Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Antonín Libický

Gravitační poloměr v obecné theorii relativnosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 3, 281--291

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121638

quelconque des points d'un de ces groupes, soit (Z'_i), correspond à un quelconque des points d'inflexion de la courbe C^3 dans une correspondance univoque E', pour laquelle $E'^3 \equiv E$; les points du deuxième groupe (Y_i) ont la même propriété par rapport aux correspondances inverses. Si la correspondance donnée est cyclique au n-ième degré, E_n, les points de contact de la courbe directrice de cette correspondance déterminent, avec un point d'inflexion quelconque de la courbe C^3, une correspondance cyclique E_{3n}. Ces points de contact sont tous des points caractérisés par la propriété projective d'être des points où la C^3 a un contact de l'ordre $3n$-1 avec des courbes de l'ordre n.

4. Il existe, sur la courbe générale de genre 1, une infinité simple de groupes G_{18} de transformations univoques, composés de huit correspondances univoques de la deuxième espèce, cycliques au troisième degré, et de neuf involutions de la première espèce. Si l'on applique à un point T_1 quelconque de la courbe le groupe G_9 des huit correspondances cycliques de la deuxième espece, on obtient un groupe (T_i) de neuf points, invariable par rapport à un groupe G_{18}, celui qui contient, outre ces correspondances cycliques, les neuf involutions de la première espèce déterminées par les couples de points T_1, T_k $(k = 1, 2, \ldots, 9)$. Si l'on transforme ce groupe (T_i) par les trois involutions univoques de la deuxième espèce qui existent sur la courbe, on obtient trois groupes (U_i), (V_i), (W_i) à neuf points, invariables, eux aussi, par rapport au même groupe G_{18}. Toute involution rationnelle g_3^2, produite sur une courbe elliptique, se reproduit par un tel groupe G_{18} de transformations univoques, et, réciproquement, tout groupe tel que G_{18} reproduit quatre involutions rationnelles g_3^2. Les points triples de ces quatre involutions forment les groupes (T_i), (U_i), (V_i), (W_i) mentionnés ci-dessus, dont chacun est invariable par rapport au groupe G_{18}.

Gravitační poloměr v obecné theorii relativnosti.

Napsal ředitel *Ant. Libický.*

V obecné theorii relativnosti má zvláštní důležitost veličina, která se zove *poloměrem gravitačním*. Vyskytuje se při přibližném řešení základních rovnic

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \qquad (1)$$

pro zvláštní pole gravitační, o němž platí tyto podmínky:

1. Pole jest statické, t. j. nemění se časem; tudíž všechny složky jeho jsou nezávislé na souřadnici $x_4 = ct$.

2. Pole jest prostorově souměrné dle počátku souřadnic, v němž si myslíme soustředěnou hmotu vytvořující pole gravitační; platí tedy pro ně rovnice

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= -\delta^{\nu}_{\mu} - \frac{\alpha x_\mu x_\nu}{r^3} \text{ (pro } \mu = \nu = 1, 2, 3) \\ g_{\mu 4} &= g_{4\nu} = 0, \; g_{44} = 1 - \alpha/r, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{kde } \delta^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 1 \text{ pro } \mu = \nu \\ 0 \text{ pro } \mu \neq \nu. \end{cases}$$ [2])

3. Složky rychlosti pohybujícího se bodu hmotného jsou malé vzhledem k rychlosti světla c; lze tedy položiti součiny jejich $\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$ (pro $\mu = \nu = 1, 2, 3$) rovny nule.

4. V nekonečnu veličiny $g_{\mu\nu}$ rovnají se nule vyjímaje tyto čtyři $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = 1$ (vlastně c^2 pro $c = 1$), což jsou hodnoty specielní theorie relativnosti.

Veličina α, vyskytující se ve vzorcích (2) pro $g_{\mu\nu}$ jako stálý koeficient zlomků $\frac{x_\mu x_\nu}{r^3}$ a ve výraze pro g_{44}, jest právě poloměr gravitační.

1. *Einstein* uvádí též,[3]) jak lze hodnotu tohoto poloměru vypočítati. Za tou příčinou srovnává hodnotu gravitačního potenciálu V dle theorie Newtonovy s hodnotou jeho, která plyne přibližně z theorie relativnosti. Dle první theorie jest potenciál hmoty M soustředěné v počátku souřadnic pro bod, jehož vzdálenost od počátku jest r, dán výrazem

$$V = \frac{k^2 M}{r}, \tag{3}$$

kde k^2 značí konstantu gravitační, rovnou $6{\cdot}675 \,.\, 10^{-8} cm^3 g^{-1} sec^{-2}$. V aproximaci obecné theorie relativnosti, jež vede k theorii Newtonově (vynecháme-li v příslušných vzorcích také malé veličiny prvého stupně $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$) vychází pro týž potenciál hodnota

$-\frac{g_{44}}{2}$.[4])

---

[1]) Viz moje pojednání „Pohyb hmotného bodu v poli gravitačním dle všeobecné theorie relativnosti" v 50. ročníku tohoto časopisu, str. 140, vzorec (6). Poznamenává se, že souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4 tam zavedené jsou zcela obecné parametry (Gaussovy křivočaré souřadnice), jimiž se stanoví poloha bodu v prostoru.

[2]) ibid., str. 142. a násl. (II. případ z uvedených tam aproximací).

[3]) Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, vyd. z r. 1916, str. 59. a 60.

[4]) Viz moje pojednání, str. 144. pod čarou.

Dle rovnice (2) jest $g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r}$; avšak tato hodnota platí pro $c = 1$. Neužijeme-li pro rychlost světla této zvláštní hodnoty, jest $g_{44} = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$[5])

a tedy

$$V = -\frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = -\frac{c^2}{2} + \frac{\alpha c^2}{2r}. \tag{4}$$

Vzhledem k tomu, že složky síly, způsobené danou hmotou M v určitém bodě, jsou dány známými výrazy $X = \frac{\partial V}{\partial x}$ atd., můžeme na pravé straně rovnice (4) konstantu $-\frac{c^2}{2}$ vynechati. Pak vychází z rovnic (3) a (4)

$$\frac{k^2 M}{r} = \frac{\alpha c^2}{2r}$$

z čehož

$$\alpha = \frac{2k^2 M}{c^2}.\text{[6])} \tag{5}$$

Má-li hmota vytvořující pole gravitační tvar koule o poloměru a a o stejné hustotě μ_0, bude $M = 4/3\, \pi a^3 \mu_0$; tudíž

$$\alpha = \frac{8\pi k^2}{3c^2} \mu_0 a^3, \tag{5a}$$

aneb, klademe-li $\frac{8\pi k^2}{3c^2} = \varkappa = 2{\cdot}071 \,.\, 10^{-48} g^{-1} cm^{-1} sec^2$,

též

$$\alpha = \frac{\varkappa c^2}{3} \mu_0 a^3. \tag{5b}$$

Rozměr veličiny α jest dle (5) $\frac{cm^3 g^{-1} sec^{-2} . g}{cm^2 sec^{-2}}$ (ježto rozměr konstanty gravitační jest $cm^3 g^{-1} sec^{-2}$ a rozměr rychlosti c jest $cm\, sec^{-1}$) čili cm; tudíž α jest délkou.

---

[5]) V mém uvedeném pojednání nebylo na tuto okolnost upozorněno.

[6]) Einstein a jiní dávají Newtonovu potenciálu V znaménko záporné ve shodě s theoriemi elektrickými a magnetickými, v nichž potenciál síly přitažlivé se označuje záporně. Pak se musí také psáti pro V výraz $\frac{g_{44}}{2}$ místo $-\frac{g_{44}}{2}$.

Z nalezených vzorců plyne, že gravitační poloměr α jest závislý na hmotě M.

Pro hmotu $M = 1\,g$ jest $\alpha_1 = \frac{2k^2}{c^2} = 1{\cdot}48\,.\,10^{-28}\,cm$, tudíž nalézáme pro α též hodnotu

$$\alpha = 1{\cdot}48\,.\,10^{-28}\,M. \tag{5 c}$$

Pro naši Zemi jest $M_{♁} = 6{\cdot}021\,.\,10^{27}\,g$, pročež $\alpha_{♁} = 0{\cdot}891\,cm$ čili přibližně 9 *mm*.

Pro Slunce jest $M_{\odot} = 333430\,M_{♁} = 2{\cdot}008\,.\,10^{33}\,g$, pročež $\alpha_{\odot} = 2{\cdot}97\,km$, přibližně 3 *km*.

Ze vzorce (5 *c*) vychází též, že $\alpha = 1$ pro hmotu $M = 0{\cdot}67\,.\,10^{28}\,g$

Lze však dáti gravitačnímu poloměru ještě jiný význam. Jelikož dle (5)

$$\alpha/2 = \left(\frac{k}{c}\right)^2 M,$$

můžeme tuto veličinu pokládati za jakousi hmotu, jež souvisí touto rovnicí s hmotou M; pak zove se $\frac{\alpha}{2}$ též *gravitační hmotou* a znamená se m. Tedy $2\alpha = m$ a

$$1 - \frac{\alpha}{r} = 1 - \frac{2m}{r} \quad \text{což označíme } \gamma.\text{[7]} \tag{6}$$

Důležitost tohoto výrazu poznáme níže.

2. Ukážeme nyní, že rychlost bodu hmotného, který se pohybuje radiálně, t. j. ve směru průvodiče r, se rovná nule v bodě, daném hodnotou $r = \alpha$.

Užijeme k tomu rovnice Schwarzschildovy pro ds^2,[8]) která platí pro případ, že splněny jsou výše uvedené čtyři podmínky o poli gravitačním. Rovnice ta zní:

$$ds^2 = -\frac{1}{1 - \alpha/r}\,dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + c^2 (1 - \alpha/r)\, dt^2, \tag{7}$$

značí-li r, ϑ, φ známé souřadnice polárné a t dobu v sec.

Výraz na pravé straně lze rozvrhnouti v část prostorovou, danou vzorcem

$$d\sigma^2 = \frac{1}{1 - \alpha/r}\,dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \tag{8}$$

a část časovou $c^2 (1 - \alpha/r)\, dt^2$.

---

[7]) Eddington: „Space, Time and Gravitation“, franc. překlad od J. Rossignola, str. 121. a násl.

[8]) Schwarzschild: „Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie“ (Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften), 1916, str. 194, vzorec (14) s malou změnou.

Tudíž $$ds^2 = -d\sigma^2 + c^2(1 - a/r)\,dt^2. \qquad (7a)$$

Omezme se nejprve na pohyb hmotného bodu v rovině ekvatoriální, dané podmínkou $\vartheta = \pi/2$; jest však poznamenati, že tu jde o rovinu v prostoru neuklidovském. Na takové rovině platí, jak ukázal *Flamm*, táž geometrie jako v Euklidově prostoru na ploše 4. stupně, která vzniká rotací paraboly $z^2 = 8\,m\,(r - 2\,m)$ kolem její přímky řídicí (osy Z-ové).[9])

Pro rovinu ekvatoriální bude $d\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = 1$, tudíž

$$ds^2 = -\frac{1}{1 - a/r}\,dr^2 - r^2 d\varphi^2 + c^2\left(1 - \frac{a}{r}\right)dt^2. \qquad (7b)$$

Kdybychom položili v této rovnici $a = 2\,m$ rovno nule, obdržíme $\gamma = 1 - \frac{a}{r} = 1$; substitucí vychází

$$ds^2 = -dr^2 - r^2\,d\varphi^2 + c^2 dt^2, \qquad (7c)$$

což jest výraz pro ds v prostoru Euklidově. Srovnávajíce výrazy $(7b)$ a $(7c)$ seznáme, že diferenciál oblouku v prostoru Euklidově jest jen zvláštním případem (pro $m = 0$) diferenciálu v prostoru Riemannově; pro tento prostor má gravitační hmota m hodnotu větší než nula. Lze pak říci, že veličinou m měří se intensita rušivého působení hmoty M na pole metrické obecné theorie relativnosti.

Přejdeme-li nyní od pohybu rovinného k pohybu radiálnímu (na přímce ve smyslu geometrie neeuklidovy), stanovíme polohu bodu průvodičem r; tedy φ jest stálá souřadnice a $d\varphi = 0$. Pak změní se rovnice $(7\,b)$ v

$$ds^2 = -\frac{1}{1 - \frac{a}{r}}\,dr^2 + c^2\left(1 - \frac{a}{r}\right)dt^2, \qquad (7d)$$

pročež $$d\sigma^2 = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}\,dr^2. \qquad (8a)$$

Hledaná rychlost hmotného bodu dána jest vzorcem

$$v = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dr}\,\frac{dr}{dt}. \qquad (9)$$

---

[9]) „Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie", Physik. Zeitschrift, 1916, str. 448.

Pro $\frac{d\sigma}{dr}$ dostaneme z rovnice (8a) výraz

$$\left(\frac{d\sigma}{dr}\right)^2 = \frac{1}{1 - \alpha/r}; \tag{10}$$

hodnotu $\frac{dr}{dt}$ stanovíme pak takto:

Z rovnice (7d) nalezneme dělíce dt^2

$$\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

čili

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 (1 - \alpha/r)^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{11}$$

Jest ještě určiti hodnotu $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$; k tomu použijeme čtvrté rovnice (1), totiž

$$\frac{d^2x_4}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma^4_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \tag{12}$$

Souvislost mezi souřadnicemi x_1, x_2, x_3 a polárními r, ϑ, φ jest dána rovnicemi

$$x_1 = r,\ x_2 = \vartheta,\ x_3 = \varphi;$$

k nim připojíme $x_4 = t$.

Předpokládajíce případ zcela obecný (prostorový) píšeme dle (7)

$$g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}},\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2 \sin^2 \vartheta,$$

$$g_{44} = c^2 (1 - \alpha/r);$$

ostatní $g_{\mu\nu}$ (pro $\mu \neq \nu$) jsou rovny nule.

Determinant $|g_{\mu\nu}|$ má hodnotu $g = -c^2 r^4 \sin^2 \vartheta$. Pro veličiny $g^{\mu\nu}$ (= podřízeným determinantům v $|g_{\mu\nu}|$ ke $g_{\mu\nu}$, děleným g) se stejnými indexy nabýváme vzorce

$$g^{\mu\mu} = \frac{1}{g_{\mu\mu}}\ (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

Nyní lze vypočítati hodnoty veličin $\Gamma^4_{\mu\nu}$; k tomu užijeme vzorce

$$\Gamma^4_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{4\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{13}$$ [10]

[10]) Moje pojednání na str. 140., vzorec (5).

Přejdeme-li opět k pohybu radiálnímu, volme za osu souřadnicovou X_1 přímku, na níž bod se pohybuje; pak $x_1 = r$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$,

$$\frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_3}{ds} = 0,$$

a rovnice (12) se změní v

$$\frac{d^2x_4}{ds^2} = \Gamma^4_{11}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^4_{41}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_4}{ds} + \Gamma^4_{44}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2.$$

Jest tudíž třeba znáti jen veličiny Γ^4_{11}, Γ^4_{41}, Γ^4_{44}; ze vzorce (13) obdržíme pro ně výrazy

$$\Gamma^4_{11} = \Gamma^4_{44} = 0 \qquad \text{a} \qquad \Gamma^4_{41} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial r}.$$

Kladouce tyto hodnoty do poslední rovnice a spolu $x_4 = t$, dostaneme

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial r}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}.$$

Rovnici té lze dáti též tvar

$$\frac{\frac{d^2t}{ds^2}}{\frac{dt}{ds}} = -\frac{dg_{44}}{g_{44}ds} \text{ čili } \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{ds\frac{dt}{ds}} = -\frac{dg_{44}}{g_{44}ds}$$

nebo

$$\frac{d\,lg\frac{dt}{ds}}{ds} = -\frac{d\,lg\,g_{44}}{ds}.$$

Integrací vychází

$$lg\frac{dt}{ds} = lg\,A - lg\,g_{44},$$

kde $lg A$ jest konstanta integrační.

Z této rovnice plyne

$$lg\,g_{44}\frac{dt}{ds} = lg\,A$$

čili

$$g_{44}\frac{dt}{ds} = A;$$

ježto $g_{44} = c^2 (1 - \alpha/r)$, nabudeme konečně

$$\frac{dt}{ds} = \frac{A}{c^2 (1 - \alpha/r)}$$

a zvratná hodnota

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c^2 (1 - \alpha/r)}{A}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (11), vypočítáme

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \frac{c^4 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^3}{A^2}$$

nebo

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 \left[1 - \frac{c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}{A^2}\right].$$

Ze vzorce (9) dostáváme pak

$$v^2 = \frac{1}{1 - \alpha/r}\, c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 \left[1 - \frac{c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}{A^2}\right]$$

nebo

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left[1 - \frac{c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}{A^2}\right],$$

tudíž

$$v = c \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}. \tag{9a}$$

Prvním činitelem na pravé straně $c \sqrt{1 - \dfrac{\alpha}{r}}$ stanovena jest rychlost světla v bodě daném průvodičem r.

Položíme-li v této rovnici $r = \alpha$, vychází $v = 0$.[11])

Pro všechny směry průvodičů, vycházejících z počátku souřadnic, jest geometrické místo bodů o rychlosti nulové plocha kulová jejíž poloměr $= \alpha$ (povrch *koule gravitační*). Na této ploše

---

[11]) Po druhé bude $v = o$, jestliže $r = \dfrac{\alpha c^2}{c^2 - A^2}$, kterýž průvodič jest závislý též na konstantě A. Podrobný rozbor všech případů podává Bauer ve spise „Mathematische Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins"; str. 68. a násl.

končí hybné body svůj pohyb; také rychlost světla jest na ní rovna nule. Jest zřejmo, že na naší zemi experimentální potvrzení tohoto výsledku není možné, ježto gravitační poloměr země má velikost velmi malou.

Kouli gravitační lze pokládati za euklidovský obraz bodu, v němž soustředěna jest hmota M. Na povrchu jejím můžeme si mysliti rozloženou hmotu vytvořující pole gravitační (na př. hmotu země); takovou koulí zastoupen jest celý útvar co do účinků gravitačních.

3. V předcházejícím jsme předpokládali, že pole gravitační vzniká hmotným bodem (nebo jeho eukl. obrazem); případ složitější nastává, jestliže gravitační pole způsobuje koule z tekutiny o stálé hustotě μ_0. Problém ten řešil Schwarzschild v pojednání „Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler[12]) Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie“ (Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften, 1916, str. 424.—434.).

Dle jeho odvození lze od gravitačního pole hmotného bodu přejíti ke gravitačnímu poli uvnitř tekuté koule, jestliže v rovnici (8) pro $d\sigma^2$ píšeme v prvním členu na pravé straně místo $g_{11} = \frac{1}{1 - a/r}$ výraz $\frac{1}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}$, kde R značí veličinu zvanou poloměrem zakřivení sférického prostoru. Veličina ta jest positivní.[13]) Bude tedy platiti vzorec

$$d\sigma^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2. \tag{14}$$

Položíme-li v této rovnici

$$r = R \sin \varrho$$

s podmínkou $r < R$, bude $dr = R \cos \varrho \, d\varrho$ a $1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \cos^2 \varrho$, tudíž

$$d\sigma^2 = R^2 (d\varrho^2 + \sin^2 \varrho \, d\vartheta^2 + \sin^2 \varrho \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2), \tag{14a}$$

což jest známý vzorec pro prvek obloukový v geometrii prostoru sférického.

Lze tedy říci: Uvnitř tekuté koule platí neeuklidova geometrie prostoru sférického; vně koule zůstávají v platnosti tytéž zákony,

---

[12]) Dle theorie relativnosti není žádných nestlačitelných tekutin, jako není těles tuhých.

[13]) Podotýká se, že tento sférický prostor jest právě způsoben tekutou koulí; neboť dle theorie relativnosti prostor, v němž není žádné hmoty, jest Euklidův, a ten hmotou mění se v prostor sférický (nebo eliptický).

jaké platí pro pole gravitační, vytvořené hmotným bodem. Pro povrch tekuté koule (na kterém hydrostatický tlak p se rovná nule) obdržíme $g_{11} = \frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^2}$, značí-li a poloměr koule; vně koule bude $g_{11} = \frac{1}{1-\frac{a^3}{R^2}\frac{1}{r}}$.

Srovnáme-li poslední výraz se zlomkem $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}}$, dostaneme

$$\alpha = \frac{a^3}{R^2}. \tag{15}$$

Jest zřejmo, že gravitační poloměr α jest menší než a; jestliže tedy dle této rovnice

$$\alpha R^2 = a^3 = a \cdot a^2,$$

bude kladouce na pravé straně za a menší hodnotu α

$$\alpha^2 < R^2 \text{ čili } \alpha < R.$$

Ježto musí býti přechod z prostoru vnějšího do vnitřního nepřetržitý, budou se na povrchu koule hodnoty $\frac{2k^2M}{c^2}$ (vzorec 5 pro α) a $\frac{a^3}{R^2}$ sobě rovnati, pročež

$$\frac{2k^2M}{c^2} = \frac{a^3}{R^2}$$

z čehož

$$\frac{1}{R^2} = \frac{2k^2M}{c^2a^3}. \tag{16}$$

čili

$$R = c\sqrt{\frac{a^3}{2k^2M}}. \tag{16a}$$

Hmota tekuté koule $M = 4/3\,\pi a^3 \mu_0$, pročež též

$$R = c\sqrt{\frac{3}{8\pi k^2 \mu_0}};$$

zavedeme-li v tomto vzorci konstantu

$$\varkappa = \frac{8\pi k^2}{c^4} = 2{\cdot}071 \,.\, 10^{-48} g^{-1}\, cm^{-1}\, sec^{-2}$$

obdržíme konečně

$$R = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{3}{\varkappa \mu_0}}. \qquad (16b)$$

Pro tekutou kouli velkou jako slunce, jehož střední hustota $\mu_0 = 1{\cdot}4\, g\, cm^{-3}$, bude dle tohoto vzorce $R = 3{\cdot}5 \,.\, 10^{13}\, cm$. Poloměr slunce jest $6{\cdot}95 \,.\, 10^{10}\, cm$, tudíž poloměr zakřivení sférického prostoru jest v tomto případě 500krát větší než poloměr slunce. Tudíž tekutá koule nevyplňuje celého sférického prostoru, nýbrž jest jen částí jeho. Úhel ϱ má mezní hodnotu $\varrho_a = arc\, sin \frac{a}{R}$ a nedosahuje velikosti $\pi/2$.

Pro tuto mezní hodnotu ϱ_a nalezneme, rozvedeme-li $arc\, sin \frac{a}{R}$ v konvergentní řadu, vzorec

$$\varrho_a = \frac{a}{R} + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{R}\right)^3 + \frac{1}{40}\left(\frac{a}{R}\right)^5 + \ldots;$$

hodnota ta jest jen o málo větší než $\frac{a}{R}$.

Pro α obdržíme pak hodnotu

$$\alpha = \frac{a^3}{R^2} = \frac{2\,k^2 M}{c^2}$$

vzhledem k rovnici (16). Gravitační hmota bude v tomto případě

$$m = \frac{\alpha}{2} = \frac{\varkappa\, c^2 \mu_0\, a^3}{6},$$

tedy dle (5b) táž, jako pro hmotu soustředěnou v bodě počátečním.

*

Rayon de gravitation dans la théorie de la relativité généralisée.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur fait voir, d'abord, comment on calcule la valeur du rayon de gravitation d'Einstein. Il explique ensuite ce que signifie ce rayon dans le changement de l'espace euclidéen en l'espace de Riemann qui se produit sous l'influence d'une masse; il fait l'étude des principales propriétés de la sphère de gravitation. Il étudie, enfin, le cas du champ de gravitation engendré par une sphère liquide à masse constante.