Bohumil Machytka

Některé vztahy a grupy biracionálních transformací na obecné rovinné křivce rodu 1. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 3, 272--281

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121637

Některé vztahy a grupy biracionálních transformací na obecné rovinné křivce rodu 1.

Napsal Dr. *Boh. Machytka.*

II.

Na obecné algebraické rovinné křivce C^n rodu 1 buďtež dány dva obecně zvolené body X_1, X_4. Jest určiti takovou jednojednoznačnou korespondenci druhého druhu E, jejíž třetí mocnina E^3 převádí bod X_1 v X_4, t. j. která vyhovuje vztahu

$$X_1 \ldots (E) \ldots X_2 \ldots (E) \ldots X_3 \ldots (E) \ldots X_4.$$

Předpokládejme, že známe bod X_2 a tím i hledanou korespondenci E. Poněvadž každá involuce g_2^1 převádí bodový pár X_1, X_2 transformace E v body, které si v opačném pořádku odpovídají v téže transformaci E, převádí involuce g', určená bodovým párem X_1, X_4, bodový pár X_2, X_1 v body X_3, X_4. Máme tedy v involuci g' ekvivalentní bodové páry $(X_1, X_4) \equiv (X_2, X_3)$. Z téhož důvodu převádí involuce g'', určená bodovým párem X_1, X_3, bod X_2 sám v sebe. Bod X_2 jest tedy dvojným bodem involuce g'', takže jest $(X_1, X_3) \equiv (X_2, X_2)$.

Na uvažované křivce C^n vytkněme úplnou lineární soustavu bodovou g_3^2 tím, že zvolíme jednu její trojici bodovou, na př. X_1, X_4, P, kde P je bod na C^n obecně zvolený. K této trojici bodové (X_1, X_4, P) sestrojíme na křivce C^n residualní skupinu bodovou (H), — konstrukce její jest lineární, — a lineární systém S^l adjungovaných křivek, které procházejí skupinou bodovou H, vytíná již tuto lineární soustavu bodovou g_3^2. Adjungované křivky lineárního systému S^l_P, t. j. křivky systému S^l procházející bodem P, vytínají na C^n involuci g' o bodovém páru X_1, X_4. Podobně jest involuce g'', určená párem X_1. X_3, vyťata na C^n adj. křivkami lineárního systému S^l_Q. Tak vznikly na C^n ekvivalentní trojice bodové lineární soustavy g_3^2,

$$(X_1, X_4, P) \equiv (X_2, X_3, P) \equiv (X_1, X_3, Q) \equiv (X_2, X_2, Q).$$

Bodový pár X_3, Q určuje involuci g''', kterou vytíná na C^n lineární systém adjung. křivek $S^l_{X_1}$. Vytvořme součin $g' g'''$. Obdržíme tak jednoznačnou korespondenci druhého druhu, kterou označme E_1. Ježto jest $E_1 \equiv g' . g'''$, přiřazuje korespondence E_1 bodu X_1 bod P, neboť jest

$$X_1 \ldots (g') \ldots X_4 \ldots (g''') \ldots P.$$

Pak máme též vztahy

$$X_2 \ldots (g') \ldots X_3 \ldots (g''') \ldots Q.$$

Hledaný bod X_2 vyhovuje tudíž požadavkům:

$$X_2 \ldots (E_1) \ldots Q \tag{1}$$

$$(Q, X_2, X_2) \equiv (X_1, X_4, P). \tag{2}$$

Hledáme tudíž na křivce C^n bod X_2, jemuž, jakožto bodu dvojnásobnému přísluší v dané lineární soustavě bodové g_3^2 (určené trojicí bodovou X_1, X_4, P) takový bod Q, který mu současně přiřazuje jednoznačná korespondence druhého druhu E_1, určená body X_1, P. Hledáme tedy v dané soustavě g_3^2 ty bodové skupiny, které se redukují v bodové páry (jeden bod je dvojnásobný), jež současně patří dané korespondenci druhého druhu E_1. Body Q, X_2, které vyhovují podmínce (2), odpovídají si v korespondenci T: (1, 4), jejíž hodnotnost $\gamma = 2$. Body X_2, Q, které vyhovují oběma podmínkám (1) a (2), jsou koincidenční body v korespondenci $K \equiv E_1 T$. Značí-li α, β, γ indexy této korespondence K, jest $\alpha = 1$, $\beta = 4$, a hodnotnost $\gamma = 2$, neboť hodnotnost korespondence E jest -1.[1]) Korespondence K má tedy dle Cayley-Brillovy formule 9 bodů samodružných. Existuje tedy devět bodů X_2 z nichž každý vyhovuje podmínkám (1) a (2) a tudíž úlohu řeší.

„Trisekce vzdálenosti“ dvou daných bodů na alg. křivce rodu 1 užitím jednoznačné korespondence E druhého druhu jest tudíž obecně devítiznačná. Existuje obecně devět různých jednoznačných korespondencí druhého druhu E, jichž třetí mocniny E^3 dávají danou jednoznačnou transformaci druhého druhu.

Je-li tato transformace identitou, jest k ní příslušná korespondence E ternárně cyklickou; korespondencí těch jest jak známo 8, devátá jest identitou, neboť pro $X_4 \equiv X_1$ plyne přímo bezprostředně jedno řešení $X_2 \equiv X_1$.

Vraťme se ke konstrukci bodu X_2, který s daným bodem X_1 určuje hledanou korespondenci druhého druhu E, jejíž třetí mocnina byla dána bodovým párem X_1, X_4. K tomu cíli jsme užili úplnou lineární soustavu bodovou g_3^2, kterou jsme určili bodovou skupinou X_1, X_4. P, kde P byl bod na kř. C^n libovolně zvolený. Zvolíme-li specielně bod P tak, že jest $P \equiv X_1$, takže příslušná

---

[1]) Součin dvou korespondencí, jež mají hodnotnost γ_1 a γ_2, má hodnotnost $\gamma = -\gamma_1 \gamma_2$. Viz Severi-Löffler: Alg. Geometrie, str. 173.

lineární soustava bodová g_3^2 jest dána skupinou bodovou X_1, X_1, X_4, pak jest v konstrukci se vyskytující pomocná korespondence druhého druhu $E_1 \equiv g' . g'''$ určena bodovým párem $X_1, P \equiv X_1$, a jest tudíž identitou. Hledané body X_2 jsou tudíž trojnásobné body lineární soustavy bodové g_3^2 určené trojicí bodovou X_1, X_1, X_4.

Úloha určiti jednoznačnou korespondenci druhého druhu E, jejíž třetí mocnina převádí daný bod X_1 v X_4, redukuje se tudíž v úlohu určiti devět trojnásobných bodů lineární soustavy bodové g_3^2, jež jest dána skupinou bodovou X_1, X_1, X_4.

Zároveň jsme v předchozím poznali:

Je-li na křivce rodu 1 dána úplná lineární soustava bodová g_3^2 a jednoznačná korespondence E, tu existuje obecně v soustavě g_3^2 18 skupin bodových, které se redukují v bodové páry (jeden bod je dvojnásobný), jež současně patří dané korespondenci E. Tyto skupiny jsou dvojího druhu. Prvý druh má devět bodových skupin $(Y_i, Y_i. Y'_i)$, kde dvojnému bodu Y_i odpovídá danou korespondencí E příslušný bod Y'_i, a druhý druh má rovněž devět skupin bodových (Z'_i, Z'_i, Z_i), kde bodu Z_i odpovídá korespondencí E příslušný dvojný bod Z'_i. $(i = 1, 2, \ldots 9)$. Je-li daná korespondence E binárně cyklická (involutorní) anebo identitou, oba tyto druhy skupin splývají a těchto 18 skupin bodových se redukuje v 9 bodových párů. Je-li korespondence E identitou, dostáváme známý výsledek, že lineární soustava bodová g_3^2 má 9 bodů trojnásobných.

2. Přihlédněme k obecnému případu, kdy oba druhy skupin jsou různé a daná korespondence E jest tedy obecnou. Vytkněme dva bodové páry různých druhů (Y_i, Y'_i) a $(Z'_k Z_k)$, kde v pořadí prvé body uvedené jsou dvojné. Určeme involuci prvého druhu $g_{i,k}$, která jest určena bodovým párem $Y_i Z_k'$; tato involuce nutně musí bod Y'_i převáděti v bod Z_k, neboť Y_i, Y'_i; Z_k, Z'_k jsou bodové páry korespondence 2. druhu E. Převádí tedy involuce $g_{i,k}$ bodovou skupinu (Y_i, Y_i, Y'_i) lineární soustavy g_3^2 ve skupinu (Z_k', Z_k', Z_k) téže soustavy, takže musí nutně tuto soustavu bodovou převádět samu v sebe. Ježto involuce $g_{i,k}$ převádí každý dvojný bod soustavy g_3^2 nutně opět v dvojný bod téže soustavy a bodové páry korespondence E v páry téže korespondence se smyslem opačným, jest zřejmo, že každou jinou skupinu bodovou (Y_h, Y_h, Y_h') prvého druhu převádí tato involuce v jednu ekvivalentní skupinu bodovou (Z_l', Z_l', Z_l) druhého druhu. Převádí tedy každá involuce prvého druhu g_{ik} devět bodových párů (Y_i, Y_i') prvého druhu v páry (Z_k', Z_k) druhu druhého a tedy skupinu devítibodovou (Y_i) ve sku-

pinu (Z'_k). Tak vzniká celkem devět involucí prvého druhu, — značme je g_{1k} — které vytknuté ekvivalentní skupiny obou druhů navzájem jednu v druhou převádějí ($k = 1, 2, 3, \ldots 9$). Existuje devět involucí prvého druhu $g_{1, k}$, které reprodukují danou úplnou lineární soustavu bodovou g_3^2.

Utvořme součin dvou takových involucí prvého druhu; vznikne zřejmě korespondence druhého druhu E, která opět danou lineární soustavu bodovou g_3^2 reprodukuje a převádí na příklad bodovou skupinu (Y_i, Y_i, Y'_i) ve skupinu ekvivalentní téhož druhu (Y_k, Y_k, Y'_k). Každá takto vzniklá korespondence E reprodukuje tudíž skupinu devítibodovou (Y_i) a rovněž tak skupinu (Y'_i). Jest zřejmo, že totéž se činí se skupinami druhého druhu (Z'_i, Z'_i, Z_i), a s devítibodovými skupinami (Z'_i) a (Z_i). Avšak touž vlastnost musí míti i libovolná celistvá mocnina každé takovéto korespondence druhého druhu E. Musí se tudíž určitá potence její E^m redukovati v identitu, při čemž číslo m může býti buď 9 anebo 3. Snadno seznáme, že $m = 3$, že takto vzniklá korespondence E jest ternárně cyklickou.

Zvolme jednu takovou korespondenci, značme ji $E_{1,2}$. Tato převádí bod Y_1 devítibodové skupiny (Y_i) nutně v jiný bod téže skupiny, který označme Y_2; tomuto bodu Y_2 odpovídá potom touž korespondencí $E_{1,2}$ bod téže skupiny, který označme Y_3. Pak musí ovšem bodu Y'_1 touto korespondencí odpovídati bod Y'_2 a tomuto bod Y'_3. Máme tedy dva bodové páry korespondence $E_{1,2}$: pár Y_1, Y_2 a Y_2, Y_3. Involuce prvého druhu g_2^1, která převádí bod Y_2 opět v týž bod a má tedy v bodě Y_2 bod dvojný, převádí nutně bod Y_1 v Y_3. Máme tedy ekvivalentní bodové páry $(Y_1, Y_3) \equiv (Y_2, Y_2)$ a tudíž ekvivalentní trojice bodové:

$$(Y_1, Y_1, Y'_1) \equiv (Y_2, Y_2, Y'_2) \equiv (Y_1, Y_3, Y'_2). \tag{3}$$

Poněvadž bodové páry Y_1, Y'_1 a $Y_2\ Y'_2$ náležejí téže korespondenci druhého druhu, musí z týchže důvodů dvojice bodové Y_1, Y'_2 a Y'_1, Y_2 patřiti téže involuci prvého druhu a jsou tedy navzájem ekvivalentní: $(Y_1, Y'_2) \equiv (Y'_1, Y_2)$. Jsou tedy rovnocenné i skupiny bodové

$$(Y_1, Y'_2, Y_3) \equiv (Y'_1, Y_2, Y_3) \tag{4}$$

Korespondence druhého druhu $E_{1,2}$, která převádí bod Y_1 v Y_2, převádí bod Y_3 v bod Y_h skupiny (Y_i). Náleží tedy nutně bodové páry Y_1, Y_h a Y_2, Y_3 téže involuci prvého druhu, čili jest

$$(Y_2, Y_3) \equiv (Y_1, Y_h)$$

a tudíž $$(Y_2, Y_3, Y'_1) \equiv (Y_1. Y_h, Y'_1).$$

Vezmeme-li zřetel ke vztahům (3) a (4), obdržíme

$$(Y_1\ Y_h, Y'_1) \equiv (Y_1, Y_1, Y'_1)$$

a tudíž $Y_h \equiv Y_1$. Korespondence $E_{1,2}$ jest ternárně cyklická. Skupina devíti bodů (Y_i) skládá se tedy ze tří ternárných cyklů korespondence $E_{1,2}$. Všech takových korespondencí jest zřejmě osm; značme je $E_{1,k}$, kde $k = 2, 3, \ldots 9$. Korespondence E_{11} jest identitou. Skupina devíti bodů (Y_i) jest tudíž vytvořena grupou G_9 osmi ternárně cyklických korespondencí druhého druhu E a lze ji tudíž čtyřmi způsoby děliti ve tři cykly trojbodové. Touž vlastnost má ovšem i skupina 9 bodů (Y'_i) a skupiny (Z'_i) i (Z_i).

Skupina 18 bodů, složená z bodů (Y_i) a (Z'_i), reprodukuje se tudíž devíti involucemi prvého druhu $g_{1,k}$ $(k = 1, 2, \ldots 9)$ a 8 ternárně cyklickými korespondencemi $E_{1,k}$, které s identitou $E_{1,1} \equiv 1$ tvoří grupu G_{18}. Při tom převádí involuce $g_{1,k}$ na příkl. bod Y_1 v Z'_k a korespondence $E_{1,k}$ bod Y_1 v Y_k. Grupa těchto jednoznačných transformací reprodukuje vytknutou lineární soustavu bodovou g_3^2, reprodukuje též skupinu 18-bodovou složenou z bodů (Y'_i) a (Z_i), a nutně reprodukuje i skupinu devíti trojnásobných bodů (T_i) dané soustavy g_3^2, takže tato devítibodová skupina (T_i) zastupuje jednu skupinu 18-bodovou grupy G_{18}.

Snadno seznáme, že existují ještě tři skupiny devítibodové, jež jsou vůči grupě G_{18} invariantní. Tyto tři skupiny obdržíme ze skupiny devíti trojnásobných bodů (T_i), když tuto skupinu transformujeme všemi třemi existujícími binárně cyklickými korespondencemi druhého druhu. Takto vzniklé skupiny bodové označme (U_i), (V_i), (W_i). Ježto bod U_i vznikl z bodu T_i binárně cyklickou korespondencí druhého druhu, jsou oba tyto body dvojnými body téže involuce prvého druhu, a jest tedy $(U_i, U_i) \equiv (T_i, T_i)$, a tudíž

$$(U_i, U_i, T_i) \equiv (T_i, T_i, T_i). \qquad (5)$$

Podobně jest též

$$(V_i, V_i, T_i) \equiv (T_i, T_i, T_i) \equiv (W_i, W_i, T_i). \qquad i = 1, 2 \ldots 9 \qquad (5)$$

Kterákoliv transformace grupy G_{18}, reprodukující vytknutou soustavu bodovou g_3^2, převádí bod T_k v některý bod skupiny (T_i), třeba v bod T_l; převádí tudíž nutně dvojný bod U_k v některý dvojný bod, který bod T_l doplňuje na skupinu bodovou uvažované soustavy g_3^2; — tedy dle vztahů (5) buď v bod U_l, nebo V_l, nebo W_l. Body U_k, T_k tvoří bodový pár binárně cyklické korespondence 2. druhu, a každá jednoznačná transformace kteréhokoliv druhu převádí je tudíž v bodový pár t é ž e binárně cyklické korespondence; převádí tudíž vytknutá transformace grupy G_{18} bod U_k v bod U_l, neboť jen bod U_l odpovídá bodu T_l v téže binárně cyklické korespondenci druhého druhu, v níž si odpovídají body U_k, T_k. Skupina devíti bodů (U_i) jest tudíž vůči grupě G_{18} invariantní. Totéž ovšem platí i o skupinách (V_i) a (W_i). Každá z těchto čtyř devítibodových skupin (T_i), (U_i), (V_i), $W_i)$ jest vytvořena na křivce grupou G_9 složenou z 8 ternárně cyklických korespondencí druhého druhu.

Sestrojíme-li tudíž na dané křivce jinou lineární soustavu bodovou g_3^2 jednoznačně určenou bodem U_1 co bodem trojnásobným, tu tato soustava musí míti dalších 8 bodů trojnásobných a ty musí býti dle předchozího z bodu U_1 vytvořeny grupou G_9 ternárně cyklických korespondencí. Jest tudíž skupina bodová (U_i) skupinou trojnásobných bodů této nové soustavy g_3^2, která jest tedy vytčenou grupou G_{18} reprodukována.

Nalezená grupa G_{18}, vůči níž jsou nalezené čtyři skupiny devítibodové (T_i), (U_i), (V_i) a (W_i) invariantní, reprodukuje tudíž celkem čtyři lineární soustavy bodové g_3^2, z nichž každá má jednu z těchto čtyř skupin za skupinu devíti bodů trojnásobných.

Aplikujeme-li předchozí poznatky na obecnou rovinnou křivku kubickou C^3 a zvolíme-li za vytknutou lineární soustavu bodovou g_3^2 tu, která je na křivce C^3 vytvořena soustavou přímek v rovině křivky C^3, seznáváme přímo, že k této soustavě bodové patřící grupa jednoznačných transformací G_{18} jest ta, která je na křivce C^3 vytvořena známou grupou G_{18} kollineací, které křivku C^3 reprodukují. Trojnásobné body (T_i) této soustavy g_3^2 jsou nyní body inflexní a další tři devítibodové skupiny (U_i), (V_i), (W_i) přejdou ve tři skupiny devítibodové složené z bodů sextaktických. Grupa G_{18} kollineací, reprodukujících obecnou kubickou křivku rovinnou C^3, reprodukuje tudíž čtyři úplné lineární soustavy bodové g_3^2: soustavu vyťatou na křivce C^3 přímkami rovinného pole křivky C^3, mající inflexní body (T_i) za body trojnásobné, a další tři soustavy bodové g_3^2, jichž trojnásobné body tvoří tři skupiny o 9 bodech sextaktických (U_i), (V_i), (W_i), jež ze skupiny inflexních bodů (T_i) obdržíme, transformujeme-li ji všemi třemi binárně cyklickými korespondencemi druhého druhu.

Tím ovšem hned známe veškeré podgrupy grupy G_{18}, jež lze ostatně přímo odvoditi i pro obecnou soustavu bodovou g_3^2 na obecné elliptické křivce C^n. Máme tedy výsledek:

Na obecné elliptické křivce C^n existuje ∞^1 grup G_{18} jednojednoznačných transformací, složených z osmi ternárně cyklických korespondencí druhého druhu a devíti involucí prvého druhu. Vytvoříme-li z libovolného bodu T_1 křivky skupinu bodovou užitím grupy G_9 osmi ternárně cyklických korespondencí, obdržíme tak devítibodovou skupinu (T_i), jež je invariantní vůči jedné takové grupě G_{18}, a sice té, která obsahuje vedle ternárně cyklických korespondencí těch devět involucí prvého druhu $g_{1,k}$, jež jsou určeny bodovými páry T_1, T_k. $(k = 1, 2, \ldots 9)$. Transformujeme-li tuto skupinu bodovou (T_i) třemi existujícími binárně cyklickými korespondencemi druhého druhu, obdržíme další tři devítibodové skupiny (U_i), (V_i) a (W_i), z nichž každá jest též vůči téže grupě G_{18} invariantní. Každá úplná lineární soustava bodová g_3^2 na křivce vytvořená jest reprodukována jednou takovou grupou G_{18} jednoznačných transformací, a každá takováto grupa G_{18} jednoznačných transformací reprodukuje čtyři úplné lineární soustavy bodové g_3^2. Trojnásobné body těchto čtyř soustav tvoří svrchu vyznačené čtyři devítibodové skupiny (T_i), (U_i), (V_i) a (W_i), z nichž každá jest vůči celé grupě G_{18} invariantní.

3. Aplikujeme-li nalezené vztahy na různé křivky elliptické, obdržíme řadu specielních výsledků. Omezím se toliko na jeden příklad, kdy uvažovaná křivka jest kubická křivka rovinná C^3. Vezmeme-li za úplnou lineární soustavu bodovou g_3^2 tu, která se skládá z trojic bodových ležících v přímce, pak dvojné body oněch osmnácti bodových skupin této soustavy, (Y_i, Y_i, Y'_i) a (Z'_i, Z'_i, Z_i), $i = 1, 2, \dots 9$, jež se redukují v bodové páry, které současně patří určité dané korespondenci E, jsou ty body, jímž korespondencí E (resp. korespondencí E^{-1}) odpovídají jejich body tečnové. V těchto 18 bodech dvojího druhu, značme je v dalším (Y_i) a (Z'_i), dotýká se jak známo kubické křivky C^3 řídící křivka K_6^{12} (šesté třídy a dvanáctého stupně) této korespondence E. Z předchozích poznatků plynou nyní bezprostředně všechny známé vlastnosti těchto dvou skupin devítibodových; — tvoří inflexní skupiny connexní, neboť jsou vytvořeny grupou G_{18} kollineací, každá jest invariantní vzhledem ke komutativní podgrupě G_9 a lze ji tudíž rozložiti v ternárné cykly.

Na křivce C^3 určeme nyní bod ξ_2, který odpovídá v určité dané obecné korespondenci E některému inflexnímu bodu ξ_1 křivky C^3. Spojnice bodů $\overline{\xi_1 \xi_2}$ seče potom křivku v bodě ξ_0, který odpovídá nutně bodu ξ_1 v korespondenci E^{-1}. Učiňme nyní $X_1 \equiv \xi_1$, $X_4 \equiv \xi_2$ a hledejme body X_2 a X_3 postupně vytvořené z bodu X_1 korespondencí E', pro kterou jest $E'^3 \equiv E$. Převedeme-li řešení svrchu obecně provedené na křivku C^3 vezmouce za pomocnou soustavu bodovou g_3^2 tu, kterou na C^3 vytíná soustava přímek v rovině, nalezneme ihned tyto vztahy: spojnice bodů $\overline{X_2 X_3}$ seče křivku C^3 v bodě ξ_0, spojnice $\overline{X_1 X_3}$ v bodě X'_2, který jest tečnovým bodem bodu X_2. Hledaný bod X_2 jest tedy tím charakterisován, že jeho tečnový bod X'_2 mu odpovídá v té korespondenci druhého druhu, ve které odpovídá inflexnímu bodu ξ_1 bod ξ_0, t. j. v korespondenci E^{-1}. A opačně: Každý bod X_2, který má tuto vlastnost, odpovídá bodu inflexnímu $X_1 \equiv \xi_1$ v korespondenci E', pro niž jest $E'^3 \equiv E$. Korespondence E'^{-1} přiřazuje potom bodu X_1 bod X_0 a tomuto opět X_{-1}. Bod X_0 nutně leží na spojnici $\overline{X_1 X_2}$ a mimo to jest $X_{-1} \equiv X'_2$. Tečnovým bodem bodu X_0 jest potom bod $X'_0 \equiv X_3$, a jest zároveň zřejmo, že bodu X_0 odpovídá korespondencí E jeho bod tečnový X'_0. Hledané body X_2 a X_0, které s bodem X_1 určují hledanou korespondenci E', resp. její inversi, tvoří tudíž ony dvě význačné devítibodové skupiny (Z'_i) a (Y_i), v nichž se řídící křivka K^{12}_6 dané korespondence E dotýká křivky C^3. Výsledek tento plyne ostatně též ihned analyticky, vyjádříme-li body křivky C^3 elliptickými parametry. Body (u), v nichž se řídící křivka K^{12}_6 korespondence E, jež dána jest kongruencí

$$u \equiv u' + C \text{ (mod. per)},$$

dotýká křivky C^3, hoví podmínkám

$$u \equiv u' \pm C \quad \text{a} \quad 2u + u' \equiv 0,$$

odkud sečtením plyne

$$3u \equiv \pm C, \qquad \text{čili} \qquad u \equiv \frac{p}{3} \pm \frac{C}{3},$$

kde p značí periodu. Bod (u) odpovídá vskutku kterémukoliv inflexnímu bodu $\left(\frac{p}{3}\right)$ v korespondenci druhého druhu, jejíž trojmoc jest daná korespondence. Máme tedy výsledek:

Dvě devítibodové connexní inflexní skupiny bodové (Z'_i) a (Y_i), v nichž se dotýká křivky C^3 řídící křivka K^{12}_6 obecné korespondence E, mají tu vlastnost, že kterýkoliv bod z jedné této skupiny, na př. (Z'_i), odpovídá kterémukoliv inflexnímu bodu křivky v korespondenci E', pro níž jest $E'^3 \equiv E$; body skupiny druhé (Y_i) vedou ke korespondencím inversním. Je-li daná korespondence E n-nárně cyklickou, značme ji potom E_n, pak dotyčné body řídící křivky této korespondence určují s kterýmkoli inflexním bodem cyklickou korespondenci E_{3n}. Dotyčné body tyto, ležíce v cyklech $3n$-bodových, sestrojených z inflexního bodu, jsou, jak jsem jinde ukázal,[2] vesměs projektivně význačné a sice obecně ve stupni n-tém.

Sestrojíme-li uvedeným způsobem z daného cyklu n-bodového vytvořeného z inflexního bodu X_1 cyklus $3n$-bodový $X_1, X_2, \ldots X_{3n}$, při čemž n je libovolné číslo celé, tu existují vždy v každém tomto cyklu $3n$-bodovém tři body téže vlastnosti, jako bod X_2, t. j. tři body patřící téže význačné skupině devítibodové (Z'_i); jsou to zřejmě body X_2, X_{2+n}, X_{2+2n}. Podobně jsou tam tři body ze sku-

---

[2]) Viz můj článek: Příspěvek k synthetické theorii skupin bodových na obecné kubické křivce rovinné. „Časopis“, roč. LII., čís. 1.

piny druhé, a sice body X_{3n}, X_{2n}, X_n. *Jen tehdy a jen tehdy, je-li n dělitelno třemi, žádný z těchto bodů neleží v původním cyklu n-bodovém,* neboť jsou to zřejmě body oboustranně sousedící s těmi třemi inflexními body, jež leží v cyklu. *V každém jiném případě, kdy n není dělitelno třemi, jest jeden z těchto tří bodů* (kteréhokoliv druhu) *obsažen v původním cyklu n-bodovém.* Plyne to přímo z toho, že v tomto případě existuje vždy takové číslo $k < n$, pro které jest $(E_n^k)^3 \equiv E_n^1$. Hodnota jeho jest dána kongruencí $3k \equiv 1$ (mod n), které lze vždy vyhověti, ježto n není dělitelno 3. Lze tedy z každého cyklu n-bodového, není-li n dělitelno třemi, sestrojiti čtyři cykly $3n$-bodové. Je-li n dělitelno třemi, lze z cyklu n-bodového sestrojiti tři cykly $3n$-bodové.

Úvahy provedené v obou statích I, II na obecné křivce elliptické vybízejí přímo k jistému sevšeobecnění. Otázku tu projednám při jiné příležitosti.

*

Sur des rapports entre les transformations birationnelles et leurs groupes sur une courbe plane générale de genre un. — II.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur étudie, par la méthode synthétique, sur une courbe elliptique générale, quelques propriétés des involutions rationnelles g_2^1, g_3^2 et des correspondances univoques de la seconde espèce E. Il trouve les résultats principaux que voici:

1. Sur une courbe elliptique il existe, en général, neuf différentes correspondances univoques E dont les cubes E^3 donnent la même correspondance univoque de la seconde espèce. Le problème de construire une telle correspondance univoque E dont la puissance E^3 transforme le point X_1 en un point X_4, se réduit à celui de déterminer les neuf points triples de l'involution rationnelle g_3^2 qui est définie par le groupe X_1, X_1, X_4.

2. Dans une involution rationnelle g_3^2 il existe, en général, 18 groupes de points qui se réduisent à des couples de points — ce qui veut dire qu'un de ces points est double — qui appartiennent, en même temps, à la correspondance générale univoque de deuxième espèce E donnée. L'auteur indique quelques propriétés de ces groupes.

3. Deux groupes d'inflexion à neuf points, connexes, (Z'_i) et (Y_i), en lesquels la cubique plane générale C^3 est touchée par la courbe directrice K_6^{12} (ayant l'ordre 12, la classe 6) de la correspondance générale E produite sur C^3, ont cette propriété qu'un

quelconque des points d'un de ces groupes, soit (Z'_i), correspond à un quelconque des points d'inflexion de la courbe C^3 dans une correspondance univoque E', pour laquelle $E'^3 \equiv E$; les points du deuxième groupe (Y_i) ont la même propriété par rapport aux correspondances inverses. Si la correspondance donnée est cyclique au n-ième degré, E_n, les points de contact de la courbe directrice de cette correspondance déterminent, avec un point d'inflexion quelconque de la courbe C^3, une correspondance cyclique E_{3n}. Ces points de contact sont tous des points caractérisés par la propriété projective d'être des points où la C^3 a un contact de l'ordre $3n$-1 avec des courbes de l'ordre n.

4. Il existe, sur la courbe générale de genre 1, une infinité simple de groupes G_{18} de transformations univoques, composés de huit correspondances univoques de la deuxième espèce, cycliques au troisième degré, et de neuf involutions de la première espèce. Si l'on applique à un point T_1 quelconque de la courbe le groupe G_9 des huit correspondances cycliques de la deuxième espece, on obtient un groupe (T_i) de neuf points, invariable par rapport à un groupe G_{18}, celui qui contient, outre ces correspondances cycliques, les neuf involutions de la première espèce déterminées par les couples de points T_1, T_k $(k = 1, 2, \ldots, 9)$. Si l'on transforme ce groupe (T_i) par les trois involutions univoques de la deuxième espèce qui existent sur la courbe, on obtient trois groupes (U_i), (V_i), (W_i) à neuf points, invariables, eux aussi, par rapport au même groupe G_{18}. Toute involution rationnelle g^2_3, produite sur une courbe elliptique, se reproduit par un tel groupe G_{18} de transformations univoques, et, réciproquement, tout groupe tel que G_{18} reproduit quatre involutions rationnelles g^2_3. Les points triples de ces quatre involutions forment les groupes (T_i), (U_i), (V_i), (W_i) mentionnés ci-dessus, dont chacun est invariable par rapport au groupe G_{18}.

Gravitační poloměr v obecné theorii relativnosti.

Napsal ředitel *Ant. Libický.*

V obecné theorii relativnosti má zvláštní důležitost veličina, která se zove *poloměrem gravitačním*. Vyskytuje se při přibližném řešení základních rovnic

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \tag{1}$$

pro zvláštní pole gravitační, o němž platí tyto podmínky:

1. Pole jest statické, t. j. nemění se časem; tudíž všechny složky jeho jsou nezávislé na souřadnici $x_4 = ct$.