c} dx \int dz \left(y_{ik}(z)\right)\left(U_{ik}(x, z)\right)\left(Y_{ik}(x)\right) =$$

$$= (c_{ik}) \lim_{\substack{s=o\\t=o}} \left\{\left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{\eta_{ik}(z)}{z-x} dz\right)\left(\varphi(x)\, H_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s} - \right.$$

$$\left. - \left[\left(\varphi(z)\, \eta_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s} \frac{H_{ik}(x)}{x-z} dx\right)\right]_{z=c+t}\right\} (c_{ik})^{-1}$$

3.
Formula, potrebná k redukcii jednoduchých integrálov.

Pre adjungované differenciálne systemy (A) a (b') máme:[7])

$$\sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} z_{k\lambda} = \delta_{ik}\,; \qquad (i,\ k = 1, 2 \ldots n)$$

kde je

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{keď } i = k \\ 0, & \text{keď } i \neq k. \end{cases}$$

Z tejto rovnice na základe (5) dostaneme:

$$\varphi(x) \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}(x)\; Y_{\lambda k}(x) = \delta_{ik}$$

alebo

(δ) $$(y_{ik}(x))\;(\varphi(x)\; Y_{ik}(x)) = (\delta_{ik}).$$

Dľa (3) a (4) je:

$$(y_{ik}(x)) = (c_{ik})\;(\delta_{ik}(x-c)^{r_i})\;(\varphi_{ik}(x)),$$

a dľa (9a), poťažne (6b) je zase

$$(\varphi(x)\; Y_{ik}(x) = (\Phi_{ik}(x))\;(\delta_{ik}(x-c)^{-r_i})\;(c_{ik})^{-1}.$$

Vložme tieto do rovnice (δ):

$$(c_{ik})\;(\delta_{ik}(x-c)^{r_i})\;(\varphi_{ik}(x))\;(\Phi_{ik}(x))\;(\delta_{ik}(x-c)^{-r_i})\;(c_{ik})^{-1} = (\delta_{ik})$$

alebo

$$(\varphi_{ik}(x))\;(\Phi_{ik}(x) = (\delta_{ik}).$$

$\varphi_{ik}(x)$ a $\Phi_{ik}(x)$ v okolí $x = c = a_\nu$ sú holomorphné funkcie a preto keď vložíme $x = c$, dostaneme:

(13) $$\varphi'(c)\;(\varepsilon^0_{ik})\;(E^0_{ik}) = (\delta_{ik}),$$

kde ε^0_{ik} je prvý člen rozvoju funkcie $\varphi_{ik}(x)$ v okolí $x = c = a_\nu$, a E^0_{ik} je zase prvý člen rozvoju funkcie $\dfrac{\Phi_{ik}(x)}{\varphi(x)}$ v okolí $x = c = a_\nu$.

4.
Redukcia prvého členu, stojáceho pod limitou na pravej strane v rovnici (F).

Rozdvojme mátrix $(\eta_{ik}(z))$ takto:

$$(\eta_{ik}(z)) = ((z-c)^{r_i}\,\varepsilon^0_{ik}) + ((z-c))^{r_i+1}\,\overline{\varphi_{ik}}(z))$$

[7]) L. Schlesinger: „Vorlesungen“, str. 35, (6.)

a mátrix $(\varphi(x)\, H_{ik}(x))$ zase takto:

$$(\varphi(x)\, H_{ik}(x)) = ((x-c)^{-r_k}\, \varphi'(c)\, E^0_{ik}) + ((x-c)^{-r_k+1}\, \overline{\Phi}_{ik}(x)),$$

kde $\varepsilon^0{}_{ik}$, $\varphi'(c)$, $E^0{}_{ik}$ sú konštantné hodnoty. Funkcie $\overline{\varphi_{ik}}(z)$ a $\overline{\Phi_{ik}}(z)$ v okolí singulárneho bodu $c = a_\nu$ sú holomorphné funkcie. Pri takomto rozdvojení komponujme mátrix $\left(\frac{\eta_i(z)}{z-x}\right)$ s mátrixom $(\varphi(x)\, H_{ik}(x))$:

$$\left(\frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\, H_{ik}(x)) = \left(\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\varepsilon^0_{ik}\right)\left((x-c)^{-r_k}\varphi'(c)\, E^0_{ik}\right) +$$

$$+ \left(\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\varepsilon^0_{ik}\right)\left((x-c)^{-r_k+1}\,\overline{\Phi}_{ik}(x)\right) +$$

$$+ \left(\frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x}\,\overline{\varphi}_{ik}(z)\right)\left((x-c)^{-r_k}\,\varphi'(c)\, E^0_{ik}\right) +$$

$$+ \left(\frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x}\,\overline{\varphi}_{ik}(z)\right)\left((x-c)^{-r_k+1}\,\overline{\Phi}_{ik}(x)\right).$$

Integrujme túto rovnicu vzťahom na z od $c+t$ po b', vložme potom $x = c - s$ a vezmime limitu pre $\lim s = o$ a $\lim t = o$:

$$\lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\int_{c+t}^{b'}\frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}dz\right)\left(\varphi(x)\, H_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s} =$$

$$= \lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\varepsilon^0_{ik}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right)\left((x-c)^{-r_k}\varphi'(c)\, E^0_{ik}\right)\right]^{x=c-s} +$$

$$+ \lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\varepsilon^0_{ik}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right)\left((x-c)^{-r_k+1}\,\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s} +$$

$$+ \lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x}\,\overline{\varphi}_{ik}(z)\,dz\right)\left((x-c)^{-r_k}\varphi'(c)\, E^0_{ik}\right)\right]^{x=c-s} +$$

$$+ \lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x}\,\overline{\varphi}_{ik}(z)\,dz\right)\left((x-c)^{-r_k+1}\,\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}.$$

Druhý, tretí a štvrtý tvar, stojáci pod limitou, môžeme bezprostredne vypočítať. Druhý výraz je:

$$\lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\varepsilon_{ik}^{0}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right)\left((x-c)^{-r_k+1}\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}=$$

$$=\lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\varepsilon_{ik}^{0}\int\limits_{c+t}^{b'}\left(-1+\frac{z-c}{z-x}\right)(z-c)^{r_i}dz\right)\left((x-c)^{-r_k}\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}=$$

$$=\left(\varepsilon_{ik}^{0}\int\limits_{c}^{b'}\left(-1+\frac{z-c}{z-c}\right)(z-c)^{r_i}dz\right)\left[\left((x-c)^{-r_k}\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c}=(0).$$

poneváč prvý mátrix je vôbec nullou, súc činiteľ, stojáci pod **integrálom**, identične nullou; ale i druhý mátrix je tiež identične **nullou** pre $x=c$, lebo je $-r_k>o$ a $\overline{\Phi}_{ik}(x)$ sú zase holomorphné **funkcie** v okolí $x=c$.

Tretí tvar je:

$$\lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x}\overline{\varphi}_{ik}(z)\,dz\right)\left((x-c)^{-r_k}\varphi'(c)\,E_{ik}^{0}\right)\right]^{x=c-s}=$$

$$=\left(\int\limits_{c}^{b'}(z-c)^{r_i}\overline{\varphi}_{ik}(z)\,dz\right)\left[\left((x-c)^{-r_k}\varphi'(c)\,E_{ik}^{0}\right)\right]^{x=c}=(0);$$

lebo druhý mátrix pre $x=c$ je identične nullou, **poneváč je** $-r_k>o$, a prvý mátrix je zase konečnej hodnoty.

Štvrtý tvar je:

$$\lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x}\overline{\varphi}_{ik}(z)\,dz\right)\left((x-c)^{-r_k+1}\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}=$$

$$=\left(\int\limits_{c}^{b'}(z-c)^{r_i}\overline{\varphi}_{ik}(z)\,dz\right)\left[\left((x-c)^{-r_k+1}\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c}=(0),$$

lebo prvý mátrix je konečnej hodnoty a druhý mátrix pre $x=c$ je zase identične nullou, súc $-r_k+1>o$. Následkom týchto výsledkov je:

$$\lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}dz\right)\left(\varphi(x)\,H_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}=$$

$$=\varphi'(c)\,(\varepsilon_{ik}^{0})\,(E_{ik}^{0})\left(\left[\delta_{ik}\lim_{\substack{s=o\\t=o}}(x-c)^{-r_i}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right]^{x=c-s}\right)$$

alebo, keď vezmeme do ohľadu vzor (13):

$$(14)\qquad \lim_{\substack{s=o\\ t=o}}\left[\left(\int_{c+t}^{b'}\frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}dz\right)\left(\varphi(x)\,H_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}=$$

$$\left[\left(\delta_{ik}\lim_{\substack{s=o\\ t=o}}(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right)\right]^{x=c-s}.$$

5.

Redukcia druhého členu, stojáceho pod limitou na pravej strane v rovnici (F).

Pokračovanie je stejné, nežli v predošlom odseku bolo. Rozdvojme $(\varphi(z)\ \eta_{ik}(z))$ takto:

$$(\varphi(z)\ \eta_{ik}(z))=((z-c)^{r_i+1}\,\varphi'(c)\,\varepsilon^0_{ik})+((z-c)^{r_i+2}\,\overline{\varphi^*_{ik}}(z)),$$

tak tiež mátrix $(H_{ik}(x))$:

$$(H_{ik}(x))=((x-c)^{-r_k-1}E^0_{ik})+((x-c)^{-r_k}\,\overline{\Phi^*_{ik}}(x)),$$

kde $\varphi'(c)$, $\varepsilon^0{}_{ik}$ a $E^0{}_{ik}$ sú konštanty; $\overline{\varphi^*_{ik}}(z)$ a $\overline{\Phi^*_{ik}}(x)$ sú v okolí singulárneho bodu $c=a_\nu$ holomorphné funkcie. Takto rozdvojené tvary mátrixov komponujme jedno s druhým a to komponujme mátrix $(\varphi(z)\ \eta_{ik}(z))$ s ľava mátrixom $\left(\frac{H_{ik}(x)}{x-z}\right)$:

$$(\varphi(z)\ \eta_{ik}(z))\left(\frac{H_{ik}(x)}{x-z}\right)=((z-c)^{r_i+1}\varphi'(c)\,\varepsilon^0_{ik})\left(\frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}E^0_{ik}\right)+$$

$$+\left((z-c)^{r_i+2}\,\overline{\varphi^*_{ik}}(z)\right)\left(\frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}E^0_{ik}\right)+$$

$$+\left((z-c)^{r_i+1}\,\varphi'(c)\ \varepsilon^0_{ik}\right)\left(\frac{(x-c)^{-r_k}}{(x-z)}\overline{\Phi^*_{ik}}(x)\right)+$$

$$+\left((z-c)^{r_i+2}\,\overline{\varphi^*_{ik}}(z)\right)\left(\frac{(x-c)^{-r_k}}{x-z}\overline{\Phi^*_{ik}}(x)\right).$$

Integrujme túto rovnicu vzhľadom na x od hranice a' po hranicu $c-s$; položme potom do nej $z=c+t$ a vezmime limitu tak dostavšieho tvaru pre $\lim s=o$ a $\lim t=o$:

$$\lim_{\substack{s=o\\ t=o}}\left[\left(\varphi(z)\ \eta_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s}\frac{H_{ik}(x)}{x-z}dx\right)\right]_{z=c+t}=$$

$$= \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left((z-c)^{r_i+1} \varphi'(c)\, \varepsilon_{ik}^0 \right) \left(E_{ik}^0 \int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}\, dx \right) \right]_{z=c+t} +$$

$$+ \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left((z-c)^{r_i+2} \overline{\varphi}_{ik}^*(z) \right) \left(E_{ik}^0 \int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}\, dx \right) \right]_{z=c+t} +$$

$$+ \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left((z-c)^{r_i+1} \varphi'(c)\, \varepsilon_{ik}^0 \right) \left(\int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_k}}{x-z}\, \overline{\Phi}_{ik}^*(x)\, dx \right) \right]_{z=c+t} +$$

$$+ \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left((z-c)^{r_i+2} \overline{\varphi}_{ik}^*(z) \right) \left(\int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_k}}{x-z}\, \overline{\Phi}_{ik}^*(x)\, dx \right) \right]_{z=c+t}.$$

Na pravej strane druhý, tretí a štvrtý člen identične zmiznú, čo vidíme ihneď, jestli-že im iného tvaru dáme a do ohľadu bereme v predošlom odseku urobené poznámky. Druhý člen je:

$$\lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left((z-c)^{r_i+2} \overline{\varphi}_{ik}^*(z) \right) \left(E_{ik}^0 \int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}\, dx \right) \right]_{z=c+t} =$$

$$= \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left((z-c)^{r_i+1} \overline{\varphi}_{ik}^*(z) \right) \left(E_{ik}^0 \int_{a'}^{c-s} \left(-1 + \frac{x-c}{x-z} \right) (x-c)^{-r_k-1} dx \right) \right]_{z=c+t} =$$

$$= \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left((z-c)^{r_i+1} \overline{\varphi}_{ik}^*(z) \right) \right]_{z=c+t} \left(E_{ik}^0 \int_{a'}^{c-s} \left(-1 + \frac{x-c}{x-c} \right) (x-c)^{-r_k-1} dx \right) = (0).$$

Tretí člen je.

$$\lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left[\left((z-c)^{r_i+1} \varphi'(c)\, \varepsilon_{ik}^0 \right) \left(\int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_k}}{x-z}\, \overline{\Phi}_{ik}^*(x)\, dx \right) \right]_{z=c+t} =$$

$$= \left[\left((z-c)^{r_i+1} \varphi'(c)\, \varepsilon_{ik}^0 \right) \right]_{z=c} \left(\int_{a'}^{c} (x-c)^{-r_k-1}\, \overline{\Phi}_{ik}^*(x)\, dx \right) = (0),$$

lebo je $r_i + 1 > o$ a $-r_k - 1$ hodnota reálnou čiastkou leží medzi 0 a medzi -1.

Práve tak, ako sme v predošlom odseku videli i tu, štvrtý člen pre tie isté príčiny je nullou, takže máme:

$$\lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\varphi(z)\,\eta_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s}\frac{H_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=c+t}=$$

$$=\varphi'(c)\,(\varepsilon_{ik}^{0})\,(E_{ik}^{0})\left[\left(\delta_{ik}\lim_{\substack{s=o\\t=o}}(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=c+t}$$

alebo, keď bereme (13) do ohľadu:

$$\lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left[\left(\varphi(z)\,\eta_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s}\frac{H_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=c+t}= \tag{15}$$

$$=\left[\left(\delta_{ik}\lim_{\substack{s=o\\t=o}}(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=c+t}$$

Vložme teraz hodnoty zo (14) a (15) do rovnice (F) tak dostaneme:

$$\int_a^c dx\int_c^b dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))= \tag{G}$$

$$=(c_{ik})\left(\delta_{ik}\lim_{\substack{s=o\\t=o}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]^{x=c-s}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]_{z=c+t}\right\}\right)(c_{ik})^{-1}.$$

6.

Integrujme teraz rovnicu (C) odsek II. vzhľadom na x od singulárneho bodu c po singulárny bod b, a vzhľadom na z od singulárneho bodu a po singulárny bod c:

$$\int_c^b dx\int_a^c dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))= \tag{D'}$$

$$=\int_c^b dx\int_a^c dz\,\frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)\left(\varphi(x)Y_{ik}(x)\right)-\int_c^b dx\int_a^c dz\,\frac{d}{dz}\left(\varphi(z)y_{ik}(z)\right)\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right)$$

Chcejúc vypočítať tieto dvojnásobné integrále, musíme i tieto pretvoriť na jednoduché integrále a to tak, ako sme to boli urobili v rovnici (D), to jest použijeme cielom rozdvojenia jednoduchých integrálov tie dve body a' a b', ktoré sme určili na integráčnych čiarach v a u, takže vtedy môžeme písať:

$$\int_c^b dx = \int_c^{b'} dx + \int_{b'}^b dx$$

$$\int_a^c dz = \int_a^{a'} dz + \int_{a'}^c dz.$$

Na základe tohoto rozdvojenia máme:

$$(^*d)\quad \int_c^b dx \int_a^c dz\, V = \int_c^{b'} dx \int_a^{a'} dz\, V + \int_{b'}^b dx \int_a^{a'} dz\, V + \int_c^{b'} dx \int_{a'}^c dz\, V +$$

$$+ \int_{b'}^b dx \int_{a'}^c dz\, V,$$

kde:
$$V = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\; Y_{ik}(x)) \text{ je.}$$

Vyjadriac tieto dvojnásobné integrále jednoduchými integrály, snadno môžeme dokázať, že tvary:

$$\left[\int_a^{a'} V dz\right]_{x=c},\quad \left[\int_a^{a'} V dz\right]^{x=b},\quad \left[\int_{a_,}^{c} V dz\right]^{x=b}.$$

sú nullou na základe (10) a na základe predpokladu o koreňoch determinujúcich fundamentálnych rovníc, takže, keď použijeme v odseku VIII. 1. označenú limitu, rovnica $(^*d)$ prejde do tvaru:

$$\int_c^b dx \int_a^c dz\, V = \left[\int_a^{a'} V dz\right]^{x=b'} + \left[\int_a^{a'} V dz\right]_{x=b'} + \left[\int_{a'}^{c} V dz\right]^{x=b'} +$$

$$+ \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\int_{a'}^{c-s} V dz\right]_{x=c+t} + \left[\int_{a'}^{c} V dz\right]_{x=b'},$$

alebo slučiac zodpovedajúcie členy jedno s druhým, dostaneme:

$$(11)\quad \int_c^b dx \int_a^c dz\, V = \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\int_{a'}^{c-s} V dz\right]_{x=c+t}.$$

Chcejúc redukovať i druhý dvojnásobný integrál, stojáci na pravej strane v rovnici (D'), na jednoduchý integrál, kladťme

$$W = \frac{d}{dz}(\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right)$$

a použijme vyššie označené rozdvojenie jednoduchých integrálov, vtedy:

$$(d') \qquad \int_e^b dx \int_a^c dz\, W = \int_c^{b'} dx \int_a^{a'} dz\, W + \int_{b'}^{b} dx \int_a^{a'} dz\, W +$$

$$+ \int_c^{b'} dx \int_{a'}^{c} dz\, W + \int_{b'}^{b} dx \int_{a'}^{c} dz\, W.$$

Vyjadriac na pravej strane nalezajucie sa dvojnásobné integrále jednoduchými integrály, na základe (10) a na základe predpokladu o koreňoch determinujúcich fundamentálnych rovníc snadno môžeme dokázať, že po uvedení už známej limity máme:

$$\int_c^b dx \int_a^c dz\, W = \left[\int_c^{b'} W\, dx\right]^{z=a'} + \left[\int_{b'}^{b} W\, dx\right]^{z=a'} +$$

$$+ \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\int_{c+t}^{b'} W\, dx\right]^{z=c-s} + \left[\int_c^{b'} W\, dx\right]_{z=a'} + \left[\int_{b'}^{b} W\, dx\right]_{z=a'}.$$

Slučiac zodpovedajucie členy jedno s druhým, dostaneme:

$$(12') \qquad \int_c^b dx \int_a^c dz\, W = \lim_{\substack{s\equiv 0\\t=0}} \left[\int_{c+t}^{b'} W\, dx\right]^{z=c-s}.$$

Vložme tvary (11') a (12') do rovnice (D'), berme miesto $(y_{ik}(z))$ jeho hodnotu z (3) a miesto $(Y_{ik}(x))$ však jeho hodnotu z (9), vtedy rovnica (D') prejde do tvaru:

$$(F') \qquad \int_c^b dx \int_a^c dz\, (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) =$$

$$= (c_{ik}) \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left\{\left[\left(\int_{a'}^{c-s} \frac{\eta_{ik}(z)}{z-x} dz\right)\left(\varphi(x)\, H_{ik}(x)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left[(\varphi(z)\, \eta_{ik}(z)) \left(\int_{c+t}^{b'} \frac{H_{ik}(x)}{x-z} dx\right)\right]^{z=c-s}\right\}(c_{ik})^{-1}.$$

Použijúc i tu redukcie, známe už z odseku VII. 4. a 5. a berúc do ohľadu tvar (13), dostaneme z rovnice (F'):

$$(G') \qquad \int_c^b dx \int_a^c dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)) =$$

$$= (c_{ik}) \left(\delta_{ik} \lim_{\substack{s=0\\ t=0}} \left\{ \left[(x-c)^{-r_i} \int_{a'}^{c-s} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\, dz \right]_{x=c+t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[(z-c)^{r_i+1} \int_{c+t}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\, dx \right]^{z=c-s} \right\}\right) (c_{ik})^{-1}.$$

7.

Vypočítanie výrazov, stojácich pod limitou v rovniciach (G) a (G').

Snadno môžeme dokázať správnosť identity:

$$(16) \qquad (z-c)^{r_i} \frac{d}{dx} \frac{(x-c)^{-r_i}}{z-x} = (x-c)^{-r_i-1} \frac{d}{dz} \frac{(z-c)^{r_i+1}}{x-z}.$$

Integrujme túto identitu vzhľadom na x od a' po $c - s$, a vzhľadom na z od $c + t$ po b'; vezmime potom limitu tak dostavšieho tvaru pre $\lim s = o$ a $\lim t = o$, tak dostaneme:

$$\lim_{\substack{s=0\\ t=0}} \left[(x-c)^{-r_i} \int_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\, dz \right]_{x=a'}^{x=c-s}$$

$$= \lim_{\substack{s=0\\ t=0}} \left[(z-c)^{r_i+1} \int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\, dx \right]_{z=c+t}^{z=b'},$$

alebo ďalej:

$$\lim_{\substack{s=0\\ t=0}} \left\{ \left[(x-c)^{-r_i} \int_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\, dz \right]^{x=c-s} - \right.$$

$$\left. - \left[(z-c)^{r_i+1} \int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\, dx \right]_{z=c+t} \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{s=0\\ t=0}} \left\{ \left[(z-c)^{r_i+1} \int_{a'}^{c-s} \frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\, dx \right]^{z=b'} - \right.$$

$$\left[(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right]_{x-a'}\Bigg\},$$

poneváč argumenty x a z u členov na pravej strane sa už nemôžu sisť, preto tu môžeme limitu už vynechať a tak máme:

$$(17)\qquad \lim_{\substack{s=0\\t=0}}\Bigg\{\left[(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right]^{x=c-s}-$$

$$-\left[(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}dx\right]_{z=c+t}\Bigg\}=$$

$$=(b'-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-b'}dx+(a'-c)^{-r_i}\int_{c}^{b'}\frac{(z-c)^{r}}{z-a'}dz.$$

Potomto prikročíme k tomu, aby sme už dostavšie integrále priamo vypočítali a preto bod a' na integráčnej čiare u, poťažne bod b' na integráčnej čiare v ustáľme tak, žeby bolo:

$$(18)\qquad \frac{b'-c}{a'-c}=e^{\pi\sqrt{-1}}$$

Pomocou substitucie

$$z-c=-(a'-c)\,\zeta,$$

z ktorej zase vychádza, že je:

$$z-a'=-(a'-c)\cdot(1+\zeta),$$

dostaneme, ako výsledok, že druhý člen na pravej strane v rovnici (17) je:

$$(19)\qquad (a'-c)^{-r_i}\int_{c}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-a'}dz=e^{-r_i\pi\sqrt{-1}}\int_{0}^{1}\frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta}d\zeta.$$

U prvého jednoduchého integrálu na pravej strane v rovnici (17) uveďme túto substitúciu:

$$x-c=\frac{a'-c}{\zeta},$$

z ktorej zase, berúc do ohľadu (18), sleduje, že je:

$$x-b'=\frac{(a'-c)\,(1+\zeta)}{\zeta}.$$

Na základe tejto substitucie, vezmúc do ohľadu (18), dostaneme:

$$(20)\qquad (b'-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-b'}\,dx = e^{r_i\pi\sqrt{-1}}\int_{1}^{\infty}\frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta}\,d\zeta.$$

Položme hodnoty z (19) a z (20) do (17), tak máme:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]^{x=c-s}-\right.$$

$$\left.-\left[(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]_{z=c+t}\right\}=$$

$$=e^{r_i\pi\sqrt{-1}}\left[\int_{0}^{1}\frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta}\,d\zeta+\int_{1}^{\infty}\frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta}\,d\zeta\right]=e^{r_i\pi\sqrt{-1}}\int_{0}^{\infty}\frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta}\,d\zeta.$$

Výpočet tohoto určitého integrálu známy je z náuky určitých integrálov a je:

$$(8)\qquad \int_{0}^{\infty}\frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta}\,d\zeta=\frac{\pi}{\sin r_i\pi};$$

takže:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]^{x=c-s}-\right.$$

$$\left.-\left[(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]_{z=c+t}\right\}=\pi\frac{e^{r_i\pi\sqrt{-1}}}{\sin r_i\pi}.$$

Keď $\sin r_i\pi$ vyjadríme Eulerovou formulou a klademe:

$$e^{2r_i\pi\sqrt{-1}}=\omega_i,$$

vtedy dostaneme:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]^{x=c-s}-\right.$$

$$\left.-\left[(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]_{z=c+t}\right\}=$$

$$=2\pi\sqrt{-1}\,\frac{\omega_i}{\omega_i-1}=2\pi\sqrt{-1}\left\{1+\frac{1}{\omega_i-1}\right\}.$$

Aby sme vypočítať mohli výraz pod limitou v rovnici (g'), integrujme rovnicu (16) vzhľadom na x od $c+t$ po b', a vzhľadom na z od a' po $c-s$ a potom berme tak dostavšieho výrazu limitu pre lim $s=o$, lim $t=o$. Potomto práve tak, ako sme to už vyššie boli videli, soskupme tie členy, pri ktorých môžeme od limity odhliadnuť, na pravej strane rovnice a členy s limitou ostanú na ľavej strane rovnice, takže bude:

$$(17') \quad \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left\{ \left[(x-c)^{-r_i} \int_{a'}^{c} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} dz \right]_{x=c+t} - \left[(z-c)^{r_i+1} \int_{c+t}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z} dx \right]^{z=c-s} \right\} =$$

$$= -(a'-c)^{r_i+1} \int_{c}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-a'} dx - (b'-c)^{-r_i} \int_{a'}^{c} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-b'} dz.$$

Uveďme do druhého, určitého integrálu na pravej strane túto substituciu.

$$z-c=(a'-c)\,\zeta,$$

tak dostaneme, jestliže do ohľadu bereme eště i (18), že je:

$$(19') \quad -(b'-c)^{-r_i} \int_{a'}^{c} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-b'} dz = e^{-r_i \pi \sqrt{-1}} \int_{0}^{1} \frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta} d\zeta;$$

a keď zase u prvého určitého integrálu na pravej strane v rovnici (17') urobíme substituciu:

$$x-c=-\frac{a'-c}{\zeta},$$

tak bude:

$$(20') \quad -(a'-c)^{r_i+1} \int_{c}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-a'} dx = e^{-r_i \pi \sqrt{-1}} \int_{1}^{\infty} \frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta} d\zeta.$$

Položme výsledky z (19') a z (20') do rovnice (17') a vezmime do ohľadu vyššie pod (γ) stojácu formulu:

$$\lim_{\substack{s=o\\t=o}} \left\{ \left[(x-c)^{-r_i} \int_{a'}^{c-s} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} dz \right]_{x=c+t} - \left[(z-c)^{r_i+1} \int_{c+t}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z} dx \right]^{z=c-s} \right\} =$$

$$= e^{-r_i \pi \sqrt{-1}} \int_{0}^{\infty} \frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta} d\zeta = \pi \frac{e^{-r_i \pi \sqrt{-1}}}{\sin r_i \pi}.$$

Vyjadrime funkciu $\sin r_i \pi$ pomocou Eulerovej formuly a klaďme $e^{2i\pi\sqrt{-1}} = \omega_i$, vtedy dostaneme:

$$(21') \qquad \lim_{\substack{s=o \\ t=o}} \left\{ \left[(x-c)^{-r_i} \int_{a'}^{c-s} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} dz \right]_{x=c\pm t} - \right.$$

$$\left. - \left[(z-c)^{r+1} \int_{c+t}^{b'} \frac{(x-c)^{-r-1}}{x-z} dx \right]^{z=c-s} \right\} = 2\pi\sqrt{-1} \frac{1}{\omega_i - 1}.$$

8.

Výsledok z (21) položme teraz do rovnice (g), poťažne výsledok z (21') do rovnice (g'), tak máme:

$$(\mathrm{H}) \qquad \int_a^c dx \int_c^b dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)) =$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\, \{(\delta_{ik}) + (c_{ik}) \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_i - 1}\right) (c_{ik})^{-1}\}$$

poťažne:

$$(\mathrm{H}') \qquad \int_c^b dx \int_a^c dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)) =$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\, (c_{ik}) \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_i - 1}\right) (c_{ik})^{-1}$$

Na ľavej strane stojáci mátrix je tohoto tvaru:

$$(22) \qquad (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)) = \left(\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_{i\lambda}(z)\, U_{\lambda\nu}(x, z)\, Y_{\nu k}(x)\right),$$

kde, ako už z odseku II. známe $U_{ik}(x, z)$ je v premenných x a z funkcia celistvá stupňa najviššie σ-2-ho, teda má túto podobu:

$$U_k(x, z) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} C_{ik}^{(\alpha, \beta)} x^{\alpha} z^{\beta}. \qquad (\alpha + \beta \leqq \sigma - 2)$$

Koefficienty $C_{ik}^{(\alpha, s)}$ sú konštanty a dajú sa úplne a rationálne vypočítať z konštantných koefficientov differenciálneho systému (A), a preto elementy mátrixu (22) sú aggregáty takého tvaru:

$$C_{\lambda\nu}^{(\alpha, \beta)}\, y_{i\lambda}(z)\, z^{\beta}\, Y_{\nu k}(x)\, x^{\alpha}.$$

Elementy mátrixov v rovnicách (H) a (H') sú určité integrále týchto výrazov, teda sû tvary takýchto určitých integrálov:

$$\int_a^c y_{i\lambda}(z)\, z^\beta\, dz, \qquad \int_c^b Y_{\nu k}(x)\, x^\alpha\, dx,$$

kde a, b, c sú voľaktoré tri singulárne body zo singulárnych bodov $a_1\, a_2 \ldots a_\sigma$ differenciálneho systému (A). Takéto tvary nazývame po Hirschovi[8]) periodami integrálov

$$\int y_{i\lambda}(z)\, z^\beta\, dz, \qquad \int Y_{\nu k}(x)\, x^\alpha\, dx.$$

Elementy mátrixov na ľavej strane v rovnicách (H) a (H') sú bilineárneho tvaru týchto periodov, majúcich konštantných koefficientov, a elementy mátrixov na pravej strane složené sú zase z dvoch činiteľov, a to po prvé z prevodných substitucií (c_{ik}), patriacich k jednotlivým singulárnym bodom a po druhé z koreňov ω_i fundamentálnych rovníc, patriacich k týmistým singulárnym bodom.

Korene ω_i fundamentálnych rovníc a korene determinujúcich fundamentálnych rovníc v takomto súvise stoja:

$$\omega_i = e^{2 r_i \pi \sqrt{-1}},$$

to jest korene fundamentálnych rovníc sú koreňami determinujúcich fundamentálnych rovníc determinované, určité, ale naopak nie, lebo korene determinujúcich fundamentálnych rovníc sú len tak určité koreňami fundamentálnych rovníc, že odhliadneme od istých additivnych a celistvých čísiel.

Jestli-že premenna x okolo singulárneho bodu $x = c$ opíše uzavrenú krivku, vtedy partikulárny integrálny mátrix $(\eta_{ik}(x))$ absolutne kanonického differenciálneho systému (A) pritiahne k sebe fundamentálnu substituciu, čiže komponuje sa s ľavej strany fundamentálnou substituciou:

$$(\delta_{ik}\, \omega_i),$$

kde je
$$\delta_{ik} = \begin{cases} = 1, & \text{keď } i = k \\ = 0, & \;\;\text{„}\;\; i \neq k; \end{cases}$$

a všeobecný integrálny mátrix differenciálneho systému (A), to jest:

$$(y_{ik}(x)) = (c_{ik})\, (\eta_{ik}(x)),$$

pri takomto opísaní sing. bodu $x = c$ dostane fundamentálnu substituciu, čiže komponuje sa s ľava fundamentálnou substituciou:

$$(c_{ik})\, (\delta_{ik}\, \omega_i)\, (c_{ik})^{-1} = (A_{ik}).$$

---

[8]) Mathematische Annalen. Sv. 54.

Odčítajme od tejto rovnice mátrix jednotku, to jest mátrix (δ_{ik}):

$$(c_{ik})\ (\delta_{ik}(\omega_i - 1))\ (c_{ik})^{-1} = (A_{ik} - \delta_{ik}).$$

Tvorme inversný mátrix tohoto mátrixu:

$$\left((c_{ik})\ (\delta_{ik}(\omega_i - 1))\ (c_{ik})^{-1}\right)^{-1} = (c_{ik}) \left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_i - 1}\right) (c_{ik})^{-1} = (A_{ik} - \delta_{ik})^{-1}$$

Stredný výraz je však mátrixný výraz na pravej strane v rovniciach (H) a (H') a preto vložme jemu zodpovedajucú hodnotu do týchto rovníc; potom vložme nazpäť $a = a_\mu$, $c = a_\nu$, $b = a_\lambda$, kde $\mu, \nu, \lambda = 1.2\ldots\sigma$, ale vždy tak rozumeno, že je: $\mu \neq \nu \neq \lambda$. Keď to urobíme, vtedy pri fundamentálnych substituciach musíme označiť, že tieto patria k singulárnemu bodu $x = c = a_\nu$. Dáme tomuto však tak znak, že fundamentálne substitucie označíme horným indexom patričného singulárneho bodu, teda teraz horným indexom ν. Po takomto opatrení, dostaneme:

$$(K)\quad \int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x,z))\, (Y_{ik}(x)) = 2\pi\sqrt{-1}\,\{(\delta_{ik}) + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\},$$

poťažne:

$$(K')\quad \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dx \int_{a_\mu}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x,z))\, (Y_{ik}(x) = 2\pi\sqrt{-1}(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1},$$

kde je: $i, k = 1.2\ldots n$, $\nu = 1.2\ldots\sigma$.

Rovnice (K) a (K') určia billineárny súvis medzi vyššie označenými periody a medzi elementami fundamentálnych substitucií a dajú sa vždy jednoznačne vypočítať, lebo inversný mátrix mátrixu $(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})$ je vždy určiteľný, poneváč je:

$$|A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}| \neq 0$$

a to preto nemôže tento determinant zmiznúť, lebo fundamentálnej rovnici

$$/A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}\,\omega_i/ = 0$$

nemôžu vyhoveť korene $\omega_i = 1$; poneváč je:

$$\omega_i = e^{2\pi r_i \sqrt{-1}}$$

a na r_i ten predpoklad stojí, že ich reálna čiastka je:

$$-1 < r_i < 0.$$

VIII.

Počet členov druhej skupiny Fuchsových relácií.

Ku každému singulárnemu bodu a_ν ($\nu = 1. 2. . . \sigma$), ako ku společnej hranici integráčnych čiar dvojnásobného integrálu, patria dve—dve skupiny (K) a (K') druhých relácií Fuchsových. Tieto dve skupiny relácií sú sdružené skupiny. Že pri vypočítaní týchto skupín, ktorú skupinu máme dostáť, to nezávisí len od radu integráčnych hraníc, ako sme to už v predošlých odsekoch boli videli, ale závisí to ešte i od volenia substitucie (18). Lebo keď my túto substituciu tak volíme, ako je označená v (18), teda:

$$\frac{b'-c}{a'-c} = e^{\pi\sqrt{-1}},$$

vtedy integrujúc rovnicu (C) v smere kladnom, dostaneme skupinu relácií (K) a keď my pri tomto integrovaní u jednoduchých integrálov zmeníme miesto integráčnych hraníc, dostaneme skupinu relácií (K').

Ale keď my substituciu takto volíme:

$$\frac{a'-c}{b'-c} = e^{\pi\sqrt{-1}},$$

vtedy, konajúc integráciu vzhľadom na rovnicu (C) v kladnom smere, dostaneme skupinu relácií (K'). Zmeniac zase u tohoto istého integrovania pri jednoduchých integráloch miestá integráčnych hraníc, dostaneme skupinu relácií (K).

Po tejto poznámke chyťme sa vypočítať, koľko je členov druhých relácií Fuchsových, patriacich k skupine (K) a práve toľko bude členov druhých relácií Fuchsových, patriacich k skupine (K'). Vypočítajme veličinu skupiny týchto relácií ponajprv v tedy, keď je:

$$\mu \lesseqgtr \nu \lesseqgtr \lambda \qquad (\mu, \nu\ \lambda, = 1. 2. \ \sigma).$$

Činíme však to preto, lebo v prvej práce o reláciach Fuchsových pri takomto predpoklade sú určené druhé relácie Fuchsove. Vypočítame to však v σ—2-och postupoch, lebo pri predpoklade $\mu < \nu < \lambda$, kde sú $\mu, \nu . \lambda = 1. 2. . . \sigma$, $\sigma-2$ bodov môžeme voliť, ako jednu společnu hranicu dvojnásobných integrálov. Pri prvom kroku společný hraničný bod dvojnásobného integrálu je: a_2. Pokiaľ pri tomto kroku integráčna čiara, vzťahujucia sa na x tiahne len medzi singulárnymi body a_1 a a_2, dovtedy integráčna čiara, vzťahujucia sa na premennu z môže tiahnuť medzi singulárnym bodom a_2 a medzi σ—2-ma tamtými singulárnymi body, to jest pri prvom kroku pre promennu z jestvuje σ—2 integráčných čiar a tak dajúc indexom i a k určitého čísla, pri tomto prvom kroku dostaneme

1. (σ—2)

relácií. Pri druhom kroku společný hraničný bod dvojnásobného integrálu je a_3 a tak pokiaľ na premennu x máme 2 integráčne čiary, dovtedy na premennu z máme $\sigma - 3$ integráčných čiar a relácií máme

$$2. (\sigma - 3).$$

Keď takto ďalej pokračujeme, dostaneme, že pri $\mu < \nu < \lambda$ veličina skupiny druhých relácií Fuchsových je:

$$n^2 \sum_{r=1}^{\sigma-2} r(\sigma - r - 1).$$

Právě toľko dostaneme i pri $\mu > \nu > \lambda$, takže pri predpoklade $\mu \lesseqgtr \nu \lesseqgtr \lambda$ všetkých druhých relácií Fuchsových je:

$$2n^2 \sum_{r=1}^{\sigma=2} r(\sigma - r - 1).$$

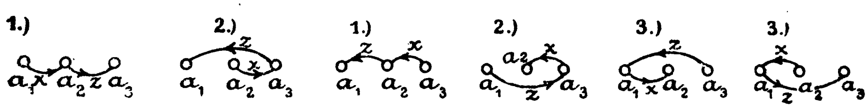
Ale toto číslo je nie úplne, lebo predpoklad $\mu \lesseqgtr \nu \lesseqgtr \lambda$ je primnoho pre druhé relácie Fuchsove, lebo pre tieto je úplne dosť, keď my povieme, že na nich sa má to splniť, aby integračne čiary maly len jedon jediný a to jedon singulárny bod ako společnú hranicu, to jest na integráčne hranice má stát len, že je

$$\mu \neq \nu \neq \lambda \qquad (\mu, \nu, \lambda = 1. 2. \ldots \sigma).$$

Teda pri tomto predpokladu treba zo σ singulárnych bodov tri— tri rôzne body vybrať, soskúpiť a tieto vybraté tri body treba s dvoma integráčnymi čiary spojiť, kde na smer a polohu integráčnych čiar už v odseku VII. 1. ustálenie je v platnosti. Lenže musíme i to do ohľadu brať, že následkom zmeny miesta integráčnych hraníc nové skupiny relácií dostaneme a preto úplna veličina skupiny druhých relácií Fuchsových je:

$$n^2 V_\sigma^3 = n^2 \sigma (\sigma - 1)(\sigma - 2).$$

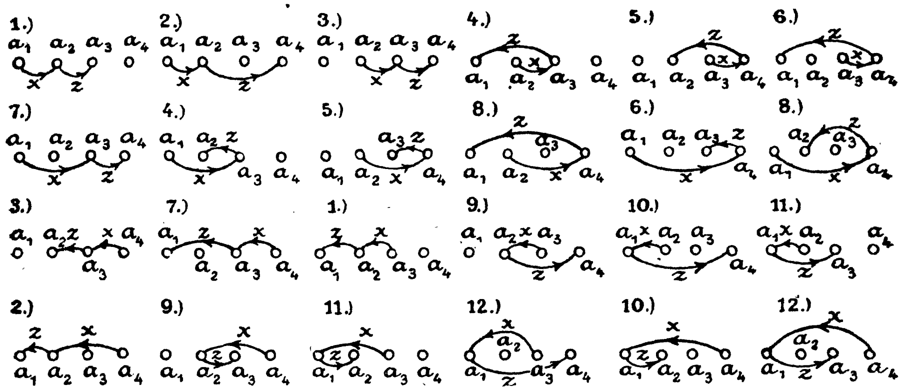
Na pr. pri $\sigma = 3$ všetky integráčne čiary druhých relácií Fuchsových takýto beh budú mať:



Obr. 4.

kde relácie, majucie integráčne čiary, označené tým istým arabským číslom, sú jedno s druhým sdružené a to tak pri tomto, ako i pri nasledujúcom príklade.

Pri $\sigma = 4$ integráčne čiary druhých relácií Fuchsových sú takto vzaté:



Obr. 5.

Medzi fundamentálnymi substituciami, patriacími ku všetkým singulárnym bodom differenciálneho systému kanonického týpu jestvuje istý súvis, (Vid. Schlesinger: Vorlesungen, 13 prednáška), čo vidno i z toho, že fundamentálne substitucie dané sú týmto vzorom :[9])

$$(A_{ik}^{(\mu)}) = u_\mu \int_{x_0}^{x_0} \left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\, dx + \delta_{ik} \right), \qquad (\mu = 1.2 \ldots \sigma)$$

kde u_μ znamená uzavrenú krivku okolo singulárneho bodu a_μ, a $\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)}$ $(\nu = 1.2 \ldots \sigma)$ sú residua, patriace k singulárnemu bodu a_ν. Medzi residu-ami všetkých singulárnych bodov jestvuje pak istý súvis a preto medzi reláciami skupiny (K), tak tiež medzi reláciami skupiny (K') jestvuje jedon—jedon súvis, takže úplna a neodvislá veličina skupiny všetkých druhých relácií Fuschových je:

$$n^2 \, [V_\sigma^3 - 2] = n^2 \, [\sigma(\sigma-1)(\sigma-2) - 2].$$

IX.

Tretia skupina Fuchsových relácií.

Tieto relácie, ktoré pre differenciálne rovnice *n-ho* radu Hirsch[10]) sostavil bol, charakterizuje to, že dvojnásobné integrále majú dve-

[9]) Schlesinger: Vorlesungen str. 229.
[10]) Mathematische Annalen Bd. 54.

dve singulárne body, ako společné hranice a prídeme k ním v prípade differenciálnych systémov nasledovne:

Integrujme rovnicu (C) odsek II. vzhľadom na x od a_μ po a_ν a vzhľadom na z od $a_\varkappa$ po a_λ, kde je $\mu < \nu$, $\varkappa < \lambda$ a $\varkappa < \nu$. Ostanú-li integráčne čiary na jednom brehu rezu, urobeného cez singulárne body $a_1, a_2 \ldots a_\sigma$, vtedy integráčne čiary dvojnásobných integrálov v jednom bode sa pretínajú a preto integrujme tak, že vzťahom na x integrujeme prvé od a_μ po $a_\varkappa$ a potom zase od $a_\varkappa$ po a_ν; vzťahom na z však integrujeme prvé od $a_\varkappa$ po a_ν a potom zase od a_ν po a_λ, to jest jednoduché integrále rozdvojíme takto:

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx = \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dx + \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx$$

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz = \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz + \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz,$$

a vtedy dostaneme, že:

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x,z))\, (Y_{ik}(x)) =$$

$$= \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\, U_{ik}(x,z))\, (Y_{ik}(x)) +$$

$$+ \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x z))\, (Y_{ik}(x)) +$$

$$+ \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x,z))\, (Y_{ik}(x)) +$$

$$+ \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x,z))\, (Y_{ik}(x)),$$

alebo, keď na pravej strane pri prvom a štvrtom člene do ohľadu bereme rovnicu (K) a pri treťom člene zase prvé relácie Fuchsove:

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) = 2\pi\sqrt{-1}\,\{(\delta_{ik}) +$$

$$+ (A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1}\} + \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) +$$

$$+ 2\pi\sqrt{-1}\,\{(\delta_{ik}) + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\}$$

Je však:

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z)\,(Y_{ik}(x)) =$$

$$- \int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\lambda}^{a_\varkappa} dz\,(y_{ik}(z))\,U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) = (0),$$

lebo integráčna čiara, vzťahujucia sa na premennu x na pravej strane v tejto rovnici, súc $\mu < \nu$, tiahne na pravom brehu rezu, ale integráčna čiara vzťahujucia sa na premennu z, súc $\lambda > \varkappa$, tiahne dľa ustálenia sa na smer a polohu integráčnych čiar na ľavom brehu tohoto rezu a tak integráčne čiary dvojnásobného integrálu na pravej strane v tejto rovnici nemajú společných bodov, alo vtedy hodnota tohoto dvojnásobného integrálu dľa prvých relácií Fuchsových je nullou, a preto máme:

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z)\,(Y_{ik}(x)) = -\,4\pi\sqrt{-1}\,(\delta_{ik}) -$$

$$- 2\pi\sqrt{-1}\,\{(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\},$$

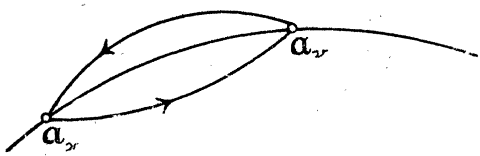
alebo:

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\varkappa} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z)\,(y)\,(Y_{ik}(x)) = 4\pi\sqrt{-1}(\delta_{ik}) +$$

$$2\pi\sqrt{-1}\,\{(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\},$$

kde vzťahom na premennu x, súc $\varkappa < \nu$, integrujeme v kladnom smere na pravom brehu rezu a vzťahom na premennu z, súc $\nu > \varkappa$, integrujeme v kladnom smere na ľavom brehu tohoto rezu.

Prečarujme teraz integráčne čiary vzťahujucie sa na x a na z, to jest, integrujme rovnicu (C) odsek II. ohľadom na premennu x od sing. bodu $a_\varkappa$ po sing. bod a_λ a ohľadom na premennu z zase od sing. bodu a_μ po sing. bod a_ν. Toto integrovanie však, práve tak, ako sme vyššie urobili, rozdvojíme, a to tak, že ohľa-



Obr. 6.

dom na premennu x integrujeme prvé od singulárneho bodu $a_\varkappa$ po sing. bod a_ν a potom od a_ν po singulárny bod a_λ; ohľadom premenny z integrujeme prv od sing. bodu a_μ po singulárny bod $a_\varkappa$ a potom od $a_\varkappa$ po singulárny bod a_ν, tak však dostaneme:

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dx \int_{a_\mu}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) =$$

$$= \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) +$$

$$+ \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) +$$

$$+ \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dx \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) +$$

$$+ \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)).$$

Hodnotu prvého a štvrtého dvojnásobného integrálu, stojáceho na pravej strane môžeme určiť z rovnici (K') a hodnotu tretieho dvojnásobného integrálu určia nám zase prvé relácie Fuchsove, takže:

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dx \int_{a_\mu}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,y))\,(Y_{ik}(x)) = 2\pi\sqrt{-1}\,(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} +$$

$$+ \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x) + 2\pi\sqrt{-1}\,(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}.$$

Je však, ako sme to už vyššie oddôvodnili:

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dx \int_{a_\mu}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) =$$

$$- \int_{a_\lambda}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\mu}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) = (0),$$

preto je:

$$(\mathrm{I}'.)\qquad \int_{a_\nu}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) =$$

$$2\pi\sqrt{-1}\,\{(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\};$$

kde vzťahom na x, súc $\nu > x$, integrujeme v kladnom smere na ľavom brehu rezu a vzťahom na $\varkappa$ zase, súc $\varkappa < \nu$, integrujeme v kladnom smere na pravom brehu tohoto rezu, kde ďalej $(A_{ik}^{(\varkappa)}(\varkappa))$ poťažne $(A_{ik}^{(\nu)}(\nu))$ znamenajú fundamentálne substitucie differenciálneho systému (A), patriace k singulárnemu bodu $a_\varkappa$, poťažne k sing. bodu a_ν.

Veličinu skupiny týchto relácií veľmi snadno môžeme vypočítať, lebo keď my zo σ singulárnych bodov vždy dve-dve vychytíme a tieto raz na pravom brehu a raz zase na ľavom brehu rezu integráčnymi čiaramy spojíme a dľa týchto integrujeme rovnicu (C) odsek II. dostaneme jednu (J) skupinu týchto tretích relácií Fuchsových, ale keď zase miesta dvoch-dvoch singulárnych bodov, vychytivších zo σ singulárnych bodov, zmeníme, dostaneme druhú (J') skupinu týchto relácií, ktoré k prvým patria, s týma sú sdružené, takže úplna veličina všetkých tretích relácií Fuchsových je:

$$n^2 V_\sigma{}^2 = n^2 \sigma\,(\sigma - 1),$$

pre súvis medzi fundamentálnymi substituciami, patriacimi ku všetkým singulárnym bodom, sú medzi týmito $2n^2$ relácie závislé, a tak neodvislých tretích relácií Fuchsových máme:

$$n^2 [\sigma(\sigma-1) - 2].$$

Súhrn Fuchsových relácií, patriacich k differenciálnemu systému kanonického typu.

Fuchsove relácie, patriace k prvej, druhej a tretej skupine môžeme jedným vzorom takto označiť:

$$\text{(L)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) =$$

$$= \begin{cases} (0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{keď } \mu \neq \lambda \neq \nu \neq \varkappa \\ 2\pi\sqrt{-1}\,\{(\delta_{ik}) + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\} \quad \ldots & \text{,, } \mu \neq \lambda \neq \nu \neq \varkappa \\ 2\pi\sqrt{-1}\,\{(2\delta_{ik}) + (A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1}\} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\} & \text{,, } \mu = \lambda \neq \nu = \varkappa \end{cases}$$

a týmto zodpovedajucie, sdružené relácie sú zase:

$$\text{(L')} \qquad \int_{a_\lambda}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\nu}^{a_\mu} dz\, (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) =$$

$$= \begin{cases} (0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{keď } \mu \neq \lambda \neq \nu \neq \varkappa; \\ 2\pi\sqrt{-1}\,(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1} \quad \ldots\ldots & \text{,, } \mu \neq \lambda \neq \nu \neq \varkappa; \\ 2\pi\sqrt{-1}\,\{(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\} & \text{,, } \mu = \lambda \neq \nu = \varkappa. \end{cases}$$

Úplny počet týchto všetkých, neodvislých relácií je však:

$$n^2\sigma(\sigma-1) + n^2[\sigma(\sigma-1)(\sigma-2) - 2] + n^2[\sigma(\sigma-1) - 2] =$$
$$= n^2[\sigma^2(\sigma-1) - 4].$$

*

Les relations de Fuchs pour les systèmes différentiels linéaires et le nombre de leurs termes.

(Extrait de l'article précédent.)

L. Fuchs[1]) a déduit, du théorème d'Abel-Jacobi relatif à l'échange du paramètre et de l'argument, pour les équations différentielles linéaires certaines relations qui sont analogues aux relations que Weierstrass avait obtenues, prenant pour point de départ le théorème concernant les transcendantes hyperelliptiques de la

[1]) Crelle's Journal, t. 76., p. 177; Werke I. (1904) p. 415; Sitzungsberichte der Berliner Akad. 1892; Werke III. (1901) p. 141.

3^e espèce, pour les périodes des intégrales de la première et de la deuxième espèce. Schlesinger[2]) généralisa le theorème d'Abel-Jacobi en le joignant aux relations de Fuchs, et Hirsch,[3]) à son tour, se basant sur ce théorème généralisé, donna aux relations de Fuchs une forme plus générale.

L'auteur de l'article précédent, poursuivant les travaux de Schlesinger, se sert des résultats qui viennent d'être mentionnés pour déduire les relations de Fuchs généralisées pour les systèmes différentiels linéaires. Il part des systèmes du type fuchsien, en particulier de ces qui sont absolument canoniques, et arrive, en tirant profit d'une remarque de Schlesinger concernant l'échange de l'argument et du paramètre, à une équation différentielle linéaire (équation de matrice), où l'on différentie par rapport à l'argument et le paramètre (équation C de l'article). On peut déduire de cette équation les relations de Fuchs pour les systèmes différentiels linéaires en supposant que les racines des équations fondamentales appartenant au système donné sont toutes distinctes et que leur partie réelle appartient à l'intervalle $(-1, 0)$. Il s'ensuit de cette supposition qu'il en est de même des racines des systèmes différentiels adjoints au système donné. En faisant cette supposition pour les systèmes généraux d'intégrales du système donné et de son système adjoint, on aboutit à certaines identités (alinéa IV.). En faisant emploi de ces identités, on déduit, de l'équation (C), les premières relations de Fuchs en l'intégrant par rapport à l'argument et le paramètre entre deux et deux points singuliers du système, les chemins d'intégration ne se coupant pas. On arrive par là à la formule (L) de l'article pour le cas ou $\mu \neq \lambda \neq \nu \neq \varkappa$, et $\mu, \lambda, \nu, \varkappa = 1, 2, \ldots \sigma$ sont les indices de la lettre qui désigne les points singuliers du système différentiel. (y_{ik}) est la matrice intégrale du système donné et $(Y_{ik}(x)) = \frac{(Y_{ik}(x))^{-1}}{\varphi(x)}$. $U_{ik}(x, z)$ est une fonction rationnelle entière des variables x et z de l'ordre $\sigma-2$ au plus, σ désignant le nombre des points singuliers désignés par les lettres a_μ, a_ν, $a_\varkappa$, a_λ.

Pour simplifier, choisissons les points singuliers de manière qu'on puisse les joindre par une courbe ne se coupant pas. On intègre de sorte que le chemin d'intégration soit situé à droite de cette courbe tant que $\mu < \nu$, ou bien $\varkappa < \lambda$, mais qu'il passe de l'autre côté dès que $\mu > \nu$, ou bien $\varkappa > \lambda$.

Les premières relations de Fuchs on été déduites, par les auteurs cités, pour $\mu \gtrless \nu \gtrless \varkappa \gtrless \lambda$; l'auteur de l'article actuel les a calculées pour $\mu \neq \nu \neq \varkappa \neq \lambda$; on obtient ainsi leur nombre complet.

---

[2]) Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen, II., chap. XII.

[3]) Mathematische Annalen, 54., p. 202.

On obtient le second groupe de relations de Fuchs en intégrant l'équation (C) parr apport à l'argument et le paramètre de sorte que les chemins d'intégration se rencontrent en un point singulier. On décompose les chemins d'intégration, pris entre deux et deux points singuliers, en deux parties là où figurent des dérivées sous le signe d'intégration; après quoi on passe à la limite et on réussit à réduire les intégrales doubles à des intégrales simples (équations G et G'). On obtient l'équation (G') de la même manière que l'équation (G) en échangeant simplement les chemins d'intégration par rapport à l'argument et le paramètre.

On intègre ensuite l'identité (16) par rapport à l'argument et le paramètre entre les limites qui figurent dans les intégrales simples des équations (G) et (G'), et on passe à la limite sous les mêmes conditions qu'on a supposées dans les équations (G) et (G'); on obtient, en employant la substitution (18), des intégrales définies, dont on calcule aisément les valeurs, à l'aide des intégrales d'Euler et de la formule d'Euler. C'est ainsi qu'on obtient les équations des matrices (H) et (H'), dans lesquelles figurent, à côté des quantités connues, encore les éléments de la substitution et de son inverse, ainsi que les racines des équations fondamentales appartenant aux points singuliers. On détermine ensuite les substitutions fondamentales données par les formules (L), (L') pour $\mu \neq \lambda \neq \nu \neq \varkappa$, où $A_{ik}^{(\nu)}$ sont les substitutions fondamentales appartenant au point singulier a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots \sigma$) et $\delta_{ik} = 1$ (0), si $i = k$ ($i \neq k$).

On peut calculer le nombre de ces secondes relations conjuguées de Fuchs pour $\mu \gtrless \nu \gtrless \lambda$ en procédant par $\sigma - 2$, mais ce nombre n'est pas complet. On obtient le nombre complet et indépendant, en se bornant à la supposition $\mu \neq \nu \neq \lambda$ et en tenant compte de la liaison qui existe entre les substitutions fondamentales appartenant à tous les points singuliers du système différentiel.

Le troisième groupe de relations de Fuchs est caractérisé par ce fait que les intégrales doubles, prises par rapport à l'argument et au paramètre, ont, pour limites communes, deux points singuliers; on y arrive en intégrant l'équation (C) par rapport à la variable x à partir du point singulier a_μ au point singulier a_ν, et par rapport à z du point $a_\varkappa$ au point a_λ, où $\mu < \nu$, $\varkappa < \lambda$, $\varkappa < \nu$ ($\mu, \nu, \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma$). Dans cette intégration, les intégrales simples peuvent être décomposées de sorte qu'on intègre par rapport à x d'abord entre a_μ et $a_\varkappa$, et ensuite entre $a_\varkappa$ et a_ν; par rapport à z d'abord entre $a_\varkappa$ et a_ν, ensuite entre a_ν et a_λ. C'est ainsi qu'on obtient, si l'on tient compte des deux premiers groupes de relations de Fuchs et du chemin d'intégration, le troisième groupe de relations de Fuchs (J), (J'). Le nombre de relations de ce groupe peut être facilement calculé, si l'on choisit deux à deux points singuliers distincts, et que l'on les permute. Les trois groupes de relations de Fuchs sont compris dans les formules (L), (L').

Le nombre complet de toutes ces relations indépendantes est donné par l'expression:

$$n^2 \, [\sigma^2 \, (\sigma - 1) - 4].$$

Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném.

Napsal Dr. *Václav Hlavatý.*

1. Pěti body, které neleží v témž trojrozměrném prostoru, je určen prostor čtyřrozměrný. Tři z nich určují rovinu π a dva zbývající přímku C, která π neprotíná. Je-li v tomto čtyřrozměrném prostoru dán bod a, tu rovina $\varphi \equiv (C\, a)$ protíná průmětnu π v bodě a_1, který nazývám prvým průmětem bodu a. Promítám-li tentýž bod a z úběžnice Γ roviny ξ, totálně kolmé ku π, tu rovina $(\Gamma\, a)$ protíná π v bodě a_2, který nazývám druhým průmětem bodu a. Jsou-li útvary C a π v prostoru pevně stanoveny, pak body a_1 resp. a_2 je bod a dokonale určen, neboť roviny $(C\, a_1) \equiv (C\, a) \equiv \varphi$ a $(\Gamma a_2) \equiv (\Gamma a) \equiv \xi$ protínají se v bodě a. Ježto lineární prostory nula až trojrozměrné určeny jsou jedním až čtyřmi body, jest tím úloha promítání útvarů v prostoru čtyřrozměrném z přímky C na rovinu $\bar{r}$ zásadně rozřešena.

2. Rovinu papíru považuji za průmětnu π, na kterou promítnu z přímky Γ přímku C. Ježto přímky C a Γ určují prostor*) $\mathfrak{L}$, je druhým průmětem přímky C opět přímka $C_2 \equiv (\mathfrak{L}\, \pi)$. Promítací paprsky všech bodů c přímky C jsou kolmé ku π a tvoří hyperbolický paraboloid, určený přímkami (C, C_2, Γ). Distance jednotlivých bodů a od průmětny π určeny jsou v prostoru délkami $d = \overline{cc_2}$. Považuji-li osu do mimoběžek C a C_2 za osu z souřadného systému trojrozměrného prostoru, přímku C_2 za osu Y téhož systému, pak hyperbola $x^2 - y^2\, tg^2\, \alpha = d_0{}^2$ je geometrickým místem druhých koncových bodů úseček d, z bodů c_2 kolmo ku C_2 nanášených. Při tom α je úhel přímky C s průmětnou π. Budu vždy předpokládati $\alpha = 45$, tedy hyperbolu $x^2 - y^2 = d^2_0$. Nazývám ji hyperbolou distanční. Stanovím-li průsečík c přímky C s naším prostorem, je tím přímka C čtyřznačně určena. Neboť všechny přímky C, hovící shora zmíněným podmínkám (aby $\alpha = 45$, aby měly tutéž distanční hyperbolu H a aby jejich druhý průmět byl C_2), vyplňují v prostoru $(C_2\, \Gamma)$ rotační hyperbolod, který je protat kolmicí v našem prostoru

*) Trojrozměrný prostor krátce nazývám prostorem.